بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی رده‌ای از دستگاه‌های برگشت‌پذیر درجه دو

سخنران: محسن زارعی

زمان: چهارشنبه ۲۷ /۶ /۹۲ ساعت ۱۰ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۲– دکتر مجید گازر

۳– دکتر رسول عاشقی

۴– دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده

دستگاه‌های چندجمله‌ای مرتبه دوم در صفحه با حداقل یک مرکز همیشه انتگرال‌پذیر هستند که می‌توان آنها را به چهار رده: همیلتونی Q_3^H، برگشت‌پذیر Q_3^R، همبعد چهار Q_4، لاتکا-ولترای تعمیم‌یافته Q_3^{LV} دسته‌بندی کرد. یک مسئله طبیعی بررسی تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی این چهار رده از دستگاه‌ها تحت اختلال‌های کوچک از درجه دو است. در این پایان‌نامه قصد داریم حالت‌هایی از دستگاه‌های رده دوم یعنی برگشت‌پذیر را تحت اختلال درجه دو مورد بررسی قرار دهیم. حالت اول دستگاه‌های برگشت‌پذیر از درجه دو با دو مرکز است که در هر ناحیه‌ی فشرده از طوق تناوبی می‌توانند حداکثر چهار سیکل حدی داشته باشند. اگر چهار سیکل حدی وجود داشته باشد آنگاه توزیع آنها (۳,۱) است، به این معنی که سه سیکل حدی به صورت تو در تو یک مرکز را احاطه می‌کنند و سیکل حدی دیگر مرکز متفاوت را احاطه می‌کند. حالت دیگر از دستگاه‌های برگشت‌پذیر درجه دو که مورد مطالعه قرار می‌گیرد یک دستگاه دارای یک مرکز و یک حلقه‌ی هموکلینیک است. این دستگاه در هر ناحیه‌ی فشرده از طوق تناوبی می‌تواند حداکثر سه سیکل حدی داشته باشد.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی رده‌ای از دستگاه‌های برگشت‌پذیر درجه دو

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

محسن زارعی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای محسن زارعی
تحت عنوان

ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی رده‌ای از دستگاه‌های برگشت‌پذیر درجه دو

در تاریخ ۲۷ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه
۲– استاد مشاور	دکتر مجید گازر
۳– استاد داور۱	دکتر رسول عاشقی
۴– استاد داور۲	دکتر رضا مزروعی سبدانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

تشکر و قدردانی

ستایش خدای را که به لطف بی‌منتهایش، روزیم را چشمه زلال علم و حکمت مقرر نمود و نیک‌اندیشان عرصه دانش را راهبرم گردانید. پس بر من است که به تقدیر زحمات بزرگان علم و حکمت زبان شکر گشایم.

صمیمانه‌ترین سپاس‌ها را نثار حامیان زندگیم، پدر و مادر مهربانم می‌کنم و امیدوارم به لطف پروردگار قدردان این دو موهبت الهی باشم.

از راهنمایی‌های ارزنده، پشتیبانی‌ها و حمایت‌های بی‌دریغ و همه‌جانبه استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه که رهنمودهای گرانبارشان ثمره این تلاش بود صمیمانه سپاسگزارم و از خداوند متعال سلامتی، سعادت و شادکامی را برای ایشان آرزومندم. از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر مجید گازر که در انجام این پژوهش از راهنمایی‌ها و مساعدت‌هایشان بهره بردم سپاسگزارم. از جناب آقایان دکتر رسول عاشقی و دکتر رضا مزروعی-سبدانی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

محسن زارعی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر

عزیز و مهربانم

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت،

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دست پر مهرشان بوسه می‌زنم.

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

دستگاه‌های چندجمله‌ای مرتبه دوم در صفحه با حداقل یک مرکز همیشه انتگرال‌پذیر هستند که می‌توان آنها را به چهار رده: همیلتونی Q_3^H، برگشت‌پذیر Q_3^R، همبعد چهار Q_4، لاتکا–ولترای تعمیم‌یافته Q_3^{LV} دسته‌بندی کرد. یک مسئله طبیعی بررسی تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی این چهار رده از دستگاه‌ها تحت اختلال‌های کوچک از درجه دو است. در این پایان‌نامه قصد داریم حالت‌هایی از دستگاه‌های رده دوم یعنی برگشت‌پذیر را تحت اختلال درجه دو مورد بررسی قرار دهیم. حالت اول دستگاه‌های برگشت‌پذیر از درجه دو با دو مرکز است که در هر ناحیه‌ی فشرده از طوق تناوبی می‌توانند حداکثر چهار سیکل حدی داشته باشند. اگر چهار سیکل حدی وجود داشته باشد آنگاه توزیع آنها $(3,1)$ است، به این معنی که سه سیکل حدی به صورت تو در تو یک مرکز را احاطه می‌کنند و سیکل حدی دیگر مرکز متفاوت را احاطه می‌کند. حالت دیگر از دستگاه‌های برگشت‌پذیر درجه دو که مورد مطالعه قرار می‌گیرد یک دستگاه دارای یک مرکز و یک حلقه‌ی هموکلینیک است. این دستگاه در هر ناحیه‌ی فشرده از طوق تناوبی می‌تواند حداکثر سه سیکل حدی داشته باشد.

فصل ۱

مقدمه

هیلبرت[۱] در دومین کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس در سال ۱۹۰۰، ۲۳ مسئله را به عنوان مسائل ریاضی قرن بیستم معرفی کرد، مسائلی که ریاضیات قرن بیستم را کاملا تحت تاثیر قرار داد. این مسائل در چهار دسته‌ی کلی قرار داشتند. گروه اول شامل شش مسئله بنیادی بود که با استفاده از تحلیل اعداد حقیقی با استفاده از نظریه‌ی کانتوری مجموعه‌ها خواستار ارائه‌ی یک چارچوب اصول موضوعی برای حساب و فیزیک بود. شش تای بعدی برگرفته از مطالعه‌ی وی از نظریه‌ی جبری اعداد و قضیه‌ی کرونکر و سومین مجموعه‌ی شش‌تایی مخلوطی از مسائل جبری و هندسی بود که موضوعات بسیار متنوعی را پوشش می‌داد. گروه آخری پنج مسئله از معادلات با مشتقات جزئی وحساب تغییرات را در بر می‌گرفت. اکثر این مسائل یک برنامه‌ی تحقیقات ریاضی را شامل می‌شدند. برخی از آنها هنوز جواب مناسب خود را نگرفته‌اند و برخی دیگر در چهارچوب مطرح شده نادرست بودند و نیاز به فرمول‌بندی جدیدی داشتند. یکی از مسائل حل نشده در این لیست مسألهی شانزدهم بود که علیرغم گذشت بیش از یکصد سال از طرح مسئله و چاپ هزاران مقاله هنوز جواب کامل و قانع کننده‌ای برای آن ارائه نشده است. صورت کلی مسئله‌ی شانزدهم هیلبرت را می‌توان بصورت ''مسئله‌ی توپولوژی منحنی‌ها و رویه‌های جبری وتعیین کرانی برای تعداد سیکل‌های حدی دستگاه‌های چندجمله‌ای در صفحه'' بیان کرد. قسمت دوم مسئله‌ی شانزدهم هیلبرت تعداد ماکزیمم و موقعیت نسبی سیکل‌های تناوبی در صفحه را برای معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای در صفحه به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x,y), \\ \dot{y} = Q_n(x,y). \end{cases} \tag{۱.۱}$$

بررسی می‌کند که در آن P_n و Q_n چندجمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه‌ی n هستند. به طور سنتی مسئله‌ی هیلبرت به سه مسئله‌ی بنیادی زیر تقسیم می‌شود که جواب مثبت به هر مسئله، پاسخ مثبت برای سوال‌های قبلی را در بر دارد.

مسئله ۱: آیا هر میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارد؟

[۱] Hilbert

مسئله ۲: آیا کرانی یکنواخت برای تعداد سیکل‌های حدی یک میدان برداری چندجمله‌ی در صفحه موجود است که تنها به درجه‌ی چندجمله‌ای و نه چندجمله‌ای داده شده بستگی داشته باشد؟ این کران بالا را با $H(n)$ نمایش داده، عدد هیلبرت می‌نامیم.

مسئله ۳: یک کران بالا برای $H(n)$ ارائه دهید.

برای این مسئله، لوید[۱] اظهار کرد که ویژگی برجسته و قابل توجه این مسئله فرض جبری و نتیجه‌ی توپولوژیکی آن است. هیلبرت حدس زد که تعداد سیکل‌های حدی دستگاه (۱.۱) به عددی تنها وابسته به درجه‌ی n از میدان‌های برداری بستگی دارد. در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک[۲] [۱۰] ادعا کرد که مسأله اول را حل کرده است یعنی برای سیستم (۱.۱) مفروض تعداد سیکل‌های حدی متناهی است. در اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی ایلیاشنکو[۳] [۲۶] شکافی در اثبات دولاک یافت. بمن[۴] [۲] توانست خاصیت متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی را برای یک سیستم چندجمله‌ای درجه دوم مفروض ثابت کند. در اوایل سال ۱۹۹۰ میلادی ایلیاشنکو و اکال[۵] در دو مقاله طولانی [۲۷] و [۱۲] به طور مستقل اثبات جدیدی از قضیه متناهی بودن انفرادی را ارائه کردند و شکاف مقاله دولاک را بر طرف کردند در نتیجه پس از گذشت نود سال سوال اول جواب مثبت گرفت و حل شد. ولی تا به حال مسأله ۲ حتی برای $n=2$ حل نشده است. حال به معرفی یک صورت ضعیف‌تر از مسئله‌ی شانزدهم هیلبرت می‌پردازیم. این مسئله توسط آرنولد[۶] [۱] در سال ۱۹۷۷ مطرح شد که می‌توان آن را بصورت زیر بیان کرد:

فرض کنید $H=H(x,y)$ یک چندجمله‌ای نسبت به x و y از درجه‌ی $m\geq 2$ باشد و فرض کنید که منحنی‌های تراز $\gamma_h\subseteq\{(x,y)|H(x,y)=h\}$ به فرم خانواده پیوسته از بیضی‌های γ_h برای $h_1<h<h_2$ هستند. حال یک چندجمله‌ای ۱-فرمی $w=f(x,y)dy-g(x,y)dx$ را در نظر بگیرید که f و g چندجمله‌ای‌هایی هستند که $\max\{deg(f),deg(g)\}=n\geq 2$. در اینصورت مسئله به پیدا کردن ماکزیمم عدد $Z(m,n)$ از صفرهای ایزوله انتگرال آبلی

$$I(h)=\oint_{\gamma_h} w.$$

برای اعداد صحیح و ثابت m و n تبدیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که انتگرال آبلی، یک انتگرال از یک ۱-فرمی در طول یک منحنی جبری است. بنابر [۲۸]، نشان خواهیم داد که این مسئله از شمارش تعداد صفرهای یک انتگرال آبلی رابطه‌ی نزدیکی با مسئله‌ی شانزدهم هیلبرت دارد. چندجمله‌ای از درجه‌ی $m\geq 2$، $H(x,y)$، متناظر با میدان برداری همیلتونی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases}\dot{x}=-H_y(x,y),\\ \dot{y}=H_x(x,y).\end{cases}\tag{۲.۱}$$

[۱]Lloyd [۲]H.Dulac [۳]Yu.Ilyashenko [۴]R.Bamon [۵]J.Ecale [۶]Arnold

که "$\cdot$" به معنی $\frac{d}{dt}$ و H_u نشان دهنده‌ی مشتق جزئی $\frac{\partial H}{\partial u}$ برای $u = x, y$ است. ε را به عنوان یک پارامتر کوچک در نظر می‌گیریم، یک اختلال از دستگاه (۲.۱) به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_y(x,y) + \varepsilon f(x,y), \\ \dot{y} = H_x(x,y) + \varepsilon g(x,y). \end{cases} \tag{۳.۱}$$

برای دستگاه مختل نشده($\varepsilon = 0$)، فرض کنید که مبدا یک نقطه تعادل مرکز باشد. بنابراین برای سطح‌های انرژی $h_1 < h < h_2$، خانواده‌ای از منحنی‌های بسته γ_h وجود دارند که نسبت به h پیوسته هستند و برای $h \in (h_1, h_2)$، یک طوق اطراف آن(مرکز) را پوشش می‌دهند. انتگرال آبلی متناظر با دستگاه (۳.۱) به صورت زیر است

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy - g(x,y)dx. \tag{۴.۱}$$

زمانی‌که یک سیستم تحت اختلال قرار گیرد، یعنی $\varepsilon \neq 0$، بعضی از مدارهای تناوبی اولیه‌ی γ_h تحت اختلال در برابر تغییر شکل مقاومت کرده و ایزوله باقی می‌مانند. این مدارهای ایزوله همان سیکل‌های حدی دستگاه مختل نشده هستند. در واقع، اختلال یک دستگاه دارای یک مرکز خطی در مبدا(مقادیر ویژه‌ی موهومی) یک راه کلاسیک برای ایجاد سیکل حدی است. یک سوال طبیعی این است که:

آیا $h \in (h_1, h_2)$ و بعضی از مدارهای تناوبی(ایزوله) Γ_ε از دستگاه مختل شده وجود دارد بطوریکه وقتی $\varepsilon \to 0$، $\Gamma_\varepsilon \to \gamma_h$؟ چه تعداد از چنین Γ_εهایی می‌تواند وجود داشته باشد؟ اگر چنین اتفاقی بیافتد می‌گوییم که Γ_ε از γ_h منشعب شده است.

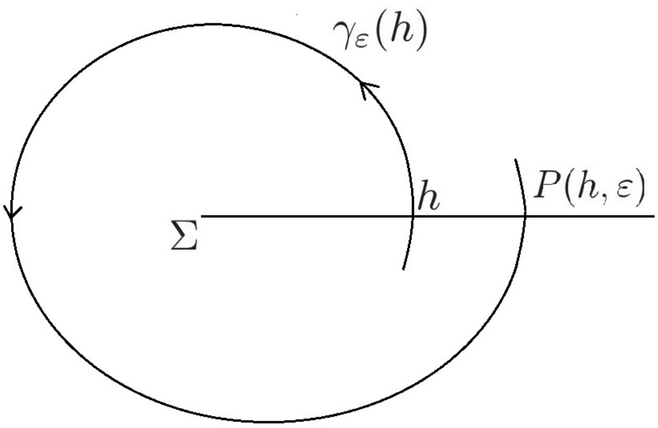
برای پاسخ به این سوال، برش Σ که متقاطع با خانوادهٔ منحنی‌های تراز γ_h است را در نظر می‌گیریم که توسط h پارامتری شده‌اند. هرگاه $\gamma_\varepsilon(h)$ مدار دستگاه مختل شده (۳.۱) با نقطه شروع h در Σ باشد، با استفاده از قضیه تابع ضمنی برای ε به اندازه کافی کوچک، این مدار دوباره برش Σ را در نقطه‌ای یکتا قطع خواهد کرد که آن را با $P(h,\varepsilon)$ نشان می‌دهیم (شکل ۱.۱ را ببینید) و تابع

$$d(h,\varepsilon) = P(h,\varepsilon) - h. \tag{۵.۱}$$

را که تابع جابجایی یا فاصله می‌نامیم را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که تعداد صفرهای ایزوله‌ی $d(h,\varepsilon)$ متناظر با سیکل‌های حدی دستگاه (۲.۱) است. قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین تابع جابجایی و انتگرال آبلی (۴.۱) را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۰.۱ (پوانکاره-پوانتریاگین [۴۵، ۴۶]) تحت مفروضات بالا وقتی $\varepsilon \to 0$، داریم

$$d(h,\varepsilon) = \varepsilon(I(h) + \varepsilon\phi(h,\varepsilon)). \tag{۶.۱}$$



شکل ۱.۱: هندسه تابع تغییر مکان

که $\phi(h,\varepsilon)$ تحلیلی است و برای (h,ε) در یک ناحیه فشرده شامل $(h,0)$ با $h\in(h_1,h_2)$، به طور یکنواخت کراندار است.

برهان. با توجه به تعریف فوق، تابع تغییر مکان به صورت تفاضلی از تابع H در نقاط انتهایی $\gamma_\varepsilon(h)$ است یعنی

$$d(h,\varepsilon)=\int_{\gamma_\varepsilon(h)} dH=\int_{\gamma_\varepsilon(h)}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

با جایگزینی (۳.۱) در طرف راست داریم

$$d(h,\varepsilon)=\varepsilon\int_{\gamma_\varepsilon(h)}\left(\frac{\partial H}{\partial x}f+\frac{\partial H}{\partial y}g\right)dt=\varepsilon\left[\oint_{\gamma_h}(\dot{y}f-\dot{x}g)\,dt+O(\varepsilon)\right].$$

متذکر می‌شویم که وقتی $\varepsilon\to 0$ آن‌گاه $\gamma_\varepsilon(h)$ به طور یکنواخت به γ_h همگراست چون γ_h فشرده است. از طرف دیگر طبق (۲.۱) در طول γ_h داریم $\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{dy}{dt}$ و $\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{dx}{dt}$. در نتیجه (۶.۱) بدست می‌آید که در آن $I(h)$ در (۴.۱) تعریف شده است. بنابراین

$$d(h,\varepsilon)=\varepsilon\left[\oint_{\gamma_h}(f(x,y)dy-g(x,y)dx)+\varepsilon\varphi(h,\varepsilon)\right]=\varepsilon\left(I(h)+\varepsilon\varphi(h,\varepsilon)\right).$$

■

به عبارت دقیق‌تر نتیجه‌ی بعدی رابطه‌ی مستقیم بین صفرهای انتگرال آبلی $I(h)$ و وجود سیکل‌های حدی را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۰.۱ [۸] اگر انتگرال آبلی تعریف شده در (۴.۱) برای $h_1<h<h_2$ متحد با صفر نباشد، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر دستگاه (۲.۱) دارای یک سیکل حدی منشعب شده از γ_{h^*} باشد آن‌گاه $I(h^*)=0$.

(۲) اگر $h^* \in (h_1, h_2)$ موجود باشد به طوری که $I(h^*) = 0$، و $I'(h^*) \neq 0$، آن‌گاه دستگاه (۲.۱) یک سیکل حدی یکتا دارد که از γ_{h^*} منشعب می‌شود. علاوه بر این، این سیکل حدی هذلولوی است.

(۳) اگر $h^* \in (h_1, h_2)$ موجود باشد به طوری که $I(h^*) = I'(h^*) = ... = I^{(k-1)}(h^*) = 0$ و $I^{(k)}(h^*) \neq 0$، آن‌گاه با در نظر گرفتن چندگانگی سیکل‌های حدی، دستگاه (۲.۱) حداکثر k سیکل حدی دارد که از γ_{h^*} منشعب می‌شود.

(۴) سرانجام،تعداد ماکزیمم صفرهای ایزوله(با احتساب تکرار آنها) متناظر با انتگرال آبلی $I(h)$ برای $h_1 < h < h_2$، کران بالایی برای مجموع تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق‌های تناوبی $\bigcup_{h_1<h<h_2} \gamma_h$ وابسته به دستگاه (۲.۱)(با احتساب چندگانگی آنها)است.

برای پرداختن به مسئله شانزدهم هیلبرت نیاز داریم تا ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی را نه تنها برای دستگاه‌های چندجمله‌ای تحت اختلال چندجمله‌ای بلکه برای دستگاه‌های غیر همیلتونی و چندجمله‌ای‌های انتگرال‌پذیر نیز در نظر بگیریم. برای این منظور ما دستگاه‌های انتگرال‌پذیر درجه دو با حداقل یک مرکز را در نظر می‌گیریم. دستگاههای چندجمله ای مرتبه دوم در صفحه با حداقل یک مرکز همیشه انتگرال پذیر هستند، [۸] با استفاده از اصطلاحات فنی در [۵۸]، ایلیف[1] در [۲۲] آنها را با استفاده از مختصات مختلط به پنج رده‌ی زیر دسته‌بندی کرد:

(۱) همیلتونی (Q_3^H)، $\dot{z} = -iz - z^2 + 2|z|^2 + (b+ic)\overline{z}^2.$

(۲) برگشت‌پذیر (Q_3^R)، $\dot{z} = -iz + az^2 + 2|z|^2 + b\overline{z}^2.$

(۳) همبعد چهار (Q_4)، $\dot{z} = -iz + 4z^2 + 2|z|^2 + (b+ic)\overline{z}^2, \qquad |b+ic| = 2.$

(۴) لاتکا-ولترای تعمیم‌یافته (Q_3^{LV})، $\dot{z} = -iz + z^2 + (b+ic)\overline{z}^2.$

(۵) همیلتونی مثلثی، $\dot{z} = -iz + z^3.$

که پارامترهای a، b و c حقیقی هستند و $z = x + iy$. یک مسئله طبیعی بررسی تعداد سیکل های حدی منشعب شده از طوق تناوبی این پنج رده از دستگاهها تحت اختلال های کوچک از درجه دو است. برای رده ی همیلتونی Q_3^H، این مسئله بطور کامل توسط گاوریلف[2] در سال ۲۰۰۱ و چن[3] وهمکاران در سال ۲۰۰۶ حل شده است. زولادک[4] در سال ۱۹۹۴ و ایلیف[5] در سال ۱۹۹۸ یک تخمین درباره تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی رده های Q_3^R، Q_4 و Q_3^{LV} با دو مرکز تحت اختلال های کوچک از درجه دو بوجود می آید را ارائه کردند. اخیرا، با استفاده از ایده گاوریلف ، ژائو[6] در سال ۲۰۱۱ ثابت کرد تحت اختلال درجه دو تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی Q_4 منشعب می شوند کوچکتر یا مساوی ۵ است. تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از

[1] ILiev [2] Gavrilov [3] Chen [4] Zoladek [5] Iliev [6] Zhao

طوق تناوبی بعضی از رده های کلی Q_{3}^{LV} تحت اختلال از درجه دو منشعب می شود توسط زولادک مطالعه شده است. اختلال از درجه دو چندین رده از دستگاههای لاتکا ـ ولترای برگشت پذیر توسط ایلیف در سال ۱۹۹۶، للیبره[1] در سال ۲۰۰۹، گرائو[2] و شائو[3] در سال ۲۰۱۱ بررسی شده اند. در این پایان‌نامه قصد داریم حالت‌هایی از دستگاه‌های دسته دوم یعنی دستگاههای چندجمله ای برگشت پذیر از درجه دو با حداقل یک مرکز را تحت اختلال چند جمله ای از درجه دو در نظر بگیریم. این دستگاههای برگشت پذیر در هر ناحیه فشرده از طوق تناوبی می توانند حداکثر چهار سیکل حدی داشته باشند. اگر چهار سیکل حدی داشته باشند آنگاه توزیع آنها (۳,۱) است، به این معنی که سه سیکل حدی بصورت تودرتو یک مرکز را احاطه می کنند و سیکل حدی دیگر مرکز متفاوت را احاطه می کند. زولادک در [۵۸] اشاره می کند که بررسی سیکل های حدی حالت برگشت پذیر پیچیده تر است، همان طور که در بالا ذکر شد در مختصات مختلط، دستگاههای برگشت پذیر از درجه دو با دو مرکز، به شکل زیر هستند:

$$\dot{z} = -iz + az^{2} + 2|z|^{2} + b\overline{z}^{2}\ , \qquad a, b \in \mathbb{R}, z = x + iy. \tag{۷.۱}$$

با استفاده از اصطلاحات فنی در [۱۷]، مرکز هایی که مدارهای تناوبی آنها منحنی های بیضوی هستند را مرکز های از دسته یک می نامند. قضیه یک از [۱۷]، نشان می دهد که دستگاه (۷.۱) دارای یک مرکز از دسته یک است اگر و تنها اگر a, b در یکی از ۱۸ شرط زیر صدق کنند:

$(r1)\ \ a = 2b + 1$	$(r2)\ \ a = -1$	$(r3)\ \ a = 5b + 4\ (b \neq -3)$
$(r4)\ \ a = -3b - 4\ (b \neq -3)$	$(r5)\ \ a = \frac{5}{3}b + \frac{2}{3}$	$(r6)\ \ a = \frac{b}{3} - \frac{2}{3}$
$(r7)\ \ (a, b) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$(r8)\ \ (a, b) = (-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$	$(r9)\ \ (a, b) = (-8, -2)$
$(r10)\ \ (a, b) = (4, -2)$	$(r11)\ \ (-17, -5)$	$(r12)\ \ (a, b) = (7, -5)$
$(r13)\ \ (a, b) = (-7, -\frac{5}{3})$	$(r14)\ \ (a, b) = (\frac{11}{3}, -\frac{5}{3})$	$(r15)\ \ (a, b) = (-23, -7)$
$(r16)\ \ (a, b) = (9, -7)$	$(r17)\ \ (a, b) = (13, 5)$	$(r18)\ \ (a, b) = (-3, 5)$

تاکنون درباره ی تعداد ماکزیمم سیکل های حدی منشعب شده از طوق تناوبی این سیستم ها نتایج زیر بدست آمده اند. خانواده $(r1)$، با کارهای انجام شده توسط پونترياگين[4] (۱۹۳۴)، دمورتیر[5] و همکاران (۱۹۹۷)، یو[6] (۲۰۰۲)، ایلیف و همکاران (۲۰۰۵)، للیبره (۲۰۰۹) و ژائو (۲۰۱۱) و خانواده $(r2)$ (مورد همیلتونی برگشت پذیر) با کارهای گاوریلف (۲۰۰۱) و چن و همکاران (۲۰۰۶) بطور کامل مطالعه شده اند. مطالعه کامل خانواده $(r3)$ توسط لیانگ[7] و همکاران (۲۰۱۰) و مطالعه خانواده $(r4)$ با $a \in (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ و $a \in (-3, -1)$ توسط کُل[8] (۲۰۰۹) انجام گرفته است. خانواده $(r5)$ با $b \neq 2, \frac{1}{2}$ و خانواده $(r6)$ با $b \in (\frac{1}{2}, 2)$ توسط چن و همکاران (۲۰۰۶) مطالعه شده اند، موارد $(r7)$، $(r14)$، $(r15)$ و $(r17)$ توسط گرائو در (۲۰۱۱) و موارد $(r8)$، $(r13)$ و

[1] Llibre [2] Grau [3] Shao [4] Pontryagin [5] Dumortier [6] Yu [7] Liang [8] Coll

($r16$) توسط چن و همکاران (۲۰۱۱) مطالعه شده اند. موارد ($r9$)، ($r10$) و ($r12$) بترتیب توسط پنگ[1] و همکاران (۲۰۱۱)، ایلیف (۱۹۹۷) و پنگ در (۲۰۱۱) مطالعه شده اند. موارد ($r11$) و ($r18$) نیز توسط گوتیر[2] و همکاران در سال ۲۰۰۹ مورد مطالعه قرار گرفته اند [۳۶].

در این پایان‌نامه قصد داریم تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی دستگاه (۷.۱) تحت اختلال از درجه دو منشعب می شوند را برای شرط ($r3$) و ($r4$) به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای a و b، مورد بررسی قرار دهیم. با تغییر متغیر $z = x + iy$ و $t \to -t$، دستگاه (۷.۱) در مختصات دکارتی بصورت زیر نوشته میشود

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - (a+b+2)x^2 + (a+b-2)y^2, \\ \dot{y} = x - 2(a-b)xy. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

اگر $c = a - b \neq 0$ آنگاه با تغییر متغیر $(x,y) \mapsto (\frac{x}{c}, \frac{y}{c})$ و تغییر پارامتر های $(a,b) \mapsto (-\frac{a+b+2}{a-b}, \frac{a+b-2}{a-b})$ دستگاه زیر حاصل می شود

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax^2 + by^2, \\ \dot{y} = x(1-2y). \end{cases} \tag{۹.۱}$$

حال با تغییر مختصات‌ها زیر و تغییر مقیاس زیر

$$x = \frac{1}{2}\overline{x} \qquad , \; y = -\frac{1}{2}(\overline{y} - 1) \qquad , \; t = 2\overline{t}.$$

و باز نویسی (x, y, t) به جای $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t})$، دستگاههای برگشت پذیر از درجه دو به فرم زیر حاصل می شوند.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 + by^2 - 2(b-1)y + (b-2), \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

حال دستگاه (۱۰.۱) را به ازای $a = -\frac{3}{2}$ و $0 < b < 2$، با $b \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ در نظر می‌گیریم که همراه با نتایج بدست آمده توسط لیانگ و ژائو در سال ۲۰۱۰ مطالعه ی مورد ($r3$) برای $a = -\frac{3}{2}$ بجز حالتی که $b = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$، کامل می شود. برای $a = -\frac{3}{2}$ و $0 < b < 2$ دستگاه (۱۰.۱) دارای دو مرکز در $(0, 1)$ و $(0, -\frac{(2-b)}{b})$ و یک خط پایای $y = 0$ است. ما در فصل سوم این پایان‌نامه شرط ($r3$) را برای $a = -\frac{3}{2}$ و $0 < b < 2$ و $b \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ بررسی می‌کنیم و نتایج زیر را بدست می آوریم:

قضیه ۳.۰.۱ تحت اختلال از درجه ی دو، اگر $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{2}$ آنگاه تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از هر طوق

[1] Peng [2] Gautier

تناوبی منشعب می شود برابر دو است و تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از دو طوق تناوبی منشعب می شوند برابر سه است.

قضیه ۴.۰.۱ تحت اختلال درجه دو، اگر $0 < b < \frac{1}{2}$ ($2 < b < \frac{3}{2}$) آنگاه:

(۱) تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی اطراف مرکز $(0, 1)$ منشعب می شوند برابر سه است (برابر یک است) و تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی اطراف مرکز $(0, -\frac{(2-b)}{b})$ منشعب می شوند برابر یک است(برابر سه است)

(۲) تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از دو طوق تناوبی منشعب می شوند برابر چهار است واگر چهار سیکل حدی وجود داشته باشند توزیع سیکل‌های حدی $(3, 1)$، $((1, 3))$ است.

برای مورد $(r4)$ یعنی $(b \neq -3)$ $a = -3b - 4$، با جایگذاری در (۷.۱) بدست می آوریم

$$\dot{z} = -iz + az^2 + 2|z|^2 - \frac{a+4}{3}\bar{z}^2. \tag{۱۱.۱}$$

که با باز نویسی این دستگاه در مختصات دکارتی و اختلال درجه دو آن، فرم زیر حاصل می شود

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{2}{3}(a+1)x^2 - \frac{2}{3}(a-5)y^2 + \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = -x + \frac{8}{3}(a+1)xy + \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{cases} \tag{۱۲.۱}$$

تعداد ماکزیمم سیکل های حدی (۱۲.۱) تحت اختلال کوچک از درجه دو، توسط گوتیر و ایلیف تخمین زده شده که برای $4 < a < 5$، برابر سه و در دیگر موارد برابر دو است. اگر $a = -1$ آنگاه (۱۲.۱) متعلق به $(r2)$ است. اگر $a = 5$ آنگاه (۱۲.۱) متناظر با یک جفت مرکز هم‌آهنگ است. اختلال های دستگاههای چندجمله ای درجه دو با مرکز های هم‌آهنگ توسط چیکن[1] در ۱۹۹۱ مورد مطالعه قرارگرفته اند. در فصل چهارم حالت های باقیمانده $(r4)$ را بجز برای $a = -3$، بررسی می کنیم که نتایج زیر حاصل می شوند.

قضیه ۵.۰.۱ تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی (۱۲.۱) تحت اختلال کوچک از درجه دو حاصل می شود برای $4 < a < 5$ برابر سه و برای $-1 < a \leq 4$ برابر دو است.

با ترکیب قضیه ی ۵.۰.۱ با نتایج بدست آمده توسط چیکن (۱۹۹۱)، گاوریلف (۲۰۰۱) و چن و همکاران در سال ۲۰۰۶ قضیه‌ی زیر حاصل می شود.

[1] Chicone

قضیه ۶.۰.۱ فرض کنید $a \neq -3$، آنگاه تعداد ماکزیمم سیکل های حدی که از طوق تناوبی (۱۲.۱) تحت اختلال کوچک از درجه دو منشعب می شوند برای $4 < a < 5$، برابر سه و برای موارد دیگر برابر دو است.

فصل ۲

مفاهیم کلی

در این بخش مروری بر برخی مفاهیم، تعاریف و قضایای مورد نیاز در طول پایان‌نامه خواهیم داشت. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۶۳]، [۴۳] و [۸] هستند.

تعریف ۷.۰.۲ هر نگاشت $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، که به هر نقطه‌ی $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ یک بردار $F(X)\in\mathbb{R}^2$ متناظر می‌کند یک میدان برداری نامیده می‌شود. در حالت خاص، یک میدان برداری چندجمله‌ای به صورت $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ تعریف می‌شود، که در آن P و Q چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y هستند. ▲

تعریف ۸.۰.۲ هر دستگاه معادلات دیفراسیل چندجمله‌ای مسطح به شکل

$$\dot{x}=P(x,y),\qquad \dot{y}=Q(x,y). \tag{۱.۲}$$

که در آن "·" نمایش‌گر مشتق‌گیری نسبت به متغیر مستقل t است و Pو Q چندجمله‌هایی بر حسب x و y هستند، یک دستگاه دینامیکی چندجمله‌ای مسطح نامیده می‌شود. ▲

در متون مختلف مدل‌های متفاوت و معادل با این دستگاه معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای ارایه شده است: یک مدل ارایه دستگاه به صورت یک میدان برداری $\chi=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$ و دیگری نمایش آن به صورت یک فرم دیفرانسیلی $\omega=Qdx-Pdy$ است.

تعریف ۹.۰.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\dot{X}=f(\lambda,t,X). \tag{۲.۲}$$

را در نظر بگیرید که در آن $r\geq 1$ و $f\in C^r(\Lambda\times\mathbb{U},\mathbb{R}^m)$ (r بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر)، $\mathbb{U}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی باز و Λ زیر مجموعه باز Λ از $\mathbb{R}^m$ است. هرگاه در دستگاه (۲.۲) تابع f به طور صریح به t بستگی