بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه محقق اردبیلی
۱۳۵۷
دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان پایان نامه

همگرایی روش فوق تخفیف شتاب داده شده تعمیم‌یافته برای دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب غالب قطری اکید

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

پژوهشگر

آمنه آذرنژاد حسن‌کیاده

پاییز ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر.

توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

آنان که فروغ نگاه‌شان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است.

آنان که راستی قامتم در شکستی قامتشان تجلی یافت.

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌زنم

و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستشان بوسه می‌زنم.

و تقدیم به

خواهر مهربان و برادران عزیزم

آنان که وجودشان آرامش دلم، عطر نفس‌هایشان طنین زندگی‌ام

و بهار زندگی‌ام به ترنم محبتشان آکنده

و حضور همیشگی‌شان تسلی‌بخش لحظه‌های تنهاییم است.

تقدیر و تشکر:

کاش می‌شد که از خدا تقدیر کرد فرصت تمجید را تمدید کرد

ای بینای داور و ای توانای بی‌یاور، سپاس و ستایش بیکران تو را که توش و توان و همتم هدیه کردی. به حرمت آن نام که لایق آنی و حرمت آن بنده که شایق آنی، یاریم کن تا عمر نسپرم به نادانی.

سپاس تو راست که بالاتر از همه اندیشه‌هایی،

یا رب

در پیشگاه با عظمت تو سجده نیاز به جای می‌آورم و چشم امید به سوی تو دارم که هرگز به خود وانگذاریم و همواره از لغزش‌ها مصون داریم.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه، به خاطر تمامی مساعدتهای بی‌دریغ‌شان در پیشبرد امر پایان‌نامه سپاسگزارم. پشتوانه علمی و عشق و علاقه ایشان به کار که من در کمتر کسی سراغ دارم، همواره برای من انگیزه بخش و امید آفرین بوده است.

از جناب آقای دکتر عبداله برهانی‌فر، داور داخلی و جناب آقای دکتر جمال صفار اردبیلی، داور خارجی که قبول زحمت نموده و مرا در بازخوانی این پایان‌نامه یاری کرده‌اند، سپاسگزارم.

از تمامی دوستانم که در این مدت، مرا در شادی‌هایشان سهیم نمودها ند و ایام بودن در کنارشان، جزو بهترین روزهای عمر من است، بسیار ممنون و متشکرم.

از خانواده گرانقدرم به خصوص پدر و مادر بزرگوارم که همراهی‌شان همواره موجب دلگرمی من است، بسیار ممنونم و محبتهای بی‌دریغ‌شان را ارج می‌نهم.

آمنه آذرنژاد حسن‌کیاده

مهر ۱۳۹۰

نام خانوادگی: آذرنژاد حسن‌کیاده **نام:** آمنه

عنوان پایان نامه :

همگرایی روش تعمیم یافته AOR برای دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب غالب قطری اکید

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۷/۲۷ **تعداد صفحه:** ۸۲

کلید واژه‌ها :
روش GAOR، شعاع طیفی، همگرایی، روش GAOR پیش شرط‌سازی شده، مسأله کمترین مربعات وزن‌دار

چکیده:
در این پایان نامه، روش تعمیم‌یافته‌ی AOR (GAOR) برای حل مسائل کمترین مربعات وزن‌دار معرفی و همگرایی آن برای این گونه مسائل با ماتریس ضرایب غالب قطری اکید بررسی می‌شوند. همچنین روش GAOR پیش شرط‌سازی شده برای مسایل کمترین مربعات وزن‌دار ارائه شده و شعاع طیفی ماتریس تکرار روش GAOR پیش شرط‌سازی شده با ماتریس تکرار روش GAOR بدون پیش‌شرط سازی شده مقایسه می‌شود. سپس، همگرایی روش GAOR برای حل مسائل کمترین مربعات وزن‌دار با ماتریس ضرایب $\alpha-$ غالب قطری اکید بررسی می‌شود. چندین مثال عددی برای بررسی کارایی روش‌ها ارائه می‌شود.

فهرست مندرجات

لیست جداول

پیش گفتار

حل مسأله کمترین مربعات یکی از مسایل مهم علوم و مهندسی است. مسأله کمترین مربعات تعمیم‌یافته زیر را در نظر بگیرید

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} (Ax-b)^T W^{-1}(Ax-b),$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{R}^m$ و W یک ماتریس معین مثبت متقارن می‌باشد. می‌توان دید که حل این مسأله منجر به حل دستگاه

$$Hy = f, \tag{۱.۰}$$

می‌شود که در آن H یک ماتریس نامنفرد و به صورت زیر می‌باشد

$$H = \begin{pmatrix} I - B_1 & D \\ C & I - B_2 \end{pmatrix}.$$

اگر ماتریس‌های $I - B_i$، $i = 1, 2$ نامنفرد باشند، می‌توانیم روش‌های SOR [۱۸] یا AOR [۵] را برای حل دستگاه (۱.۰) به کار ببریم. اما اگر ماتریس‌های $I - B_i$، $i = 1, 2$ منفرد باشند از این دو الگوریم نمی‌توان استفاده کرد. برای رفع این مشکل و همچنین کنترل اینکه آیا $I - B_i$، $i = 1, 2$ برای ماتریس‌های تُنُک بزرگ نامنفرد است یا نه، روش تعمیم‌یافته‌ی SOR (GSOR) به وسیله یوان[1] [۱۶] برای حل دستگاه معادلات خطی (۱.۰) پیشنهاد شده است. یوان و جین[2] [۱۷]، روش تعمیم‌یافته‌ی AOR (GAOR) را برای حل معادله (۱.۰) پیشنهاد دادند. در این پایان نامه این الگوریتم و بعضی از نتایج مربوطه که توسط تیان[3] و همکارانش در [۱۱] ارائه شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[1] Yuan
[2] Jin
[3] Tian

سرعت همگرایی روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی $Hy = f$ تحت تأثیر شعاع طیفی ماتریس تکرار آن روش قرار دارد. یکی از روش‌های بهبود بخشیدن سرعت همگرایی روش‌های تکراری، استفاده از ماتریس‌های پیش شرط‌ساز می‌باشد. پیش شرط‌سازها، دستگاه $Hy = f$ را به دستگاهی معادل تبدیل می‌کنند (دستگاه پیش شرط‌سازی شده) به طوری که ماتریس تکرار روش پیش شرط‌سازی شده شعاع طیفی کوچکتری را داشته باشد. سانگ[۱] و همکارانش [۱۴] روش GAOR پیش شرط‌سازی شده با چند پیش شرط‌ساز مختلف را برای حل دستگاه (۱.۰) به کار بردند. در این پایان نامه این پیش شرط‌سازها را نیز مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

این پایان نامه از فصل‌های زیر تشکیل شده است. در فصل اول، بعضی از تعاریف و قضایای که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم. در فصل دوم، روش‌های تکراری برونیابی شده، روش‌های تکراری AOR و تعمیم‌یافته‌ی AOR معرفی می‌شوند. سپس همگرایی روش GAOR را مورد بحث قرار می‌دهیم و نتایج عددی حاصل از به کارگیری این روش را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین به مقایسه‌ی کران‌هایی برای شعاع طیفی ماتریس تکرار GAOR که توسط تیان و همکارانش [۱۱] و همچنین درویشی[۲] و حصاری[۳] [۳] پیشنهاد شده‌اند، می‌پردازیم. در فصل سوم، روش GAOR پیش شرط‌سازی شده را بیان و شعاع طیفی ماتریس‌های تکرار روش پیش شرط‌سازی شده و ماتریس روش GAOR را مقایسه می‌کنیم و نتایج عددی این روش با روش GAOR را مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم، همگرایی روش تعمیم‌یافته GAOR برای ماتریس‌های α—غالب قطری اکید را بررسی می‌کنیم و نتایج عددی حاصل از به کارگیری این روش را مورد بحث قرار می‌دهیم.

---
[۱] Song
[۲] Darvishi
[۳] Hessari

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس مربعی A متناظر به بردار ویژه x است، هرگاه $Ax = \lambda x$ و $x \neq 0$. در این صورت زوج مرتب $(\lambda\ ,\ x)$ را یک زوج ویژه‌ی A گویند.

تعریف ۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت چندجمله‌ای مشخصه‌ی A را به صورت زیر

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

تعریف می‌کنند. می‌توان دید که P یک چند جمله‌ای از درجه n است. ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه A می‌باشند. بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدرمطلق را، شعاع طیفی ماتریس A گویند و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \ \sigma(A)} |\lambda| ,$$

که در آن $\sigma(A)$ مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد و به آن طیف ماتریس A گویند.

تعریف ۳.۱ ترانهاده‌ی ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را با A^T نشان می‌دهیم و (i,j) امین درایه‌ی آن برابر با درایه‌ی (j,i) ام ماتریس A است، یعنی $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. ماتریس A را متقارن گویند هرگاه $A = A^T$. اگر $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه ترانهاده‌ی هرمیتی آن را با A^H نشان می‌دهیم و درایه‌ی (i,j) ام آن برابر است با مزدوج درایه‌ی (j,i) ام ماتریس A، یعنی $(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. ماتریس A را هرمیتی گویند هرگاه $A = A^H$.

تعریف ۴.۱ فرض کنید $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $\pi : N \to N$ یک نگاشت یک به یک باشد، یعنی π یک جایگشت باشد. ماتریس $n \times n$، $P = (p_{ij})$ را یک ماتریس جایگشت گویند هرگاه جایگشتی مثل π موجود باشد به طوری که

$$p_{ij} = \begin{cases} ۱, & j = \pi(i), \\ ۰, & j \neq \pi(i). \end{cases}$$

توجه کنید که هر سطر و ستون ماتریس P دقیقاً یک درایه‌ی غیر صفر(برابر با ۱) دارد. اگر از سمت چپ (راست) ماتریس مربعی A را در ماتریس جایگشت P ضرب کنیم، سطرهای (ستون‌های) A را مطابق جایگشت π جابه‌جا می‌کند.

تعریف ۵.۱ فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{n\times n}$). در این صورت

- ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی گویند، هرگاه برای هر $i \geq j$ $(i \leq j)$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$. به طریق مشابه ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی اکید گویند، هرگاه برای هر $i > j$ $(i < j)$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$.

- A را یک ماتریس قطری گویند، هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$. ماتریس قطری A را به صورت $A = \mathrm{diag}(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn})$ نشان می‌دهند.

- ماتریس A را همانی گویند، هرگاه $A = I = (\delta_{ij})$ که δ_{ij} را دلتای کرونکر می‌گویند.

- ماتریس A را نامنفرد گویند، هرگاه $\det(A) \neq ۰$ و آن را منفرد گویند، هرگاه داشته باشیم $\det(A) = ۰$.

تعریف ۶.۱ ماتریس A را تحویل پذیر گویند، هرگاه ماتریس جایگشتی مثل P وجود داشته باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{pmatrix},$$

که در آن $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$ ماتریس‌های مربعی هستند. در غیر این صورت A را تحویل ناپذیر گویند.

مثال ۱.۱ ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

تحویل پذیر است. زیرا اگر قرار دهیم

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

آنگاه

$$PAP^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۷.۱ ماتریس $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ را

- غالب قطری ضعیف گوییم، اگر داشته باشیم

$$|a_{jj}|\geq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|,\qquad j=1,\dots,n.$$

- غالب قطری اکید است، هرگاه

$$|a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|,\qquad j=1,\dots,n.$$

- غالب قطری تحویل ناپذیر نامیم، اگر A تحویل ناپذیر باشد،

$$|a_{jj}|\geq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|,\qquad j=1,\dots,n,$$

و بعلاوه نامساوی بالا حداقل برای یک j اکید باشد.

تعریف ۸.۱ فرض کنید $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ماتریس $A = (a_{ij})$ را نامنفی (مثبت) گوییم و با $A \geq 0$ ($A > 0$) نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$). گوییم A کوچکتر یا مساوی B (A کوچکتر از B) است و با $A \leq B$ ($A < B$) نشان می‌دهیم هرگاه $B - A \geq 0$ ($B - A > 0$).

مثال ۲.۱ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

در این جا $B \geq 0$، اما با وجود اینکه بعضی از درایه‌های A مثبت اند، $A \not\geq 0$. بعلاوه داریم $A \leq B$.

تعریف ۹.۱ یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی یا مختلط V، تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V اسکالر حقیقی یا مختلط (x, y) نسبت داده می‌شود، به طوری که در شرایط زیر صدق کند

(الف) (x, x) حقیقی باشد و $(x, x) \geq 0$. بعلاوه $(x, x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(ب) برای هر اسکالر α، $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$،

(ج) برای هر $z \in V$، $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$،

(د) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

هر فضای برداری حقیقی یا مختلط که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد، یک فضای حاصل ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱ ضرب داخلی استاندارد برای دو بردار

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T, \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T,$$

را با (u,v) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(u,v) = u^H v = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i \,.$$

تعریف **۱۱.۱** یک نرم برداری روی فضای حقیقی یا مختلط V، تابع‌ای است مثل $\|.\|$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند

(الف) به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$. بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

هر ضرب داخلی، مانند ضرب داخلی استاندارد تعریف شده در تعریف ۱۰.۱ روی فضای برداری، یک نرم تولید می‌کند. کافی است برای ضرب داخلی $(.\,,.)$ قرار دهیم $\|.\| = (.\,,.)^{1/2}$. نرم‌های برداری متداول و پر کاربرد در جبرخطی، حالت‌های خاصی از نرم هلدر

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p},$$

می‌باشند. در حالت‌های $p = 1$، $p = 2$ و $p = \infty$ نرم‌های مهم زیر تولید می‌شوند

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

تعریف **۱۲.۱** یک نرم ماتریسی روی $\mathbb{C}^{m\times n}$ تابع‌ای است از $\mathbb{C}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند

(الف) به ازای هر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A\| \geq 0$. بعلاوه $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$؛

(ج) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (نامساوی مثلث).

تعریف ۱۳.۱ (نرم طبیعی یا نرم القایی) فرض کنید $\|.\|$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. در این صورت نرم طبیعی متناظر با این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|A\| = \max_{\|x\|} \|Ax\|.$$

تعریف ۱۴.۱ ماتریس A را همگرا گوییم، هرگاه $\lim_{m\to\infty} A^m$ موجود و برابر با صفر باشد.

تعریف ۱۵.۱ گوییم نرم ماتریس $\|.\|$ روی $\mathbb{C}^{n\times n}$ خاصیت ضربی دارد، هرگاه به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$،

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

تعریف ۱۶.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ را معین مثبت هرمیتی گوییم، هرگاه

(الف) $A^H = A$ (A هرمیتی باشد)؛

(ب) برای هر $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$، $x^H Ax > 0$.

ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی گوییم، هرگاه (الف) برقرار باشد و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H Ax \geq 0$.

ماتریس حقیقی $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را معین مثبت متقارن گوییم، هرگاه

(ج) $A^T = A$ (A متقارن باشد)؛

(د) برای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$، $x^H Ax > 0$.

ماتریس A را نیمه معین مثبت متقارن گوییم، هرگاه (ج) برقرار باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x^T Ax \geq 0$.

۲.۱ قضایا

قضیه ۱.۱ فرض کنید $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. داریم
(الف) اگر $A \leq B$ و $B \leq A$، آنگاه $A = B$. بعلاوه اگر $A \leq B$ و $B \leq C$، آنگاه $A \leq C$.
(ب) اگر ماتریس‌های A و B نامنفی (مثبت) باشند، آنگاه AB و $A + B$ نامنفی (مثبت) هستند.
(ج) اگر A نامنفی (مثبت) باشد، آنگاه A^k نیز نامنفی (مثبت) است.
(د) اگر $A \leq B$ باشد، آنگاه $A^T \leq B^T$.
(ح) اگر $0 \leq A \leq B$، آنگاه $\|A\|_1 \leq \|B\|_1$ و $\|A\|_\infty \leq \|B\|_\infty$.

برهان: به [۱۰] رجوع شود. □

قضیه ۲.۱ فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد. در این صورت برای هر نرم طبیعی $\|.\|$ داریم $|\lambda| \leq \|A\|$.

برهان: فرض کنید که $x \neq 0$ بردار ویژه ماتریس A متناظر به مقدار ویژه λ از ماتریس A باشد. در این صورت

$$\lambda x = Ax \Rightarrow |\lambda|\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|.$$

□

قضیه ۳.۱ (شکل کانونی جردن) برای هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس نامنفردی مثل T موجود است به طوری که

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix},$$

که در آن

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

λ_i، $i=1,2,\dots,r$ مقادیر ویژه‌ی A هستند و $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

برهان: به [۸] رجوع شود. □

قضیه ۴.۱ فرض کنید $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) $\lim_{m\to\infty} A^m = 0$؛

(ب) $\rho(A) < 1$؛

(ج) سری $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$ همگراست (توجه داریم که $A^0 = I$).

در هر کدام از حالت‌های فوق، ماتریس $(I-A)$ معکوس‌پذیر است و

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I-A)^{-1}.$$

برهان: (الف) $\Leftarrow$ (ب):

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0,$$

با توجه به شکل جردن ماتریس A، داریم

$$T^{-1}A^mT = \begin{pmatrix} J_1^m & & & & & \\ & J_2^m & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_i^m & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^m \end{pmatrix}.$$

یعنی $T^{-1}A^mT = J^m$. با حدگیری از طرفین این تساوی وقتی که $m\to\infty$ خواهیم داشت، $\lim_{m\to\infty} J^m = 0$. پس برای هر $1\le i\le r$، $\lim_{m\to\infty} J_i^m = 0$ و این ایجاب می‌کند که $\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m = 0$. لذا $|\lambda| < 1$ و در نتیجه $\rho(A) < 1$.

(ب) $\Leftarrow$ (ج): فرض کنید $\rho(A) < ۱$. در این صورت $|\lambda| < ۱$، که λ_iها مقادیر ویژه‌ی A هستند. از طرفی با توجه به اینکه مقادیر ویژه $I - A$ به صورت $۱ - \lambda_i$ هستند، لذا ماتریس $I - A$ نامنفرد است. قرار می‌دهیم

$$S_m = I + A + A^{۲} + \cdots + A^m.$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $I - A$، خواهیم داشت

$$(I - A)S_m = I - A^{m+۱}.$$

با توجه به نامنفرد بودن $I - A$، می‌توان نوشت

$$S_m = (I - A)^{-۱}(I - A^{m+۱}).$$

حال از طرفین رابطه‌ی بالا وقتی که $m \to \infty$ حد می‌گیریم، یعنی

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} (I - A)^{-۱}(I - A^{m+۱}).$$

اکنون با توجه به گزاره (الف)، خواهیم داشت

$$\lim_{m\to\infty} S_m = (I - A)^{-۱},$$

که اثبات را کامل می‌کند.

(ج) $\Leftarrow$ (الف): قبل از اثبات این قسمت، توجه کنید که بنابه شکل جردن ماتریس A، داریم

$$A^m = TJ^mT^{-۱} = \begin{pmatrix} J_۱^m & & & & & \\ & J_۲^m & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_i^m & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_r^m \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\lim_{m\to\infty} A^m = ۰ \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} J_i^m = ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, r.$$