دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

قضیه مقدار میانگین چندجهتی
در فضاهای باناخ

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

نفیسه صالحی نجف آبادی

استاد راهنما:

دکتر قدسیه وکیلی

۱۳۸۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی خانم نفیسه صالحی

تحت عنـوان

قضیه مقدار میانگین چند جهتی در فضاهای باناخ

در تاریخ ۸۱/۹/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر قدسیه وکیلی
۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۳ـ استاد داور ۱	دکتر جعفر زعفرانی
۴ـ استاد داور ۲	دکتر رسول نصر اصفهانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر بیژن طائری

۴۸۱۹۲

قدردانی

در این‌جا لازم است از کلیه‌ی افرادی که مرا در انجام این پروژه کمک نموده‌اند، خصوصاً استاد گرامی خانم دکتر قدسیه وکیلی که در تمام مراحل انجام این پروژه با مساعدت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و

همسر فداکارم

فهرست مطالب

عنوان صفحه

چکیده:

اخیراً F.H.Clark و Y-Ledyaev یک قضیه مقدار میانگین رابرای توابع نیم پیوسته پایینی بر فضاهای هیلبرت بدست آورده‌اند.نتیجه‌ای از این قضیه‌که کار اصلی این رساله است [۱]، به کاربردهای مفیدی منتهی می شود.
درفصل چهارم‌این رساله‌این نتیجه رابه گونه‌ای برای توابع موضعاً لیپ شیتز در فضاهای باناخی که تابع لبه دار[۱] پیوسته لیپ شیتزی از ردهٔ C^1 روی آنهاموجود باشد ، یعنی توابعی که در شرط C^1 ـلیپ‌شیتزپیوسته لبه‌دار صدق می کنند،گسترش می دهیم.

---
[۱] bump function

فصل اول
مقدمه

این فصل شامل دو بخش است در بخش اول این فصل مقدمه ای از آنالیز نا هموار رادر مورد زیر مشتق‌های فرعی که یکی از مبا حث اصلی این رساله است ودر ادامه بحث از این مفهوم بسیار استفاده خواهیم کرد،را بیان می کنیم‌ودر بخش دوم این فصل مقدمه این رساله یعنی مقدمه ای در مورد قضیه مقدار میانگین چند جهتی در فضاهای باناخ را بیان می کنیم.

۱ — ۱ زیر مشتق های فرعی

کشف کامل مفهوم حساب دیفرانسیل توسط فرما[۱] (۱۶۰۱ — ۱۶۵۵) صورت گرفته‌است ،کسی که‌یکی از مهمترین نوآوران درتاریخ ریاضیات بوده است .در واقع قانون مشخص کردن نقاط اکسترمم یکی از کارهای اوست که بدون اثبات دریک ادعای کوتاهی در سال ۱۶۳۷ عنوان کرده است .اهمیت کشفیات او در نظریه اعداد،خدماتی که این شخص استثنایی ،فروتن وبرجسته‌برای ریاضیات انجام داده است را تحت الشعاع قرار داده است .علاوه بر این او اولین کسی بود که "اصل حداقل زمان " [۲] را درایتیک بدست آورد. او همچنین اصول تغییرات حاکم بر قوانین بسیارزیادی ازعلوم فیزیک ومکانیک را نیز بدست آورده است .فرما به طور مستقل از دکارت [۳] خیلی از مطالب هندسه تحلیلی وبه طور مستقل ازپاسکال [۴] خیلی ازمطالب نظریه‌احتمالات را بدست آورده است. کارهای بزرگ او در نظریه اعداد بر روی بقیه کارهایش سایه افکنده است ،به عنوان مثال قضیه آخر فرماکه برای مدت طولانی به عنوان یک نظریه بی همتا باقی مانده بود وکسی نتوانسته بوداثباتی برای آن ارائه دهد،اگر چه فرمااثبات ساده‌ای برای آن ادعاکرده بود.نوشته ها ومقالات او به فرانسه ولاتین وایتالیایی واسپانیایی جزئی‌ازدانش یونانی اوست .نکته قابل توجه اینجاست که او فرصت کافی برای این کارهاراعلاوه بر وظایفش به عنوان مشاور پارلمان مجلس تولوس [۵] می یافت.

فرما هرگز مفهوم مشتق رانمی دانست این مفهوم بعدها توسط نیوتن [۶] در سال ۱۶۷۱ وتوسط لایپ نیتز [۷] در سال ۱۶۸۴ در حساب دیفرانسیل تحت عنوان روشهای مقدماتی برای ماکزیمم ومینیمم تعریف شد.نیوتن به وضوح می دانست که از روش مماس ساختن که توسط فرما در نیم قرن قبل ارائه شده بوداستفاده کرده است.

بعلاوه فر ما کسی بودکه در یافت، مشتق یک چند جمله ای صفر می شود ،وقتی که نقطه اکسترمم رخ دهد. (این قاعده‌فرما بعنوان استراتژی اساسی بهینه سازی [۸] است واز این قاعده برای محاسبه‌تغییرات در کنترل‌بهینه [۹] استفاده می شود.)

شباهت بین روش فرما(محدود به توابع جبری) وروش لایپ نیتز فوق العاده است ، زیرا همانطورکه

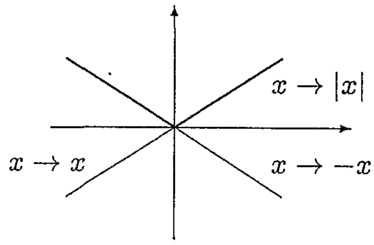
---

[۱] Pierre de Fermat
[۲] principle of least time
[۳] Descartes
[۴] Pascal
[۵] Toulouse
[۶] Newton
[۷] Leibniz
[۸] optimality
[۹] optimal control

می دانید،این قاعده برای پیدا کردن اکسترممهای تابعی مانند f است که از میان جوابهای معادله $f'(x) = 0$ بدست می آید.

این قاعده در نظریه بهینه سازی ،نظریه محاسبه تغییرات و(حالا)نظریه کنترل بهینه در طی سه قرن تعمیم داده شده است .توسعه این کاربردها توسط ریاضیدانان زیادی با کارهای مهم اویلر [۱۰] (قرنهجدهم)لاگرانژ [۱۱] وژاکوبی [۱۲] (قرننوزدهم) وپوانکاره [۱۳] وهیلبرت [۱۴](در اوایل قرن اخیر) انجام شد. نتایج جدیدی را که ما می خواهیم بیان کنیم پیچیده نیست چون یک پروسه علمی می تواند خیلی مفیدولی ساده باشد.

مفهوم تابع‌چند متغیره مشتق پذیرتوسط ژاکوبی ومفهوم مشتق پذیری توابع روی فضاهای نر مدار توسط فرشه [۱۵] وگاتکس [۱۶] عنوان شد.قانون فرماولایپ نیتزاین نکته ، که اگر f در نقطه ای مینیمم داشته باشد گرادیان f در آن نقطه صفر است،را تأیید می کند.دلایل زیادی وجود دارد که ما نباید دراینجا توقف کنیم . یکی از دلایل این است که ما ممکن است بخواهیم توابعی را کمینه کنیم که مشتق پذیر نیستند.در نظریه بهینه‌سازی ،نظریه بازی وغیره با چنین توابعی برخورد می کنیم .چون نقاط بیشینه وکمینه ممکن است در نقاطی‌از تابع رخ دهدکه مشتق درآن نقاط موجود نیست ،بعنوان مثال تابع $x \to |x|$ در نقطه $x = 0$ را ذکر می کنیم، این تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر نیست ولی می توان در این نقطه یک پوش بالایی از مشتق را بوسیله توابع مشتق پذیر $x \to ax$ ، $a \in [-1, 1]$ بدست آورد.

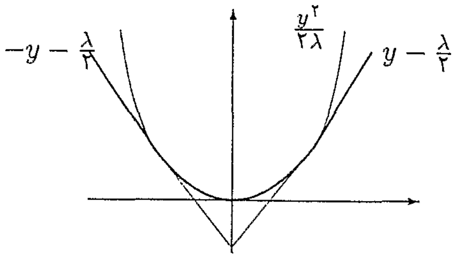


مامکن است در مورد توابعی که در یک نقطه منحصر به فرد مشتق پذیر نیستندنگران باشیم همانطوری که دیگران قبل از ما نگران این مسأله بودند.این نگرانی بیشتر می شود وقتی که ببینیم توابع محدب نیم پیوسته پایینی ممکن است بوسیله توابع مشتق پذیر تخمین زده شوند.برای مثال تابع $x \to |x|$

[۱۰] Euler
[۱۱] Lagrange
[۱۲] Jacobi
[۱۳] Poincare
[۱۴] Hilbert
[۱۵] Frechet
[۱۶] Gateaux

ممکن است بوسیله توابع f_λ که به صورت زیر تعریف می شوند ،تخمین زده شود.

$$f_\lambda(y) = \begin{cases} -y - \frac{\lambda}{۲} & y \leq -\lambda \\ \frac{y^۲}{۲\lambda} & |y| \leq \lambda \\ y - \frac{\lambda}{۲} & y \geq \lambda \end{cases}$$



نکته جالب توجه اینجاست که تابع $x \to |x|$ دارای مقدار مینیمم درنقطه صفر است ،در حالیکه تابع $x \to |x|$ دراین نقطه مشتق پذیر نیست بنابراین قانون فرما دراین مورد پاسخگو نیست .چه کاری می توان انجام داد ؟برای رفع این مشکل به قانون فرما رجوع می کنیم ومفهوم گرادیان را با تغییراتی به طور مناسب تعمیم می دهیم. برای در یافت بهتر این مطلب تابع $x \to |x|$ را در نقطه $x = ۰$ بررسی می کنیم . برای تابع $x \to |x|$ پوش بالایی توابع $x \to ax$ موجود است که مشتقاتشان در نقطه صفر برابر a است که $a \in [-۱, ۱]$ تغییر می کند ،برای اینکه نخواهیم مجموعه $[-۱, ۱]$ را در نظر بگیریم باید ببینیم که کدامیک از این مشتق ها را بعنوان نماینده اختیار کنیم ؟برای پیدا کردن راه حل طبیعی این مسأله چند مقداری باید کمی مکث کنیم وجرئت انجام تغییراتی را داشته باشیم. در واقع فرمول فرما به گونه ای در اینجا معتبر باقی می ماندچون

$$۰ \in [-۱, ۱] .$$

چون دیده شده است که هر تابع نیم پیوسته پایینی محدب پوش بالایی توابع پیوسته آفین $x \to \langle p, x\rangle - f^*(x)$ است ،که آنرا کاهش می دهدپس ما مجموعه تمام گرادیانهای p از آن توابع آفین را که از نقطه $(x_۰, f(x_۰))$ می گذرند را در نظر می گیریم ،به عبارت دیگر مجموعه تمام p هایی که :

$$\langle p, x_۰\rangle - f^*(p) = f(x_۰) ,$$

را در نظر می گیریم .

در بافت این نظریه ما این مجموعه را محدب،بسته واحتمالاًتهی اختیار می کنیم وآنرا زیر مشتق f در نقطه $x_۰$ می نامیم و با نماد $\partial_f(x_۰)$ نمایش می دهیم .

اگر فقط یک تابع آفین (مماس)موجود باشد آنگاه $\partial_f(x_\circ)$ بصورت گرادیان معمولی تابع f در نقطه $x_\circ$ می شودیعنی: $\partial_f(x_\circ) = \{\nabla_f(x_\circ)\}$.

می توان ثابت کرد که قانون فرما در این مورد نیز درست است: $\bar{x}$ کمترین مقدار تابع نابدیهی محدب ونیم پیوسته f است اگر وتنها اگر $\circ \in \partial_f(\bar{x})$.

برای بهره برداری از این مطلب ،باید حساب زیر مشتق را به طورمشابه به حساب دیفرانسیل معمولی گسترش دهیم .برای مثال ما شرایطی رابیان خواهیم کرد که تحت آن فرمولهای زیر درست باشند.

$$\begin{aligned}
\partial_{(f+g)}(x_\circ) &= \partial_f(x_\circ) + \partial_g(x_\circ) \\
\partial_{(f\circ A)}(x_\circ) &= A^*\partial_f(Ax_\circ) \\
\partial_{(\sup\limits_{i=1...n} f_i)}(x_\circ) &= \overline{co}(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial_{f_i}(x_\circ)).
\end{aligned}$$

که درآن $I(x_\circ) := \{i = 1,...,n | f_i(x_\circ) = \sup\limits_{i=1,...,n} f_i(x_\circ)\}$ و $\overline{co}$پوش محدب بسته را نشان می دهد.

یک کلاس مهم از توابع غیر مشتق پذیر شامل تحدید توابع محدب $f_K = f + \psi_K$ به زیر مجموعه محدب وبسته K است وقتی که درون K ناتهی باشد،در اینجا از مشتق وگرادیان نمی توان صحبت کرد، ولی از فرمول زیر می توانیم استفاده کنیم ،

$$\partial_{f_K}(x) = \partial_f(x) + \partial_{\psi_K}(x) \ .$$

در اینحالت اگر f مشتق پذیر باشد داریم ،

$$\partial_{f_K}(x) = \nabla_f(x) + \partial_{\psi_K}(x) \ .$$

باکمی محاسبه می توان نشان دادکه زیر مشتق ∂_{ψ_K} از تابع مشخصه مجموعه K ،مخروط محدب بسته زیر است

$$\partial_{\psi_K}(x) = \{p \in X^* | \forall y \in K \ , \langle p, y-x\rangle \leq \circ\} \ .$$

اعضای $p \in X^*$ از این مجموعه نقش نرمالهای K درنقطه x را بازی می کنند.به همین دلیل $\partial_{\psi_K}(x)$ رامخروط متعامد K در نقطه x می نامیم واین مخروط را با نماد $N_K(x)$ نمایش می دهیم.چون مفهوم عمود بودن برای زیر فضاهای برداری بوسیله قطبی بودن مخروط ها نمایش داده می شود،بنابراین طبیعی به نظر می رسدکه مخروط با قطب منفی $T_K(x) := N_K(x)^-$ از مخروط نرمال K در نقطه x را بعنوان مخروط مماسی K در نقطه x در نظر بگیریم.این مطلب را در فرمول زیر بهتر می توان دید،

$$T_K(x) = closure(\bigcup_{h>\circ} \frac{1}{h}(K-x)) \ .$$

در حقیقت این فرمول نشان می دهد که بردار u بر K در نقطه x مماس است اگر u برابرحد بردارهای $v \in X$ باشدبطوریکه

$$x + tv \in K \qquad \forall t \in [\circ, h] .$$

چنین بردارهایی مشتق های (راست) منحنی های $t \to x + tv$ در نقطه $x \in K$ هستند.

۱ — ۲ قضیه مقدار میانگین چند جهتی در فضاهای باناخ

نامساوی مقدار میانگین چند جهتی که در [۲] شرح داده شده، تعمیمی از قضیه مقدار میانگین به این مفهوم‌است که تخمینی ازتفاضل $f(y) - f(x)$ راارائه‌می دهد، بااین‌تفاوت که در اینجالازم نیست y نقطه انتهایی یک بازه ثابت باشد، بلکه y می تواند در مجموعه‌ای مانند Y تغییر کند.

برای مثال، اگر f یک تابع هموار بر $\mathbb{R}^n$ و Y یک زیر مجموعه فشرده $\mathbb{R}^n$ باشد،این قضیه وجود نقطه z رادربازهٔ $[x, Y]$ یعنی پوش محدب [۱۷] تولید شده‌بوسیله $\{x\} \cup Y$اثبات می کند بطوریکه،

$$\min_{Y} f - f(x) \leq \langle f'(z), y - x \rangle \qquad \forall y \in Y.$$

نتیجه این قضیه در[۲] برای توابع نیم پیوسته پایینی که بر یک فضای هیلبرت تعریف می‌شوند گسترش داده‌شده است.

صورت دیگری از این قضیه در [۳] برای توابع موضعاً لیپ‌شیتز تعریف شده بر نوعی از فضاهای‌باناخ، در مورد دو مجموعه ثابت شده است یعنی، به جای نقطه x از یک مجموعه بسته، محدب وکرانداراستفاده شده است، با این تفاوت که زیر گرادیان بکار رفته دراین‌قضیه، تعمیمی از گرادیان $\partial_C f$ است.

در فصل دوم این رساله بعضی از تعاریف موردنیاز راکه در فصل های آینده از آنها استفاده‌خواهیم کرد،بیان می‌کنیم.

در فصل سوم ، در بخش اول در مورد تابع فاصله ، زیر مشتق فرشه ومینیمم قوی صحبت می‌کنیم. در بخش دوم این فصل‌بعضی از قضایای مقدماتی مورد نیازدر فصل های بعد را در مورد زیر مشتق‌فرشه بیان کرده و بعضی از آنها رااثبات می‌کنیم. در بخش سوم این فصل قاعده زنجیره ای زیر مشتق فرشه را بیان‌واثبات می‌کنیم. در بخش چهارم این فصل یک قضیه مهم در مورد زیر مشتق فرشه ونتیجه جالبی از آن را بیان واثبات می‌کنیم.

---

[۱۷] convex hull

در فصل چهارم، در بخش اول،قضیه اصلی این مقاله‌یعنی، تعمیمی‌از نتیجه نامساوی مقدار میانگین چند جهتی را که در [۲] برای توابع نیم پیوسته پایینی که بر یک فضای هیلبرت تعریف می‌شوند، بیان شده است، را برای توابع موضعاًلیپ شیتز در زمینه فضای باناخی که تابع‌لبه دار پیوسته‌لیپ شیتزی از رده C^1 روی آن موجود باشد،بیا ن‌واثبات می‌کنیم. در بخش دوم این فصل در مورد گرادیان تعمیم یافته $(\partial_C f)$ وبرخی از خواص آن بحث می‌کنیم وبعضی از قضایا ی مهم در مورد آن رابیان واثبات می‌کنیم.

در فصل پنجم، سه کاربرداز قضیه اصلی این مقاله که در فصل چهارم شرح داده شده ، را بیان می‌کنیم. اولین کاربرددر قضیه ۵—۲بیان‌وثابت شده است. دومین کاربرداین قضیه درقضیه ۵—۹ این‌فصل وسومین کاربرد در قضیه ۵—۱۱ این فصل بیان وثابت شده اند. در این فصل ابتدا در مورد مشتق دینی ضعیف وزیر گرادیان دنی ضعیف‌بحث می کنیم وسپس یکی از نتایج مهم [۴] رابرای توابع موضعاًلیپ شیتز در زمینه‌فضای باناخی که تابع لبه دار لیپ شیتزی از رده C^1 روی آن موجود باشد، گسترش‌می‌دهیم.در انتهای این فصل در مورد یکنوایی ضعیف وقوی بحث می‌کنیم.

فصل دوم
پیشنیازها

دراین فصل‌مفاهیم اصلی، از جمله تعاریف وقضایای پیشنیاز فصول بعدی گنجانده شده است. ابتدامفاهیم پوش محدب، مشتق فرشه ،تابع لیپ شیتز،مخروط‌ونیم پیوسته پایینی‌راتعریف می کنیم.سپس در مورد خاصیت یکنوایی قوی ویکنوایی ضعیف بحث می کنیم. در ادامه توپولوژی ضعیف وضعیف -* وهمگرایی ضعیف وضعیف -* را مورد بحث قرار داده، برخی‌از قضایای مهم در مورد آنها را بیان می کنیم.سپس در مورد فضاهای باناخ انعکاسی‌وخواص آنهامطالبی را ذکر می کنیم. در آخرنکته مهم این فصل یعنی قضیه مقدارمیانگین ونتیجه آن رابرای فضاهای هیلبرت بیان می‌کنیم وسپس برخی از کاربردهای آن رابرای فضاهای هیلبرت ذکر می‌کنیم .