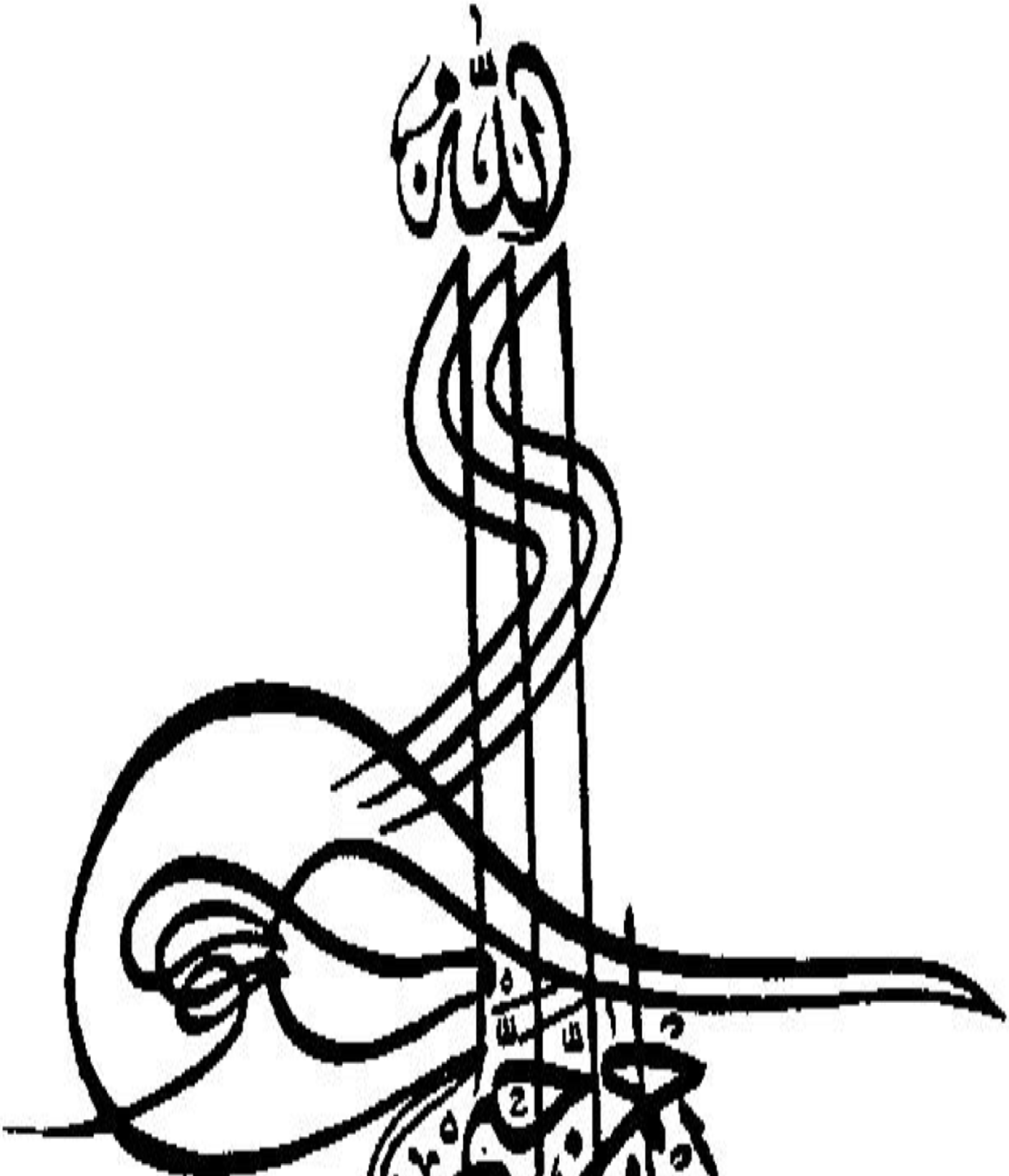
بسم الله الرحمن الرحيم

به نام او که دانا و توانا ست

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه :

عملگرهای بستار روی جبرهای BL

استاد راهنما :

دکتر مسعود هاوشکی

استاد مشاور:

دکتر جواد مقدری

دانشجو :

اسماء قادری

دی ماه ۸۹

چکیده

در این پایان نامه BL- جبر را تعریف کرده و بعضی روابط مهم در BL- جبر را بیان وثابت می کنیم .سپس روابط بین عملگرهای بستار و BL - جبر را مطالعه نموده و خواص عملگرهای بستار و BL - هومومورفیسم روی BL - جبر را تحقیق می کنیم . نشان می دهیم تصویر یک عملگر بستار روی BL - جبر با یک BL - جبر خارج قسمتی یکریخت است . همچنین طیف های اول و ماکسیمال از یک $BL -$ جبر را بررسی و ثابت می کنیم که طیف اول، فضای توپولوژیک T_0 فشرده است و فضای ماکسیمال یک فضای توپولوژی هاسدورف فشرده می باشد . در انتها شبکه بندی یک $BL -$ جبر را تعریف و مطالعه می کنیم.

کلمات کلیدی فارسی:

منطق پایه ، جبر BL ، جبر گودل ، جبر MV ، عملگر بستار ، جبر BL خارج قسمتی.

تقدیم به:

تمامی دوستداران ریاضیات

تقدیر و تشکر

حمد و ثنای بیکران یگانه عالم عالم بی حد و حصر و سلام بر عالمان علم لدنی و رحمت خداوند بر جویندگان دانش زگهواره تا گور.

اکنون که گردآوری پایان نامه به آخر رسیده، تقدیر و تشکر فراوان از استاد بزرگوار *جناب آقای دکتر هاوشکی* که صبورانه و پر تلاش، گاه و بیگاه و دلسوزانه مرا گام به گام تا انتهای تالیف پایان نامه پیش رو مدد رساندند و همچنین از استاد گرانقدر *جناب آقای دکتر مقدری* که مرا از راهنمایی و مشاوره در این مسیر بهره مند نموده است، ضروریست. تشکر از تمامی یاری رسانان فراموش کردنی نیست.

اسماء قادری

فهرست مطالب

فهرست علایم

$\wedge$	و
$\vee$	یا
$\odot$	ضرب
$\rightarrow$	در نتیجه
$\sim$	هم ارزی
$\sim_D$	همنهشتی نسبت به D
$=$	مساوی
$\neq$	مساوی نیست
$\in$	عضو
$\cup$	اجتماع
$\cap$	اشتراک
$\leq$	کوچکتر مساوی
$\geq$	بزرگتر مساوی

$\Longrightarrow$	نتیجه می دهد
$\Leftrightarrow$	اگر وتنها اگر
$\{\ \}$	مجموعه
$[\ ]$	کلاس هم ارزی
$Spec(A)$	مجموعه فیلترهای اولA
$Max(A)$	مجموعه فیلترهای ماکسیمالA
ds	سیستم استنتاجی

مقدمه

در حال حاضر علوم کاربردی اهمیت زیادی در جهان دارد. بخصوص ریاضیات در شاخه های کاربردی از اهمیت بیشتری برخوردار شده است.یکی از این شاخه ها منطق فازی (fuzzy logic) است.

شاید نام این دو کلمه را بر روی بسیاری از لوازم خانگی همانند ماشین لباسشویی یا یخچال دیده باشید این همان سیستم هوشمند می باشد. سیستم های هوشمند امروزه در جهت کاهش مصرف انرژی یا به اصطلاح صرفه جویی در انر ژی نقش قابل توجهی دارند همانطور که میدانید کاهش مصرف انرژی به خصوص سوخت های فسیلی سبب کاهش گازهای گلخانه ای خواهند شد باتوجه به اینکه جبرهای BL (Bassic Algebra)همان جبرهای متناظر به منطق پایه فازی (Bassic Logic)می باشند اهمیت خواص این نوع جبر مشخص می شود زیرا درحقیقت با بررسی این خواص منطق پایه فازی را بررسی کنیم .

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد:

در فصل اول مفاهیم بنیادی و تعریف BL - جبر بیان میشود و همچنین سیستم استنتاجی و BL - هومورفیسم و فیلتر را تعریف کرده و قضایای آنها که مرتبط با این پایان نامه است آورده شده است.

در این فصل از منابع شماره[۳۴] و[۲۵] و[۲۳] استفاده شده است .

در فصل دوم عملگر بستار را تعریف کرده و نشان می دهیم تصویر یک عملگر بستار روی BL - جبر با یک BL - جبر خارج قسمتی یکریخت است و در این فصل از منبع شماره[۲۳] استفاده شده است .

در فصل سوم $\mathrm{Spec(A)}$ و $\mathrm{Max(A)}$ را تعریف کرده و ثابت می کنیم طیف اول، فضای توپولوژیک $\mathrm{T_0}$ فشرده است و فضای ماکسیمال یک فضای توپولوژی هاسدورف فشرده است . در این فصل از منبع شماره[۲۵] استفاده شده است .

در فصل چهارم مجموعه خارج قسمتی $A/_{\equiv}$ را تعریف کرده و نشان می دهیم $A/_{\equiv}$ مشبکه توزیع پذیر و کراندار است. در این فصل از منبع شماره[۲۵] استفاده شده است .

فصل اول

مفاهیم بنیادی

۱-۱.BL - جبر

تعریف۱-۱.۱. فرض کنید $L \neq \emptyset$ ویک مجموعه مرتب جزیی باشد و $\wedge$, $\vee$ دوعملگر دوتایی روی L باشند ، $(L\ ,\wedge\ ,\vee)$ را مشبکه گوییم هرگاه برای هر $x, y \in L$ شرایط زیر برقرار باشند:

L۱) $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$ ،

L۲) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ و $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ،

L۳) $x \vee x = x$ و $x \wedge x = x$ ،

L۴) $x = x \vee (x \wedge y)$ و $x = x \wedge (x \vee y)$.

تعریف ۱-۱. ۲. یک جبر $(L\ ,\wedge\ ,\vee\ ,0 ,1)$ با دو عمل دوتایی و دو عمل صفرتایی یک مشبکه کراندار نامیده میشود هرگاه برای هر $x \in L$ شرایط زیر برقرار باشند :

۱) $(L\ ,\wedge\ ,\vee)$ یک مشبکه باشد ،

۲) $x \wedge 0 = 0$ و $x \vee 1 = 1$.

تعریف۱-۱. ۳. یک جبر $(L , \wedge, \vee, \odot\ , \to ,0 ,1)$ را یک BL- جبر گویند هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ شرایط زیر برقرار باشند :

B۱) $(L, \odot, 1)$ مونوئید جا بجایی باشد ،

B۲) $(L\ ,\wedge\ ,\vee\ ,0 ,1)$مشبکه کراندار باشد ،

B۳) $x \odot y \leq z$ اگر وتنها اگر $x \leq (y \to z)$ ،

B۴) $x \wedge y = x \odot (x \to y)$ ،

B۵) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$.

تعریف۱-۱. ۴. در $BL-$ جبر L ، $x^* = x \to 0$ متمم x در L خوانده می شود .

تعریف۱-۱. ۵. در $BL-$ جبر L ،تعریف میشود $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$.

لم ۱-۱. ۶. در BL -جبر $(L, \wedge , \vee , \odot, \to ,0 ,1)$ برای هر $x, y, z \in L$ داریم :

۱) $x = 1 \to x$ ،

۲) $1 = x \to x$ ،

۳) $x \odot y \leq x, y$ ،

۴) $x \odot y \leq x \wedge y$ ،

۵) $y \leq x \to y$ ،

۶) $x \odot y \leq x \to y$ ،

۷) $x \leq y$ اگر وتنها اگر $x \to y = 1$ ،

۸) $x = y$ اگر وتنها اگر $x \to y = 1 = y \to x$ ،

۹) $x \odot (x \to y) \leq y$ ،

۱۰) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$ ،

۱۱) $(x \to y) \to ((w \to z) \to ((y \to w) \to (x \to z))) = 1$ ،

۱۲) اگر $x \leq y$ آنگاه $x \odot z \leq y \odot z$ ،

۱۳) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$ ،

۱۴) اگر $x \leq y$ آنگاه $z \to x \leq z \to y$ و $y \to z \leq x \to z$ ،

۱۵) برای هر $i \in I$ که $x, y_i \in L$ ، $x \odot (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \odot y_i)$ ،

۱۶) $(x \leftrightarrow y) \wedge (z \leftrightarrow w) \leq (x \vee z) \leftrightarrow (y \vee w)$ ،

۱۷) $(x \to y) \odot (y \to z) \leq (x \to z)$ ،

۱۸) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$ ،

۱۹) $x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

برهان :

فرض کنید L یک BL - جبر باشد و $x, y, \in L$.

۱) می دانیم $x \leq x$. بنا به خاصیت (B۱) داریم ، $x = x\odot 1 \leq x$. و همچنین بنا به(B۳) ، $x \to 1 \leq x$. چون ، $x \to 1 \leq x \to 1$. بنا به (B۳) داریم ، $x \leq 1\odot(1 \to x)$.

بنا به خاصیت (B۱) ، $x \leq x \to 1$. در نتیجه ، $x = x \to 1$.

۲) داریم $x \leq x$. بنا به خاصیت (B۱) ، $x \leq x\odot 1 = x$. بنا به (B۳) ، $x \to x \leq 1$. چون یک بزرگترین عضو در BL - جبر است ، $1 \leq x \to x$.

در نتیجه ، $1 = x \to x$.

۳) بنا به خواص عناصر L ، $1 \leq x$. از قسمت قبل داریم $y \to y \leq x$. بنا به (B۳) ، $y \leq x\odot y$. مشابها ، $x \leq x\odot y$.

۴) از قسمت قبل داریم ، $y \leq x\odot y$ و $x \leq x\odot y$. بنابراین ، $x\wedge y \leq x\odot y$.

۵) بنا به(B۱) و قسمت ۳ ، $y \leq x\odot y = y\odot x$. بنابه (B۳) ، $y \leq x \to y$.

۶) بنا به قسمت های ۳ و ۵ داریم ، $y \leq x \to y \leq x\odot y$. بنابراین $x\odot y \leq x \to y$.

۷) بنا به خواص عناصر BL - جبر داریم ، $x \to y \leq 1$. فرض کنید $x \leq y$.

بنا به خاصیت (B۱) ، $x = 1\odot x \leq y$. در نتیجه بنا به (B۳) ، $1 \leq x \to y$.

بنا براین ، $1 = x \to y$.

برعکس) اگر $1 = x \to y$ داریم ، $1 \leq x \to y$. بنا به (B۳) ، $1\odot x \leq y$. بنا به خاصیت (B۱) ، $x \leq y$.

۸) اگر $x = y$ آنگاه داریم ، $x \leq y$ و $y \leq x$ و از قسمت ۷ داریم $1 = x \to y$ و $1 = y \to x$.

بر عکس) اگر $y \to x = 1 = x \to y$. بنا به قسمت ۷ داریم ، $x \leq y$ و $y \leq x$. در نتیجه $x = y$.

۹) از خواص عناصر $BL-$ جبر L داریم ، $x \to y \leq x \to y$. بنا به (B۳) ،

$(x \to y) \odot x \leq y$. بنا به (B۱) ، $x \odot (x \to y) \leq y$.

۱۰) ابتدا داریم ، $x \to (y \to z) = (x \odot y) \to z$. زیرا :

$(x \odot y) \to z \leq x \to (y \to z) \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $\big((x \odot y) \to z\big) \odot x \leq (y \to z) \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $\big((x \odot y) \to z\big) \odot (x \odot y) \leq z \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $(x \odot y) \to z \leq (x \odot y) \to z$. بنابراین رابطه اول همواره درست است.

بر عکس) $x \to (y \to z) \leq (x \odot y) \to z \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $x \to (y \to z) \odot (x \odot y) \leq z \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $x \to (y \to z) \odot x \leq y \to z \quad \Leftrightarrow$

بنا به (B۳) ، $x \to (y \to z) \leq x \to (y \to z)$. بنابراین رابطه اول همواره درست است.

بنابراین ، $x \to (y \to z) = (x \odot y) \to z$. بنا به (B۱) ،

$(x \odot y) \to z = (y \odot x) \to z = y \to (x \to z)$. در نتیجه ،

$x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

۱۱) فرض کنید $z \in L$ و w و y و x. بنا به (B۱) ،

$$(x \to y) \odot (w \to z) \odot (y \to w) \odot x =$$

$$(w \to z) \odot (y \to w) \odot x \odot (x \to y) \leq .$$

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۹ ، $(w \to z) \odot (y \to w) \odot y$

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۹ ،

$(w \to z) \odot (y \to w) \odot y \leq (w \to z) \odot w$. بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۹ ،

$(w \to z) \odot w \le z$. بنابراین ،

$(x \to y) \odot (w \to z) \odot (y \to w) \odot x \le z$.

در نتیجه بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۷و (B۳)،

$(x \to y) \to ((w \to z) \to ((y \to w) \to (x \to z))) = 1$.

۱۲) داریم ، $y \odot z \le y \odot z$. لذا بنا به (B۳) ، $y \le z \to (y \odot z)$. وطبق فرض $x \le y$ ،

بنابراین ، $x \le z \to (y \odot z)$. در نتیجه بنا به (B۳) ، $x \odot z \le y \odot z$.

۱۳) چون ، $x \to y \le x \to y$. بنا به (B۳) ، $(x \to y) \odot x \le y$.

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۹ و۱۲ ، $(x \to y) \odot x \odot (y \to z) \le y \odot (y \to z) \le z$.

بنا به (B۱) ، $(x \to y) \odot (y \to z) \odot x \le z$. و بنا به (B۱) ،

$(x \to y) \odot (y \to z) \le x \to z$. بنا به (B۳) ،

$(x \to y) \le ((y \to z) \to (x \to z))$. در نتیجه بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۷ ،

$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

۱۴) بنا به فرض و لم ۱-۱. ۶ قسمت ۹ ، $(z \to x) \odot z \le x \le y$. در نتیجه ،

$(z \to x) \odot z \le y$. بنا به (B۳) ، $z \to x \le z \to y$.

چون ، $x \le y$. بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۱۲ و (B۱) ، $x \odot (y \to z) \le y \odot (y \to z)$.

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۹ ، $x \odot (y \to z) \le y \odot (y \to z) \le z$. بنا به (B۱) ،

$(y \to z) \odot x \le z$. بنا به (B۳) ، $y \to z \le x \to z$.

۱۵) چون برای هر $i \in I$ ، $y_i \le \bigvee_{i \in I} y_i$ ، بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۱۲ برای هر $i \in I$ ، $x \odot y_i \le x \odot (\bigvee_{i \in I} y_i)$.

بنا به خاصیت کوچکترین کران بالا ، $\bigvee_{i \in I} (x \odot y_i) \le x \odot (\bigvee_{i \in I} y_i)$. از طرفی برای هر $i \in I$ ،

$(x \odot y_i) \le \bigvee_{i \in I} (x \odot y_i)$. بنا به (B۱) برای هر $i \in I$ ، $(y_i \odot x) \le \bigvee_{i \in I} (x \odot y_i)$.

بنا به (B۳) برای هر $i \in I$ ، $y_i \le x \to \bigvee_{i \in I} (x \odot y_i)$. بنا به خاصیت کوچکترین کران بالا ،

$\bigvee_{i\in I}\mathrm{y_i} \leq x \to \bigvee_{i\in I}(x\odot y_i)$. بنا به (B۳) ، $(\bigvee_{i\in I}\mathrm{y_i})\odot x \leq \bigvee_{i\in I}(x\odot y_i)$. بنا به

(B۱) ، $x\odot(\bigvee_{i\in I}y_i) \leq \bigvee_{i\in I}(x\odot y_i)$. بنابراین ، $x\odot(\bigvee_{i\in I}y_i) = \bigvee_{i\in I}(x\odot y_i)$.

۱۶) بنا به (B۳) ، $((x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}))\odot(x\vee \mathrm{z}) =$

$(((x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}))\odot x)\vee$.

$(((x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}))\odot \mathrm{z}) \leq$

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۹و۱۵،

$((x\to y)\odot x)\vee((\mathrm{z}\to w)\odot \mathrm{z}) \leq (y\vee \mathrm{w})$.بنابراین ،

$(x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w})\odot(x\vee \mathrm{z}) \leq (y\vee \mathrm{w})$. بنا به (B۳) ،

$(x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}) \leq (x\vee \mathrm{z})\to(y\vee \mathrm{w})$. مشابها ،

$(x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}) \leq (y\vee \mathrm{w})\to(x\vee \mathrm{z})$. بنا به تعریف $\leftrightarrow$ ،

$(x\leftrightarrow y)\wedge(\mathrm{z}\leftrightarrow \mathrm{w}) \leq (x\vee \mathrm{z})\leftrightarrow(y\vee \mathrm{w})$.

۱۷) $(x\to y)\odot(y\to z) \leq (x\to z)$. اگر وتنها اگر

$x\odot(x\to y)\odot(y\to z) \leq z$. اما این رابطه همواره درست است زیرا:

بنا به (B۴) ، $x\odot(x\to y)\odot(y\to z) = (x\wedge y)\odot(y\to z)$.

بنا به (B۴) ، $\leq y\odot(y\to z) = y\wedge z \leq z$

بنابراین ، $x\odot(x\to y)\odot(y\to z) \leq z$. در نتیجه بنا به (B۳) ،

$(x\to y)\odot(y\to z) \leq (x\to z)$.

۱۸) در هر مشبکه $y \leq y\vee z$ و $z \leq y\vee z$. بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۱۲،

$x\odot y \leq x\odot(y\vee z)$ و $x\odot z \leq x\odot(y\vee z)$. بنابراین $x\odot(y\vee z)$ یک کران بالا

برای $x\odot y$ و $x\odot z$ می باشد پس $(x\odot y)\vee(x\odot z) \leq x\odot(y\vee z)$. به عکس

$x\odot y \leq (x\odot y)\vee(x\odot z)$ و $x\odot z \leq (x\odot y)\vee(x\odot z)$. بنا به خاصیت $(L۱)$ در

مشبکه ، $y\odot x \leq (x\odot y)\vee(x\odot z)$ و $z\odot x \leq (x\odot y)\vee(x\odot z)$. بنا به (B۳) ،

$y \leq x \rightarrow \big((x \odot z) \vee (x \odot y)\big)$ و $z \leq x \rightarrow \big((x \odot z) \vee (x \odot y)\big)$.

بنابراین$\big((x \odot z) \vee (x \odot y)\big) \rightarrow x$ یک کران بالا برای y و z می باشد پس

$\big((x \odot z) \vee (x \odot y)\big) \rightarrow x \leq y \vee z$. بنا به (B۳) و (B۱)،

$(x \odot z) \vee (x \odot y) \geq x \odot (y \vee z) = (y \vee z) \odot x$. بنابراین ،

$x \odot (y \vee z) = (x \odot z) \vee (x \odot y)$.

۱۹) $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) =$

بنا به (B۱) ، $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \odot 1 =$

بنا به (B۵) ،

$((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \odot ((x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)) =$

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت ۱۸،

$(((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \odot (x \rightarrow y)) \vee$

$(((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \odot (y \rightarrow x)) \leq$

$(((x \rightarrow y) \rightarrow y) \odot (x \rightarrow y)) \vee$

بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۹، $(((y \rightarrow x) \rightarrow x) \odot (y \rightarrow x)) \leq y \vee x = x \vee y$

در نتیجه ، $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x) \leq x \vee y$.

از طرفی ، $(x \rightarrow y) \odot (x \vee y) = ((x \rightarrow y) \odot x) \vee ((x \rightarrow y) \odot y) =$

بنا به (B۴) و لم ۱-۱. ۶ قسمت۹، $(x \wedge y) \vee ((x \rightarrow y) \odot y) \leq y \vee y = y$

بنا به (B۳) و(B۱) ، $x \vee y \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$. مشابها ،

$x \vee y \leq ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$. بنابراین ،

$x \vee y \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$. در نتیجه ،

$x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$. ■

۱-۲. فیلتر

تعریف ۱-۲. ۱. فرض کنید L یک BL - جبر باشد زیر مجموعه $F \subseteq L$ یک فیلتر از L نامیده میشود هرگاه برای هر $x, y \in F$ شرایط زیر برقرار باشند :

۱) $x \odot y \in F$ ،

۲) اگر $x \le y$, $x \in F$ آنگاه $y \in F$.

قضیه ۱-۲. ۲. فرض کنید F یک فیلتر از L باشدو $x, y \in L$ آنگاه شرایط زیر معادلند :

(۱) $x, y \in F$

(۲) $x \wedge y \in F$

(۳) $x \odot y \in F$

برهان :

(۱ → ۲) اگر $x, y \in F$. چون F فیلتر است ، $x \odot y \in F$. بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۴ ، $x \odot y \le x \wedge y$. چون F فیلتر است، $x \wedge y \in F$.

(۲ → ۳) فرض کنید $x \wedge y \in F$. در نتیجه ، $x \wedge y \le x$ و $x \wedge y \le y$. چون F فیلتر است ، $x, y \in F$ و $x \odot y \in F$.

(۳ → ۱) فرض کنید $x \odot y \in F$. بنا به لم ۱-۱. ۶ قسمت۳ ، $x \odot y \le x$ و $x \odot y \le y$. چون F فیلتر است لذا ، $x, y \in F$.

تعریف ۱-۲. ۳. فیلتر سره P از L را فیلتر اول گوییم هرگاه برای هر $x, y \in L$ شرط زیر برقرار باشد :

اگر $x \vee y \in P$ آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

تعریف ۱-۲. ۴. فیلتر سره M از L را که مشمول هیچ فیلتر سره ای از L نباشد ماکسیمال گوییم .

تعریف ۱-۲. ۵. مجموعه همه فیلترهای اول L را $Spec(L)$ گوییم.

تعریف ۱-۲. ۶. مجموعه همه فیلترهای ماکسیمال L را $Max(L)$ گوییم.