بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**

**ریاضی محض-گرایش جبر**

**عنوان**

# گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه‌ها

استاد راهنما

**دکتر احمد عرفانیان**

استاد مشاور

**دکتر محسن پرویزی**

نگارنده

**عباس محمدیان**

۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

فردوسی مشهد

عنوان: گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه‌ها

نام نویسنده: عباس محمدیان

استاد راهنما: دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور: دکتر محسن پرویزی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی محض رشته تحصیلی: ریاضی محض-گرایش جبر

تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۳/۰۱ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۳/۱۷

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۱۴۴

چکیده پایان‌نامه : گروه دلخواه $G$ را در نظر بگیرید. گراف $\Gamma_G$ را که گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج $G$ نامیده می‌شود، به صورت زیر به گروه $G$ نسبت می‌دهیم:

مجموعه‌ی تمام رده‌های تزویج غیربدیهی $G$ را به عنوان رئوس $\Gamma_G$ در نظر بگیرید. رئوس $[x]_G$ و $[y]_G$ با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر عنصری از رده‌ی تزویج $[x]_G$ با عنصری از رده‌ی تزویج $[y]_G$ جابه‌جا شود. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که اگر $G$ گروهی تابدار حل‌پذیر باشد، آنگاه $\Gamma_G$ حداکثر دو مؤلفه‌ی همبندی دارد که قطر هر مؤلفه‌ی همبندی، حداکثر ۹ است. همچنین اگر $G$ گروهی موضعا متناهی باشد، آنگاه $\Gamma_G$ حداکثر ۶ مولفه همبندی دارد که قطر هر یک از مؤلفه‌های همبندی حداکثر ۱۹ است. به علاوه در این پایان‌نامه دو زیرگراف القایی مهم $\Gamma_G(Z)$ و $\Gamma_G(F)$ را معرفی می‌کنیم که مجموعه‌ی رئوس زیرگراف القایی $\Gamma_G(Z)$، رده‌های تزویج غیر مرکزی $G$ و مجموعه رئوس زیرگراف القایی $\Gamma_G(F)$، رده‌های تزویج نامتناهی $G$ می‌باشد. اگر $G$ گروهی تابدار غیر آبلی باشد به طوری که $\Gamma_G(Z)$ یال نداشته باشد، آنگاه $G$ دارای مرتبه‌ی ۶ یا ۸ است و اگر $G$ گروهی متناهی غیر آبلی از مرتبه‌ی فرد باشد به طوری که $\Gamma_G(Z)$ مثلث نداشته باشد، آنگاه $G$ دارای مرتبه‌ی ۲۱ یا ۲۷ است. در انتها ساختار گروه‌های تابداری را که زیر گراف القایی $\Gamma_G(F)$ آنها یال نداشته باشد، به طور کامل توصیف می‌کنیم.

واژگان کلیدی: رده‌های تزویج، گراف، گروه‌های موضعاً متناهی و گروه‌های تابدار

امضای استاد راهنما: تاریخ:

**اظهارنامه**

عنوان پایان‌نامه : گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه‌ها

اینجانب عباس محمدیان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر احمد عرفانیان متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد'' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

**تاریخ**

**امضای دانشجو**

تقدیم به

آن‌ها که بی‌دریغ کوشیدند

تا امروز سربراوج ساییدن را تجربه کنم.

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.

در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی[1]، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.

تو علم را روشنی قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.

من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.

اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"

و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشتهی قلبم بخوان...!

---

[1] ن و القلمِ و ما یَسطُرونَ

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد عرفانیان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر محسن پرویزی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش و جناب آقای دکتر عباس جعفرزاده که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

عباس محمدیان
۱۳۹۱

# فهرست مطالب

# مقدمه

مطالعه‌ی ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی‌های گراف‌ها موضوعی است که در بیست سال اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و سؤالات بسیار زیادی نیز در این زمینه بوجود آمده است. البته ناگفته نماند که نتایج بسیار شگرفی نیز از پیوند این دو شاخه نظری و کاربردی بدست آمده است. مقالات متعددی وجود دارد که در آنها به یک ساختار جبری گرافی نسبت داده شده و ویژگی‌های متعدد و مختلف آن با استفاده از این گراف مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه می‌توانید مراجع [۱–۳، ۲۹] را ببینید.

گروه دلخواه $G$ را در نظر بگیرید. در این پایان‌نامه، گراف $\Gamma_G$ را به گروه $G$ نسبت می‌دهیم و با استفاده از مفاهیم نظری گراف‌ها به بررسی ساختار گروه $G$ می‌پردازیم. گراف $\Gamma_G$ را که گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج $G$ می‌نامیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
مجموعه‌ی تمام رده‌های تزویج غیربدیهی گروه $G$ را به عنوان رئوس $\Gamma_G$ در نظر می‌گیریم و گوییم دو رأس $[x]_G$ و $[y]_G$ به یکدیگر متصلند اگر و تنها اگر عنصری از رده‌ی تزویج $[x]_G$ با عنصری از رده‌ی تزویج $[y]_G$ جابه‌جا شود.

گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه $G$، اولین بار توسط مارسل هرزوگ [۱]، پاتریزیا لانگوباردی [۲] و مرسده مج [۳] در سال ۲۰۰۹ در مقاله [۱۴] تعریف شد و بعد از آن تاکنون مقاله‌ای در مورد این گراف

[۱]Marcel Herzog [۲]Patrizia Longobardi [۳]Mercede Maj

به چاپ نرسیده است. چهار فصل ابتدایی پایان‌نامه‌ی حاضر بر اساس نتایج بدست آمده در این مقاله است و در فصل پنجم مطالب جدیدی برای اولین بار در مورد این گراف عنوان می‌شود.

به طور کلی در این پایان‌نامه علاوه بر اینکه مفاهیم گوناگون گراف را در مورد گراف $\Gamma_G$ بررسی می‌کنیم، به مطالعه‌ی ساختار گروه $G$ با استفاده از مفاهیم نظری گراف‌ها نیز می‌پردازیم.

در فصل ۲، همبندی گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه $G$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این فصل نشان می‌دهیم که اگر $X$ رده‌ی تمام گروه‌هایی باشد که زیرگروه سره‌ی بطور مزدوج چگال ندارند و $G$ یک $X$-گروه باقیمانده‌ای با گراف کامل $\Gamma_G$ باشد، آنگاه $G$ آبلی است. همچنین در انتهای این فصل ساختار گروه‌های ابرحل‌پذیری که گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج آنها ناهمبند است، به طور کامل توصیف می‌شود.

در فصل ۳، ابتدا گراف اول گروه متناهی $G$ را معرفی می‌کنیم. در واقع این گراف که آن را با $\Pi(G)$ نشان می‌دهیم به این صورت تعریف می‌شود که رئوس آن مجموعه‌ی تمام اعداد اولی است که مرتبه‌ی گروه $G$ را تقسیم می‌کنند و دو راس $p$ و $q$ با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر $G$ دارای عنصری از مرتبه‌ی $pq$ باشد. در ادامه ارتباط بین گراف اول و گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه متناهی $G$ را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تعداد مؤلفه‌های همبندی این دو گراف برای گروه متناهی $G$ یکسان است.

در بخش اول این فصل به مطالعه‌ی همبندی گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج گروه‌های موضعاً متناهی و گروه‌های تابدار حل‌پذیر می‌پردازیم. در این بخش اثبات می‌کنیم که اگر $G$ گروهی تابدار حل‌پذیر باشد، آنگاه $\Gamma_G$ حداکثر دو مؤلفه‌ی همبندی دارد که قطر هر یک از مؤلفه‌هی همبندی، حداکثر ۹ است. همچنین اگر $G$ گروهی موضعاً متناهی باشد، آنگاه $\Gamma_G$ حداکثر ۶ مؤلفه‌ی همبندی دارد که قطر هر یک از آنها، حداکثر ۱۹ است.

در بخش دوم این فصل، ساختار گروه‌های حل‌پذیر متناهی که دارای گراف $\Gamma_G$ ناهمبند هستند به

طور کامل توصیف می‌شود.

در فصل ۴، دو زیرگراف القایی خاص و مهم از گراف $\Gamma_G$ معرفی می‌کنیم و با قرار دادن شرایطی بر روی این زیرگراف‌ها به بررسی ساختار گروه‌های تابدار می‌پردازیم.

در بخش اول این فصل زیرگراف القایی $\Gamma_G(Z)$ را که مجموعه رئوس آن رده‌های تزویج غیر مرکزی $G$ می‌باشد، معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر $G$ گروهی غیر آبلی و تابدار باشد به طوری که $\Gamma_G(Z)$ یال ندارد، آنگاه $G$ با یکی از سه گروه $D_۸$، $Q_۸$ یا $S_۳$ یکریخت است. همچنین در بخش دوم، زیرگراف القایی $\Gamma_G(F)$ را که مجموعه رئوس آن رده‌های تزویج نامتناهی است، معرفی می‌کنیم و ساختار گروه‌های تابداری را که زیرگراف القایی $\Gamma_G(F)$ آنها یال ندارد به طور کامل توصیف می‌کنیم.

در فصول ۲ و ۳ بیشتر مطالبی در مورد همبندی گراف $\Gamma_G$ و فاصله‌ی بین دو رأس در گراف $\Gamma_G$ مطرح می‌شود. اما سوالات مهم دیگری نیز در مورد ویژگی‌های یک گراف وجود دارد که پاسخ به هر یک از آنها بسیار مهم و ارزشمند است. سؤالاتی از قبیل اینکه برای چه گروه‌هایی گراف $\Gamma_G$ مسطح است؟ کمر گراف $\Gamma_G$ چند است؟ آیا گراف $\Gamma_G$ همیلتنی است؟ و ... . هرچند پاسخ به برخی سؤالات مطرح شده بسیار دشوار است، اما قطعاً پاسخ به آنها در مشخص‌سازی گروه‌ها به وسیله‌ی گراف مرتبطشان بسیار حائز اهمیت است. بدین منظور در فصل ۵ بیشتر به دنبال پاسخ به برخی از این سؤالات می‌باشیم.

در فصل ۵، ابتدا در بخش نخست به پاسخ برخی سؤالات فوق در مورد گراف جابه‌جایی رده‌های تزویج حاصل‌ضرب خارجی دو گروه غیربدیهی می‌پردازیم. در این بخش اثبات می‌کنیم که اگر $G$ و $H$ دو گروه غیربدیهی دلخواه باشند، آنگاه گراف $\Gamma_{G\times H}$ همواره همبند است و قطر آن حداکثر ۳ می‌باشد. به علاوه $\Gamma_{G\times H}$ دارای کمر به طول ۳ است. همچنین نشان می‌دهیم که اگر $G$ و $H$ دو گروه تابدار غیربدیهی باشند به طوری که $\Gamma_{G\times H}$ مسطح است، آنگاه $\Gamma_{G\times H}$ با یکی از سه گروه $\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$، $S_۳\times\mathbb{Z}_۲$ و یا $S_۳\times S_۳$ یکریخت است.

در بخش دوم به موضوع فصل ۴ برمی‌گردیم و به دنبال شناسایی گروه‌هایی هستیم که زیرگراف القایی $\Gamma_G(Z)$ آنها مثلث ندارد. در واقع پاسخ به این سؤال علاوه بر اینکه به مشخص‌سازی گروه $G$ توسط گراف $\Gamma_G$ بسیار کمک می‌کند، نتایج بسیار مهمی نیز در مورد ویژگی‌های یک گراف به همراه خواهد داشت. به طور مثال می‌توانیم کمر گراف $\Gamma_G$ را برای گروه متناهی $G$ بدست آوریم و با استفاده از آن تمام گروه‌هایی را که گراف $\Gamma_G$ آنها دو بخشی یا درخت است، شناسایی کنیم.

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر $G$ گروهی غیر آبلی متناهی از مرتبه‌ی فرد باشد به طوری که $\Gamma_G(Z)$ مثلث نداشته باشد، آنگاه $G$ گروهی از مرتبه‌ی ۲۱ یا ۲۷ است.

البته در پایان این نکته را باید ذکر کرد که تمام گروه‌های غیر آبلی متناهی که ۲-گروه نیستند و زیرگراف القایی $\Gamma_G(Z)$ آنها مثلث ندارد، به طور کامل شناسایی شده‌اند که خود می‌تواند به طور جداگانه‌ای موضوع یک پایان‌نامه باشد.

# فصل ۱

# پیش نیازها

همان‌طور که در مقدمه گفته شد در این پایان‌نامه به یک گروه، گرافی نسبت داده می‌شود و علاوه بر این‌که ویژگی‌های گوناگون گراف مورد نظر بررسی می‌شود، ساختار گروه مرتبط با این گراف نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از این رو نیاز است تا برای مطالعه‌ی فصول آتی، برخی مفاهیم و قضایای مورد نیاز در نظریه گروه‌ها و نظریه گراف‌ها به اجمال بیان شوند. در بخش نخست این فصل، مفاهیم و قضایای مورد نیاز در نظریه‌ی گراف‌ها و در بخش دوم مفاهیم و قضایای پر کاربرد در نظریه‌ی گروه‌ها بیان خواهند شد.

## ۱.۱ مفاهیم و قضایای مورد نیاز در گراف‌ها

فرض کنید $V$ مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی و $E$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی $V$ است. در این صورت به جفت $G=(V,E)$ یک گراف[۱] می‌گوییم. هر عضو $V$ را یک

[۱] graph

رأس[۱] و هر عضو $E$ را یک یال[۲] می‌نامیم. مجموعه‌ی رأس‌های $G$ را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های $G$ را با $E(G)$ نشان می‌دهیم. تعداد عناصر $V$ را با $\nu$ و تعداد عناصر $E$ را با $\varepsilon$ نشان می‌دهیم.

اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد و $u,v\in V$ و $e=\{u,v\}\in E$، آن‌گاه می‌گوییم، $e$ یالی بین $u$ و $v$ است یا رئوس $u$ و $v$ مجاورند و این موضوع را به صورت $u \xrightarrow{e} v$ نشان می‌دهیم. یالی که رأسی را به خودش وصل کند، طوقه[۳] نامیده می‌شود. رأسی که یالی از آن نمی‌گذرد، رأس تنها نامیده می‌شود. اگر در گرافی بیشتر از یک یال، دو رأس را به هم وصل کند، آن‌گاه گراف را یک گراف چندگانه[۴] و هر کدام از این یال‌ها را یک یال چندگانه می‌نامیم. گرافی که طوقه و یال چندگانه ندارد، گراف ساده[۵] نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۱.۱.**

*(i) گراف تهی[۶]، گرافی است که هیچ یالی ندارد و گراف پوچ[۷] گرافی است که هیچ رأس و هیچ یالی ندارد.*

*(ii) گراف ساده $G$ را کامل می‌نامیم هرگاه بین هر جفت از رئوس آن یالی موجود باشد. اگر گراف کامل[۸] $G$ دارای $n$ رأس باشد، آن را با $K_n$ نشان می‌دهیم.*

**تعریف ۲.۱.۱.** *گراف $H=(V',E')$ را یک زیرگراف[۹] از گراف $G=(V,E)$ نامیم هرگاه $V'\subseteq V$ و $E'\subseteq E$. اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد و $\phi\neq W\subseteq V$، آن‌گاه زیرگراف القایی[۱۰] $G$ توسط $W$ که با $G[W]$ نمایش می‌دهیم برابر است با زیرگرافی از $G$ که مجموعه‌ی رئوس آن $W$ است و مجموعه یال‌های آن یال‌هایی از $G$ است که دو سر آنها در $W$ قرار دارند. به هر زیرگراف کامل از گراف $G=(V,E)$ یک خوشه[۱۱] و به هر زیرگراف $H=(W,E')$ از $G$ که $W=V$ یک زیرگراف فراگیر[۱۲] از $G$ گوییم.*

[۱]vertex [۲]edge [۳]loop [۴]multiple graph [۵]simple graph [۶]empty graph [۷]null graph [۸]complete graph [۹]subgraph [۱۰]induced subgraph [۱۱]clique [۱۲]spaning subgraph

**تعریف ۳.۱.۱.** درجه[۱] ی رأس $v$ ازگراف $G$ که آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از تعداد یال‌هایی که از رأس $v$ می‌گذرد. اگر گراف شناخته شده باشد، برای سادگی $d_G(v)$ را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه رأسی زوج باشد، آن رأس را یک رأس زوج و اگر فرد باشد، آن رأس را یک رأس فرد نامیم. کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های گراف $G$ را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

**قضیه ۴.۱.۱.** برای هر گراف $G = (V, E)$ داریم:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = ۲\varepsilon$$

***برهان.*** به [۸] مراجعه شود. □

**نتیجه ۵.۱.۱.** در هر گراف، تعداد رئوس فرد، عددی زوج است.

***برهان.*** به [۸] مراجعه شود. □

**تعریف ۶.۱.۱.** گراف $G$ را $k$-منتظم نامیم هرگاه درجه‌ی هر یک از رئوس $G$ برابر $k$ باشد. $(k \in \mathbb{N} \cup \{۰\})$. به عبارت دیگر اگر $\delta(G) = \Delta(G) = k$، آن‌گاه $G$ را $k$-منتظم نامیم. $K_n$ها، $(n-۱)$-منتظم وگراف‌های تهی، ۰-منتظم هستند.

**تعریف ۷.۱.۱.** یک مسیر[۲] ازگراف $G$ عبارت است از دنباله‌ی متناهی $v_۰e_۱v_۱e_۲\cdots e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک درمیان رأس‌ها و یال‌های متمایز $G$ بوده و برای هر $i$ که $۱ \leq i \leq k$، $v_{i-۱}$ و $v_i$ دو سر یال $e_i$ باشند. دنباله فوق، مسیر بین $v_۰$ و $v_k$ و $k$ طول این مسیر نامیده می‌شود.

**تعریف ۸.۱.۱.** مسیری که دو رأس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، یک دور[۳] نامیده می‌شود. طول یک دور برابر با تعداد یال‌هایش است.

[۱]degree [۲]path [۳]cycle

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنید $u$ و $v$ رأس‌های گراف $G$ باشند. در این صورت فاصله[۱] ی بین $u$ و $v$ که آن را با $d_G(u,v)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین $u$ و $v$. اگر بین رئوس $u$ و $v$ مسیری در گراف $G$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه $d_G(u,v)=\infty$. بیشترین فاصله‌ی بین رئوس گراف $G$ را قطر[۲] $G$ می‌نامیم و با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** طول کوتاه‌ترین دور گراف $G$ را کمر[۳] گراف $G$ می‌نامیم و با $\mathrm{gr}(G)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** دو رأس $u$ و $v$ را در گراف $G$ مرتبط می‌نامیم، هرگاه مسیری بین این دو رأس در $G$ وجود داشته باشد. گراف $G$ را همبند[۴] می‌نامیم هرگاه هر دو رأس آن به یکدیگر مرتبط باشند. در غیر این صورت گراف را ناهمبند[۵] می‌نامیم.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** یک زیرگراف القایی $G$، مولفه‌ی همبند[۶] نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف همبند بیشین باشد.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** گراف $G=(V,E)$ را دوبخشی[۷] می‌نامیم هرگاه بتوان $V$ را به دو زیرمجموعه‌ی $V_1$ و $V_2$ چنان افراز کرد که هر یال $G$ رأسی از مجموعه‌ی $V_1$ را به رأسی از مجموعه $V_2$ وصل نماید. به عبارت دقیق‌تر، گراف $G=(V,E)$ را دوبخشی نامیم هرگاه بتوان $V$ را به صورت $V_1\cup V_2$ نوشت که در آن $\phi\neq V_1\subseteq V$، $\phi\neq V_2\subseteq V$ و $V_1\cap V_2=\phi$ و اگر $e=\{a,b\}$ یالی از $G$ باشد، آن‌گاه $a\in V_1$ و $b\in V_2$ (یا $a\in V_2$ و $b\in V_1$). به عبارتی هیچ دو رأسی در $V_2$ و هیچ دو رأسی در $V_1$ مجاور نباشند. در چنین صورتی $G$ را با $G=(V_1\cup V_2\ ,\ E)$ نمایش می‌دهیم. اگر گراف دوبخشی $G=(V_1\cup V_2\ ,\ E)$ ساده باشد، آن‌گاه $G$ را یک گراف دوبخشی کامل[۸] نامیم، هرگاه هر رأس در $V_1$ به هر رأس در $V_2$ وصل شده باشد. در این صورت اگر $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$، آن‌گاه $G$ را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

---

[۱] distance [۲] diameter [۳] girth [۴] connected [۵] disconnected [۶] connected component [۷] bipartite

[۸] complete bipartite graph

**قضیه ۱۴.۱.۱.** *گراف $G=(V,E)$ که حداقل ۲ رأس دارد، دوبخشی است اگر و تنها اگر $G$ دوری به طول فرد نداشته باشد.*

**برهان.** به [۸] مراجعه شود. □

**تعریف ۱۵.۱.۱.** *گراف $G=(V,E)$ را مسطح[۱] نامیم هرگاه بتوان $G$ را چنان در صفحه رسم کرد که یال‌های آن فقط در رأس‌ها یکدیگر را قطع کنند. چنین ترسیمی از $G$ را یک نشاندن مسطح[۲] $G$ نامیم.*

**تعریف ۱۶.۱.۱.** *فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف مسطح است که توسط نشاندن مسطحی در صفحه مشخص شده است. نواحی دوبعدی تعریف شده به وسیله یال‌های این گراف را وجه[۳] های آن می‌گوییم.*
*درجه‌ی وجه $f$ که با نماد $d(f)$ نشان داده می‌شود برابر است با تعداد یال‌هایی که آن وجه را محصور کرده است.*

**قضیه ۱۷.۱.۱.** *فرض کنید که گراف مسطح همبندی دارای $\nu$ رأس و $\varepsilon$ یال است. اگر تعداد وجوهی که در یک نشاندن مسطح این گراف مسطح به وجود می‌آید برابر $r$ باشد، آن‌گاه*

$$\nu-\varepsilon+r=۲$$

**برهان.** به [۸] مراجعه کنید. □

**نتیجه ۱۸.۱.۱.** *فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف مسطح ساده با $\nu$ رأس $(\nu\geq ۳)$ و $\varepsilon$ یال است و در یک نشاندن مسطح دارای $r$ وجه است. در این صورت*

*(i)* $۳r\leq ۲\varepsilon$

---

[۱] planar [۲] planar embedding [۳] face

(ii) $\varepsilon \leq ۳\nu - ۶$

***برهان.*** به [۸] مراجعه شود. □

**نتیجه ۱۹.۱.۱.** *گراف‌های کامل $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ مسطح نیستند.*

***برهان.*** به برهان خلف فرض کنید که $K_۵$ مسطح است. چون تعداد یال‌های $K_۵$ برابر $\varepsilon = ۱۰$ و تعداد رئوس آن برابر $\nu = ۵$ است، بنابراین بنا به نتیجه ۱۸.۱.۱ داریم:

$$\varepsilon \leq ۳\nu - ۶ \Rightarrow ۱۰ \leq ۱۵ - ۶ = ۹$$

و این تناقض نشان می‌دهد که گراف کامل $K_۵$ مسطح نیست.

فرض کنید $K_{۳,۳}$ مسطح است. چون $K_{۳,۳}$ دوبخشی است، بنابراین بنا به ۱۴.۱.۱، $\mathrm{gr}(K_{۳,۳}) \geq ۴$. پس در هر مرز وجوه $K_{۳,۳}$ حداقل ۴ یال وجود دارد. لذا درجه‌ی هر وجه $K_{۳,۳}$، حداقل ۴ می‌باشد. از طرفی بدیهی است که تعداد یال‌های گراف $K_{۳,۳}$ برابر $\varepsilon = ۹$ است. بنابراین تعداد وجوه گراف $K_{۳,۳}$ یعنی $r$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$۴r \leq \sum_{f \in F(G)} d(f) = ۲\varepsilon = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

در نتیجه $r \leq ۴$. از طرفی طبق قضیه ۱۷.۱.۱ داریم:

$$۲ = \nu + r - \varepsilon = ۶ + r - ۹ \leq ۶ + ۴ - ۹ = ۱$$

و این تناقض نشان می‌دهد که $K_{۳,۳}$ مسطح نیست. □

**تعریف ۲۰.۱.۱.** *یک انبساط یالی از گراف $G$ عبارت است از حذف کردن یالی مانند $e$ از گراف $G$ و جایگزین کردن مسیر جدیدی به طول ۲ به جای آن به طوری که دو سر یال $e$ را به یکدیگر وصل کند.*

**قضیه ۲۱.۱.۱** (کوراتوفسکی[۱]). *یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر هیچ زیرگرافی از آن انبساطی از $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ نباشد.*

***برهان.*** به [۸] مراجعه شود. □

## ۲.۱ مفاهیم و قضایای مورد نیاز در گروه‌ها

در این بخش به بیان برخی از تعاریف نظریه‌ی گروه‌ها و قضایا و لم‌هایی که در ادامه مورد نیازند، می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۲.۱.** *فرض کنید $m$ یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، در این صورت مجموعه‌ی تمام اعداد طبیعی مانند $n$ را که $n < m$ و $m$، $n$ متباین‌اند، $U(m)$ می‌نامیم. مجموعه‌ی $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه‌ی $m$ یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد. این گروه را با همان علامت $U(m)$ نشان می‌دهیم.*

از نظریه اعداد مقدماتی معلوم است که $|U(m)| = \phi(m)$ که در آن $\phi$ تابع کامل اویلر[۲] است.

**لم ۲.۲.۱.**

*(i)* *اگر $G$ یک گروه دوری نامتناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}_۲$.*

*(ii)* *اگر $G$ گروهی دوری متناهی از مرتبه‌ی $m$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{Aut}(G) \cong U(m)$.*

***برهان.*** به [۲۶] مراجعه کنید. □

**لم ۳.۲.۱.** *به ازای هر عدد اول $p$، گروه $U(p)$ دوری از مرتبه‌ی $p - ۱$ است.*

[۱] Kuratowski [۲] Euler totient function

***برهان.*** به [۲۱] مراجعه کنید. □

**تعریف ۴.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه و $H$ زیرگروهی از آن باشد. زیرگروه $H$ را یک زیرگروه مشخصه[۱] ی $G$ گوییم هرگاه به ازای هر خودریختی $G$ مانند $\alpha$، $H \leq \alpha(H)$ که در آن $\alpha(H) = \{\alpha(h) \mid h \in H\}$.*

*به آسانی معلوم می‌شود که اگر $H$ زیرگروه مشخصه‌ی $G$ باشد، آن‌گاه به ازای هر خودریختی $G$ مانند $\alpha$، $\alpha(H) = H$. هرگاه $H$ زیرگروه مشخصه‌ی $G$ باشد می‌نویسیم $H \overset{C}{\lhd} G$.*

**لم ۵.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این صورت*

*(i) $Z(G)$ زیرگروهی مشخصه از $G$ است.*

*(ii) $G'$ زیرگروهی مشخصه از $G$ است.*

***برهان.*** (i) فرض کنید $\alpha$ یک خودریختی دلخواه از گروه $G$ باشد. نشان می‌دهیم $\alpha(Z(G)) \leq Z(G)$. عنصر دلخواه $z \in Z(G)$ را در نظر بگیرید. کافیست نشان دهیم $\alpha(z) \in Z(G)$. فرض کنید $y$ عنصری دلخواه از $G$ باشد. چون $\alpha$ یک خودریختی است، لذا پوشاست و بنابراین وجود دارد $x \in G$ به طوری که $\alpha(x) = y$. از این رو داریم:

$$[\alpha(z), y] = [\alpha(z), \alpha(x)] = \alpha([z, x]) = \alpha(1) = 1$$

لذا اثبات کامل است.

(ii) فرض کنید $\beta$ یک خودریختی دلخواه از گروه $G$ باشد. نشان می‌دهیم $\beta(G') \leq G'$. برای این منظور با توجه به تعریف $G'$، کافیست نشان دهیم به ازای هر $x, y \in G$، $\beta([x, y]) \in G'$. چون $\beta$ یک خودریختی است، لذا پوشاست و بنابراین وجود دارند $u, v \in G$ به طوری که $\beta(x) = u$ و

[۱]characteristic subgroup