بسم الله الرحمن الرحیم

١٤٨٨٧٨

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم– گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

خواص کلاس های p ـارز از توابع تحلیلی و خوش ریخت تعریف شده توسط عملگرهای انتگرالی

نگارش

زهرا فرهاد توسکی

۱۳۸۹/۱۰/۱

استاد راهنما

دکتر سعید شمس

قدردانی و تشکر

سپاس خدای را که توفیق خود را قرین بنده کرد تا جان خود را از بارقه ی چراغ علم و دانش منور گرداند. سر تعظیم بر آستان بی کران حضرت دوست می سایم که علی رغم مشکلات فراوان و محنت بی پایان، یاری نمود تا تحقیق و تفحص در این زمینه را به انجام برسانیم.

از استاد راهنمایم، آقای دکتر سعید شمس ، کمال تشکر و قدردانی را دارم که در همه‌ی زمینه‌ها همکاری لازم را مبذول داشته‌اند و همیشه با صبر و حوصله مرا یاری نموده‌اند. لازم به‌ذکر است که ایشان در جمع آوری منابع و مقالات، ویرایش پایان‌نامه و به‌خصوص در حل مسائل و مشکلات آن، بیش از انتظار، مرا یاری کرده‌اند. برای ایشان موفقیت و سربلندی در همه‌ی عرصه‌های زندگی‌شان را از درگاه ایزد منان خواستارم.

از آقای دکتر علی عبادیان، نهایت تشکر را دارم که به جزء داوری این پایان نامه، کمک های فراوانی در پیشبرد این پایان نامه به من رساندند.

از آقای دکتر حسین سلیمانی که به جزء اینکه استادم بود، همیشه یار و پشتیبانم بود، اگر تشویق های ایشان نبود من به این درجه دست نمیافتم.

در این جا، از پدر و مادرم عزیز تر از جانم کمال تشکر و قدردانی را دارم که همیشه و در هر شرایطی یار و مشوق من در تمام زمینه های زندگی بوده اند. امیدوارم بتوانم ذره ی از لطف بی پایانشان را جبران کنم.

در این جا، جا دارد از دوستان عزیزم خانم ها صرافی، فصیحانی فرد، عاشوری، رضای و خانم دکتر سمیرا رهروی تشکر و قدردانی می کنم. امیدوارم همواره در پناه ایزد منان سر بلند و پیروز باشید.

فرهادتوسکی

اسفند ۱۳۸۹

پایان نامه خانم زهرا فرهاد توسلی به تاریخ ۸۸/۱۲/۳ شماره ۱۸۶-پ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ قرار گرفت.

1 – استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر سعید شمس

2 – استاد مشاور :

3 – داور خارجی: دکتر علی عبادیان

4 – داور داخلی : دکتر سعید استاد باشی

5 – نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حبیب اله نجار

چکیده

کلاس های $\mathbb{A}_p$ متشکل از توابعی به فرم

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p+n} \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ p \in \mathbb{N})$$

که در دیسک واحد باز U تحلیلی اند و Σ_p متشکل از توابعی به فرم

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-p} \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ p \in \mathbb{N})$$

که در دیسک واحد سفتهٔ باز U_0 تحلیلی هستند را در نظر گرفته و با استفاده از ضرب هادامارد عملگر خطی $L_p(a;c)f(z)$ را معرفی نموده و به کمک آن زیر کلاس های $Q_p(a,c;h)$ از $\mathbb{A}_p$ و همچنین $M_p(a,c,\lambda;h)$ از Σ_p را معرفی نموده و خواص آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل است. در سه فصل اول تمامی تعاریف بیان شده در کلاس های A_p و Σ_p بیان می کنیم.

فصل اول مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است که شامل سه بخش است. در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی از جمله قضیه ی مدول ماکزیمم رابیان می کنیم. در بخش دوم ابتدا تابع تک ارز و تابع $p-$ ارز را بیان می کنیم و قضایای مهمی را در این زمینه ذکر می کنیم. سپس به تعریف تابع محدب، ستاره گون و محدب وار می پردازیم. در بخش سوم ضرب پیچشی را بیان می کنیم و در پایان به معرفی تابع پیش ستاره گون می پردازیم.

فصل دوم از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول ابتدا به معرفی تابع فوق هندسی گاوس می پردازیم. سپس عملگر پیچشی (کوماتو) را تعریف می کنیم و خواص آن را بررسی می کنیم. در بخش دوم مشتق راشوویه را بیان و اثبات می کنیم. در بخش سوم به بیان مشتق عملگر می پردازیم و در ادامه کلاس $T_{n+p-1}(\alpha)$ را تعریف کرده و به کمک لم جک قضیه ی مهمی را اثبات می کنیم.

فصل سوم متشکل از دو بخش است. در بخش اول به تعریف پیروی می پردازیم در ادامه مجموعه ی p و غلاف محدب را تعریف می کنیم. در بخش دوم پیروی دیفرانسیل را معرفی می کنیم و لم ها و قضایای مهمی را بیان می کنیم. در ادامه به معرفی پیروی دیفرانسیل بریت — بوکات و عملگرهای انتگرالی لیبرا و برنارد می پردازیم.

فصل چهارم در سه بخش نوشته شده است. در بخش اول زیر کلاس $Q_p(a,c;h)$ از کلاس A_p را معرفی می کنیم و خواص آن را بررسی می کنیم. در ادامه دو لم بسیار مهم را بیان می کنیم که با کمک این لم ها تمامی قضایای این فصل اثبات می شود. در دو بخش بعدی این فصل روابط شمول و خواص

پیچشی به کمک قضایای مورد بررسی قرار می گیرد که نتایج مهمی در بر دارد.

فصل پنجم شامل چهار بخش است. در بخش اول به معرفی زیر کلاس $M_p(a,c,\lambda;h)$ از کلاس Σ_p می پردازیم. در بخش دوم روابط شمول در زیر کلاس $M_p(a,c,\lambda;h)$ را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس نمایش هرگولتز را تعریف می کنیم و از آن در اثبات قضایا استفاده می کنیم. در دو بخش پایانی قضایای مهمی را بیان و اثبات می کنیم.

در انتهای این پایان نامه منابع آورده شده است.

فصل ۱

مفاهیم اوّلیه

۱.۱ مقدمه

در این بخش به تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل بعد به آنها نیاز خواهیم داشت می پردازیم. در بخش دوم توابع چند ارز، ستاره‌گون ، پیش ستاره گون ومحدب و در بخش سوم به ضرب هادامارد می پردازیم .

تعریف ۱.۱.۱ اگر $r > 0$ و a عدد مختلط باشد $D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$ قرص مستدیر به مرکز a و شعاع r است که بست آن را با $\overline{D}(a,r) = \{z : |z-a| \leq r\}$ نمایش میدهیم و$D'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ را قرص سفته به مرکزa وشعاع r می نامیم .

تعریف ۲.۱.۱ گوییم مجموعه ی E در فضای توپولوژیک X ناهمبند است، هرگاه E اجتماع دو مجموعه ناتهی مانند A و B باشد که

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

مجموعه‌ی E را در فضای توپولوژیک X همبند گوییم هرگاه ناهمبند نباشد.

به‌عبارت دیگر مجموعه E را ناهمبند گوییم هرگاه مجموعه های باز غیر تهی A و B موجود باشند به

طوری که

$$E\cap B\neq\emptyset\ ,\ E\cap A\neq\emptyset\ ,\ E\cap A\cap B=\emptyset\ ,\ E\subset A\cap B$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض می کنیم f یک تابع مختلط در مجموعه باز Ω باشد. گوییم f در نقطه ی $z_\circ\in\Omega$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(z_\circ+h)-f(z_\circ)}{h}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می دهیم. هرگاه $f'(z_\circ)$ به ازای هر $z_\circ$ متعلق به Ω موجود باشد گوییم f در Ω تحلیلی است.

تعریف ۴.۱.۱ هر مجموعه باز و همبند ناتهی در $\mathbb{C}$ را یک ناحیه گوییم.

تذکر ۵.۱.۱ رده تمام توابع تحلیلی در ناحیه Ω را با $H(\Omega)$ نمایش میدهیم.

تذکر ٦.۱.۱ در کل این پایان نامه قرص واحد باز را با U نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ تابع f در Ω به وسیله سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r)\subset\Omega$ یک سری مانند $\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z\in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

تذکر ۸.۱.۱ هر گاه f به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f\in H(\Omega)$ است و f' نیز با سری توانی در Ω قابل نمایش است. در واقع به ازای هر $z\in D(a,r)$ اگر

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

آنگاه به ازای این z ها داریم

$$f'(z)=\sum_{n=\backslash}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-\backslash}.$$

تعریف ۹.۱.۱ گوییم نقطه a یک نقطه تکین تابع f است، اگر f در a تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی a تحلیلی باشد.

نقطهٔ تکین a را تنها نامیم هرگاه علاوه بر این، همسایگی محذوفی از a مانند $B'_\varepsilon(a)$ موجود باشد به طوری که f در سراسر آن تحلیلی است. یعنی در این همسایگی هیچ نقطهٔ تکین دیگری قرار نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $z = a$ یک نقطه تکین تنهای تابع f باشد. گوییم نقطه a یک قطب تابع f است هرگاه

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$$

یعنی به ازای هر $M > 0$ عددی مانند $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $0 < |z-a| < \varepsilon$ آنگاه $|f(z)| \geq M$. اگر یک نقطه تکین تنها نه قطب باشد نه نقطه تکین رفع شدنی، آنگاه یک نقطه تکین اساسی است.

تعریف ۱۱.۱.۱ تابع f در Ω را خوش ریخت گوییم اگر مجموعه‌ا ی مانند $A \subset \Omega$ چنان موجود باشد که:

(۱) A نقطه حدی در Ω نداشته باشد،

(۲) $f \in H(\Omega - A)$،

(۳)هرنقطه A یک قطب برای f باشد.

اگر $A = \emptyset$ آنگاه تابع f در تمام نقاط Ω تحلیلی است.

به عبارت دیگر تابع f خوش ریخت است اگر f در تمام Ω تحلیلی باشد مگر در تعداد متناهی نقطه که قطب های آن هستند.

قضیه ۱۲.۱.۱ قضیه مدول ماکزیمال [1] فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ در این صورت :

$$|f(a)| \leq \max |f(a + re^{i\theta})| \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f ثابت باشد.

برهان . (برهان خلف) فرض کنیم

$$|f(a)| > \max |f(a + re^{i\theta})| \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

دراین صورت بنا به تساوی پارسوال هرگاه به ازای هر $z \in D(a,r)$ داشته باشیم $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ آنگاه داریم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})^2| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} (|f(a)|^2)(2\pi) = |f(a)|^2$$
$$\Longrightarrow |f(a)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2$$
$$\Longrightarrow |c_0|^2 + |c_1|^2 r^2 + \cdots \leq |c_0|^2$$
$$\Longrightarrow |c_1|^2 r^2 + \cdots \leq 0$$
$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = 0$$

$$\Longrightarrow f(z) = c_0 \qquad \forall z_0 \in D(a,r)$$

و بنا به فرض $\overline{D}(a,r) \subseteq \Omega$ پس به ازای هر $z \in \Omega$ داریم:

$$f(z) = c_0 = f(a) \qquad \Longrightarrow |f(z)| = |f(a)|$$

[1] Maximum modulus' Theorem

$$\Longrightarrow |f(a+re^{i\theta})| = |f(c_\circ)|$$

که متناقض با فرض است.

در نتیجه $|f(a)| \leq \max|f(a+re^{i\pi})|$ و تساوی زمانی برقرار است که f ثابت باشد. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم $\alpha \in U$ و نگاشت ϕ_α بر U را با ضابطه ی زیر در نظر می گیریم:

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

و به آن نگاشت موبیوس می گوییم.

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنیم $\alpha \in U$ ثابت باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(۱) ϕ_α بر U یک به یک است. همچنین $\phi_\alpha \in H(\Omega)$،

(۲) معکوس ϕ_α را با $\phi_{-\alpha}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ تابع $f \in H(U)$ را یک تابع شوارتز[۲] می نامیم هر گاه:

(۱) برای هر $z \in U$، $|f(z)| \leq 1$ و

(۲) $f(\circ) = \circ$.

لم ۱۶.۱.۱ لم شوارتز[۳] فرض کنیم $f \in H(U)$ به طوری که:

(۱) برای هر $z \in U$، $|f(z)| \leq 1$ و

(۲) $f(\circ) = \circ$

در این صورت برای هر $z \in U$، $|f(z)| \leq |z|$ و $|f'(\circ)| \leq 1$ به علاوه اگر $|f'(\circ)| = 1$ یا برای $z \neq \circ$ یی واقع در U داشته باشیم $|f(z)| = |z|$ آن گاه عدد ثابت c یی موجود است به طوری که $|c| = 1$ و $f(z) = cz$ برای هر $z \in U$.

[۲] Schwarz Function
[۳] Schwarz's Lemma

برهان . به مرجع [۱۵] لم ۱۲ − ۲ مراجعه کنید. □

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم γ_0 ,γ_1 منحنی های بسته درفضای توپولوژیک X با بازه ی پارامتری $I=[0,1]$ باشد. گوییم γ_0 و γ_1 هموتوپ هستند هرگاه یک نگاشت پیوسته مانند H از مربع یکه ی I^2 به توی X چنان موجود باشد که به ازای هر $s\in I$ و $t\in I$ داریم:

$$H:\ I^2 \longrightarrow X$$

$$H(0,t)=H(1,t) \qquad H(s,1)=\gamma_1(s) \qquad H(s,0)=\gamma_0(s)$$

تعریف ۱۸.۱.۱ اگر γ_0 با نگاشت ثابت γ_1 هموتوپ باشد گوییم γ_0 در X هموتوپ پوچ است.

اگر X همبند باشد و هر منحنی ساده در X هموتوپ پوچ باشد گوییم X همبند ساده است.

۲.۱ توابع چند ارز، محدب و ستاره گون

تعریف ۱.۲.۱ تابع $f:\ E\longrightarrow \mathbb{C}$ که $E\subseteq\mathbb{C}$ را تک ارز[۴] گوییم هرگاه:

$$\forall z_1,z_2\in E \quad : \quad z_1\neq z_2 \quad \Longrightarrow f(z_1)\neq f(z_2)$$

مثال ۲.۲.۱ تابع $K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\cdots$ را در نظر می گیریم. این تابع در U تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد وبه تابع کوبه[۵] معروف است.

تعریف ۳.۲.۱ تابع f ،یک تابع p−ارز (چند ارز[۶]) است هرگاه هر مقداری را p بار بپذیرد. اگر f یک تابع p−ارز باشد و اگر $f(a)=b$ آنگاه $f(z)-b$ یک صفر از مرتبه p در $z=a$ دارد.

[۴] Univalent
[۵] Koebe Function
[۶] Multivalent Function

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم مجموعه $\mathbb{A}$ متشکل از تمام توابع تحلیلی در دیسک یکه باز U باشد و در شرایط نرمالیزه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق کند در نتیجه میتوان نوشت:

$$A = \{f \in H(U) \quad : \quad f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+1}\}.$$

مجموعه توابع تک ارز را با $\mathbb{S}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۲.۱ کلاس $\mathbb{A}_p$ متشکل از توابعی که در شرایطنرمالیزه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می کند را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{A}_p = \{f \in H(U) \quad : \quad f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+p} \quad (p \in \mathbb{N}) \quad \}$$

نکته ۶.۲.۱ مجموعه $\mathbb{A}_0$ شامل توابع $f \in \mathbb{A}_1$ است به طوری که $f(0) = 1$ باشد.

تعریف ۷.۲.۱ کلاس Σ_p از توابع تحلیلی در قرص سفته باز $U_0 = \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad 0 < |z| < 1 \ \}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-p} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

در این صورت تابع $f(z)$ در $z = 0$ یک قطب از مرتبهٔ p دارد.

تعریف ۸.۲.۱ مجموعه E را محدب[7] می نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه a, b متعلق به E، پاره خط واصل بین a, b یعنی $[a, b]$ تماماً در E قرار گیرد.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{C}$ و $a \in E$، مجموعه E را نسبت به a-ستاره گون[8] نامیم در صورتی که به ازای هر $b \in E$ پاره خطی که b را به a وصل می کند تماماً درون E قرار گیرد.

---

[7] Convex
[8] Starlike

تذکر ۱۰.۲.۱ یک مجموعه ی محدب نسبت به هر نقطه‌اش ستاره گون است ولی مجموعهٔ ستاره گون ممکن است محدب نباشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ تابع تک ارز $f \in H(U)$ را نسبت به مبدأ ستاره گون می نامیم هرگاه $f(U)$ نسبت به مبدأ ستاره گون باشد.

مجموعه تمام توابع ستاره گون نسبت به مبدأ در$\mathbb{A}$ را با $\mathbb{S}^*$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنیم $f \in A$. در این صورت داریم

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰ \qquad \forall z \in U \quad \Longleftrightarrow \quad f \in S^* \tag{۲}$$

برهان . به مرجع [۴] قضیه ی ۱۰ − ۲ مراجعه کنید. □

مثال ۱۳.۲.۱ تابع کوبه متعلق به $\mathbb{S}^*$ است زیرا:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱}{۱-z}\right\}$$

قرار می دهیم $w = \frac{۱}{۱-z}$ در نتیجه داریم:

$$۱ - z = \frac{۱}{w} \Longrightarrow z = \frac{w-۱}{w} \Longrightarrow \frac{|w-۱|}{|w|} = |z| < ۱$$

قرار می دهیم $w = u + iv$ پس

$$|w-۱| < |w| \Longrightarrow (u-۱)^۲ + v^۲ < u^۲ + v^۲ \Longrightarrow -۲u + ۱ < ۰ \Longrightarrow u > \frac{۱}{۲} > ۰$$

در نتیجه $Rew > ۰$ پس $Re\{\frac{۱}{۱-z}\} > ۰$.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنیم $f \in H(U)$ تک ارز باشد. گوییم f بر U محدب است هرگاه $f(U)$ محدب باشد. مجموعه تمام توابع محدب رابا $\mathbb{K}$ نشان می دهیم.

نتیجه ۱۵.۲.۱

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{S}^* \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{A}$$

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم $f \in H(\Omega)$ و $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ در این صورت:

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathbb{K} \tag{۳}$$

برهان . به مرجع [۴] قضیه ی ۱۱ − ۲ مراجعه کنید. □

تذکر ۱۷.۲.۱ اگر $f \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه $zf' \in \mathbb{S}^*$.

قضیه ۱۸.۲.۱ هرگاه $f \in \mathbb{S}^*$ باشد در این صورت تابع $g \in \mathbb{K}$ وجود دارد به طوری که $f = zg'$.

برهان .

$$f \in \mathbb{S}^* \quad \Longleftrightarrow \quad Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \circ \quad : \quad f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$$

حال تابع g بر U را با ضابطه زیر در نظر می گیریم

$$g(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{a_n}{z} z^n \quad \Longrightarrow \quad g \in \mathbb{A}$$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = zg'(z)$$

اینک چون $f'(z) = g'(z) + zg''(z)$ پس $\frac{zf'(z)}{f(z)} = ۱ + \frac{zg''(z)}{g'(z)}$، و چون f ستاره گون است لذا g محدب خواهد شد. □

تعریف ۱۹.۲.۱ گوییم تابع تحلیلی f در U محدب وار یا نزدیک به محدب [۹] است اگر تابع محدب g وجود داشته باشد، به طوری که

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > \circ \quad (z \in U). \tag{۴}$$

مجموعه تمام توابع محدب وار را با C نشان می دهیم.

[۹] Close-to-convex

قضیه ۲۰.۲.۱ تمامی توابع محدب، محدب وار هستند.

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{S}^* \subset C$$

برهان . فرض کنیم $f \in \mathbb{K}$ در این صورت $f \in \mathbb{S}^*$ پس $Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ پس بنا به قضیه ی قبل تابع $g \in \mathbb{K}$ موجود است به طوری که

$$f(z) = zg'(z)$$

آنگاه داریم

$$f(z) = zg'(z) \implies Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{zg'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

بنابراین $f \in C$، و برهان به پایان می‌رسد. □

تعریف ۲۱.۲.۱ تابع $f \in A_p$ را ستاره گون از مرتبه α در U گوییم در صورتی که در شرط زیر صدق کند:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > p\,\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{5}$$

همچنین تابع f را محدب p—ارز، از مرتبه α در U گوییم هرگاه:

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > p\,\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1). \tag{6}$$

تعریف ۲۲.۲.۱ تابع $f \in \Sigma_p$ را ستاره گون از مرتبه α می نامیم هرگاه:

$$-Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > p\,\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{7}$$

همچنین این تابع را محدب از مرتبه α می نامیم هرگاه:

$$-Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > p\,\alpha \quad (0 \le \alpha < 1). \tag{8}$$

۳.۱ ضرب پیچشی

دراین بخش ضرب پیچشی[10] در کلاس های A_p و Σ_p تعریف کرده و خواص آن را بیان میکنیم. در پایان بخش به معرفی تابع پیش ستاره گون می پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض می کنیم توابع زیر متعلق به کلاس A_p باشند:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+p} \quad , \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^{n+p} \quad (p \in \mathbb{N})\ (a_0 = b_0 = 1)$$

و در U تحلیلی هستند. آنگاه ضرب هادامارد (پیچشی) f, g را با $(f * g)(z)$ نشان می دهیم، و تعریف می کنیم:

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^{n+p} = (g * f)(z) \tag{9}$$

تعریف ۲.۳.۱ فرض می کنیم توابع زیر متعلق به Σ_p باشند:

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-p} \quad , \quad g(z) = z^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n-p}$$

ضرب هادامارد g , f رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f * g)(z) = z^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^{n-p} = (g * f)(z) \tag{10}$$

[10] Hadamard Product(or convolution)