دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مدول ها و حلقه های تقریبا کامل

نگارش

فاطمه فریدون

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر علی معدنشکاف

بهمن ماه ۱۳۹۰

قدردانی

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونم شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود و بهره مندی از علم و معرفت را روزیم فرمود.

سپاس از وجود مقدس

آنانکه ناتوان شدند و موی سفید کردند تا من به توانایی برسم و سفید روی شوم.

پدر و مادرم

آنکه زکات علمش را ترویج آن دانست و در این مسیر بی هیچ دریغ، روشنگر راهم بود.

استاد عزیزم

همچنین بر خود لازم می دانم که از اساتید ارجمند گروه ریاضی دانشگاه سمنان که سال های زندگی علمی خود را با عنایات و تلاش های ناتمام آنان سپری کردم، نهایت تشکر را داشته باشم.

تقدیم به :

پدر دلسوز و مادر عزیزم

و همسر مهربانم

چکیده

در این پایان نامه به بررسی خواص حلقه ها و مدول های تقریبا کامل می پردازیم.

ابتدا حلقه های تقریبا کامل را تعریف می کنیم و پس از تعریف مدول های هم تاب، ارتباط آن ها را با حلقه های تقریبا کامل بیان می کنیم. همچنین حلقه چند جمله ای های صوری را مورد بحث قرار می دهیم و ثابت می کنیم که اگر R، حلقه نیم ساده و یا آرتینی باشد، آن گاه $R[[x]]$ حلقه تقریبا کامل است.

در نهایت به معرفی مدول های تقریبا کامل می پردازیم و برخی از خصوصیات آنها را بیان می کنیم.

این پایان نامه برگرفته از منابع [۱] و [۲] می باشد.

واژه‌های کلیدی: مدول و حلقه تقریبا کامل ، مدول هم تاب ، روکش یکدست ، حلقه چند جمله ای های صوری ، حلقه کامل ، روکش تصویری ، حلقه نیم کامل.

مقدمه:

در سال ۱۹۵۳، اکمان [1] و اسچپف [2] [۶] وجود پوشش های انژکتیو مدول ها روی هر حلقه شرکت پذیر را ثابت کردند. وجود روکش های تصویری توسط باس [3] [۴] در سال ۱۹۶۰ مورد مطالعه قرار گرفت. علی رغم وجود پوشش های انژکتیو روی هر حلقه، او ثابت کرد که روی یک حلقه R، همه مدول های راست، روکش های تصویری دارند اگر و تنها اگر R یک حلقه کامل راست باشد. بعد از آن انواع مختلفی از روکش ها و پوشش ها تعریف شدند. برای مثال انوچ [4] در [۹] تاب روکش آزاد مدول ها را معرفی کرد و وارفیلد [5] در [۲۳] پوشش انژکتیو محض مدول ها را مطالعه کرد. سر انجام در سال ۱۹۸۱، انوچ [۸] یک تعریف رسته ای از روکش ها و پوشش ها برای مدول ها ارائه داد.

فرض کنید R یک حلقه و Ω یک کلاس از Rـمدول ها باشد که تحت کپی های یکریخت، بسته است. یک Ωـپیش روکش از یک Rـمدول M، یک همریختی $\phi : F \to M$ با $F \in \Omega$ است به قسمی که برای هر همریختی $\psi : G \to M$ با $G \in \Omega$، $\mu : G \to F$ وجود داشته باشد که $\phi\mu = \psi$. یک Ωـپیش روکش $\phi : F \to M$ را یک Ωـروکش گویند اگر هر برو ریختی λ از F با $\phi\lambda = \phi$، یک خودریختی از F باشد.

حال اگر Ω، کلاس همه مدول های یکدست باشد، یک Ωـروکش، معمولا یک روکش یکدست نامیده می شود. همچنین اگر Ω، کلاس مدول های تصویری باشد، یک Ωـروکش را یک روکش تصویری گوییم. انوچ در [۸] حدس زده است که هر مدول روی یک حلقه شرکت پذیر، یک روکش یکدست می پذیرد. برای اثبات این حدس، چندین نویسنده روکش های یکدست و مفاهیم مرتبط را مطالعه کردند و درستی این حدس را در بعضی موارد خاص اثبات نموده اند. سرانجام بعد از دو دهه، بیکن [6] در [۵] وجود روکش های یکدست روی هر حلقه شرکت پذیر را به دو روش مختلف ثابت کرد.

---

[1] Eckmann
[2] Schopf
[3] Bass
[4] Enochs
[5] Warfield
[6] Bican

حلقه R، تقریبا کامل راست نامیده می شود اگر هر Rـمدول راست یکدست، Rـتصویری باشد. به طور معادل، روکش های یکدست Rـمدول های راست متناهی مولد، تصویری هستند. این نشان می دهد که حلقه های کامل راست، تقریبا کامل راست هستند و حلقه های تقریبا کامل راست، نیم کامل هستند، اما برعکس آن ها صحیح نیست. در فصل ۲، ما حلقه های تقریبا کامل را دقیق تر مطالعه می کنیم. ما بعضی از مشخصه های جدید حلقه های تقریبا کامل را ارائه می دهیم. برای مثال ثابت می کنیم که حلقه R، تقریبا کامل راست است اگر و تنها اگر برای هر Rـمدول راست یکدست F و هر زیر مدول K از F، اگر $\frac{F}{K}$ متناهی مولد باشد آن گاه $F = P \oplus Q$ که P تصویری است و $Q \subseteq K$. به کمک این نتیجه نشان می دهیم که روی یک حلقه تقریبا کامل راست، مدول های راست یکدست با رادیکال بسیار کوچک، تصویری هستند. همچنین بیان شده است که، حلقه R، کامل راست است اگر و تنها اگر هر Rـمدول راست، هم تاب باشد (یادآوری می کنیم که یک Rـمدول C، هم تاب است اگر برای هر Rـمدول یکدست F، $Ext^1_R(F, C) = 0$). مشابه این نتیجه ثابت می کنیم که حلقه R، تقریبا کامل راست است اگر و تنها اگر هر ایده آل راست R، هم تاب باشد. آن گاه ما یک منبع غنی از حلقه های تقریبا کامل پیدا می کنیم که کامل نیستند. بدین وسیله ثابت می شود که برای یک حلقه آرتینی R، حلقه چندجمله ای های صوری $R[[x]]$، تقریبا کامل راست است. همچنین ما مثالی از یک حلقه تقریبا کامل R ارائه می دهیم که برای آن حلقه $R[[x]]$، تقریبا کامل نیست.

در فصل ۳، مفهوم مدول های تقریبا کامل را به عنوان تعمیمی از مفهوم حلقه های تقریبا کامل، بیان می کنیم. یعنی Rـمدول M را تقریبا کامل نامیم اگر روکش یکدست هر مدول خارج قسمتی M، تصویری باشد. نشان می دهیم که تقریبا کامل بودن تحت خارج قسمت، توسیع و جمع مستقیم متناهی بسته است. همچنین بعضی از خصوصیات مدول های تقریبا کامل داده شده است.

در این پایان نامه، همه حلقه ها شرکت پذیر با عنصر همانی اند و همه مدول ها، مدول های راست یکانی هستند مگر این که خلاف آن ذکر شده باشد. برای حلقه R، فرض کنید $J = J(R)$ رادیکال جیکوبسن R باشد. همچنین $\mathcal{M}_R$ رسته Rـمدول های راست است. $U(R)$ را نیز مجموعه عناصر وارون پذیر حلقه R تعریف می کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و قضایای اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد آشنا خواهیم شد که اکثر آن ها برگرفته از مرجع [۳] می باشد. در بخش اول مفاهیم مربوط به حلقه ها و رسته ها را بیان می کنیم.

۱.۱ مفاهیمی از حلقه ها و رسته ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید M یک Rـمدول مخالف صفر باشد. M را ساده نامیم هرگاه 0 و M تنها زیرمدول های M باشند.

Rـمدول M را نیم ساده گوییم هرگاه M حاصلجمعی از زیرمدول های ساده خودش باشد. یعنی $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ که S_iها زیر مدول های ساده M هستند.

در نتیجه با توجه به تعاریف بالا، حلقه R را نیم ساده گوییم، هرگاه R به عنوان Rـمدول نیم ساده باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در اینصورت اگر $\frac{R}{J(R)}$ نیم ساده باشد، آن گاه R را حلقه نیم موضعی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر $e \in R$ را خودتوان گوییم هرگاه $e^{2} = e$.

تعریف ۴.۱.۱ عنصر x از حلقه R را پوچ توان گوییم هرگاه عدد طبیعی چون n موجود باشد که $x^{n} = 0$.

تعریف ۵.۱.۱ زیر مجموعه A از حلقه R را پوچ گوییم هرگاه هر یک از عناصر A پوچ توان باشد.

تعریف ۶.۱.۱ یک زیرمجموعه I از یک حلقه R، Tـپوچ توان چپ است، اگر برای هر دنباله $a_{1}, a_{2}, \ldots$ در I، nای وجود داشته باشد که $a_{1}a_{2}\ldots a_{n} = 0$.
زیرمجموعه I، Tـپوچ توان راست است، اگر برای هر دنباله $a_{1}, a_{2}, \ldots$ در I، nای وجود داشته باشد که $a_{n}\ldots a_{2}a_{1} = 0$.

نتیجه ۷.۱.۱ طبق تعاریف ۵.۱.۱ و ۶.۱.۱، نتیجه می گیریم که هر مجموعه Tـپوچ توان I، پوچ است. زیرا برای هر $a \in I$، $a, a, a, \cdots$، دنباله ای در I است.

تعریف ۸.۱.۱ حلقه R نیم ابتدایی است هرگاه $\frac{R}{J}$ نیم ساده و J پوچ توان باشد.

تعریف ۹.۱.۱ رسته ای مانند $\mathcal{C}$، خانواده ای است متشکل از شیء هایی که معمولا آن ها را با A، B، C و ... نمایش می دهیم و به ازای هر دو شیء مانند A و B، مجموعه ای متناظر می شود که با $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیء مانند A، B، C و D که $(A,B) \neq (C,D)$، داریم:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset$$

با این ویژگی که به ازای هر سه شیء مانند A، B و C، تابع

$$\begin{array}{rcl} . : Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (g,f) & \longmapsto & gf \end{array}$$

موجود است که

(a) به ازای هر چهار شیء مانند A، B، C و D، اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$، آن گاه $h(gf) = (hg)f$.

(b) به ازای هر شیء مانند A، عضوی از $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ مانند ۱_A موجود است که به ازای هر عضو از $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ مانند f و هر عضو از $Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$ مانند g، $f۱_A = f$ و $۱_A g = g$.

تذکر ۱۰.۱.۱ در رسته ای چون $\mathcal{C}$، به ازای هر دو شیء مثل A و B، هر عضو از $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ را ریختار از A به B می نامند. نماد $f : A \to B$ هم یعنی این که f ریختاری از A به B است.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون همورد(پادورد) از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است. یکی تابع شیء که به هر شیء از $\mathcal{C}$ مثل A، شیء $F(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد

و دیگری تابع ریختار که آن را هم با F نشان می دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$، ریختاری از $\mathcal{D}$ مثل $F(f) : F(A) \to F(B)$ ($F(f) : F(B) \to F(A)$) نسبت می دهد با این ویژگی که :

(۱) به ازای هر شیء از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(1_A) = 1_{F(A)}$ ($F(1_A) = 1_{F(A)}$).

(۲) به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$ و $g : B \to C$؛ $F(gf) = F(g)F(f)$
($F(gf) = F(f)F(g)$).

به طور مثال $Hom_R(-, M)$ تابعگونی پادورد است و $Hom_R(M, -)$ و $- \otimes_R M$ تابعگون های همورد هستند.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید F و G دو تابعگون همورد از رسته $\mathcal{C}$ به رسته $\mathcal{D}$ باشند. در اینصورت تبدیل طبیعی از F به G، تابعی مانند σ است که به هر شیء از $\mathcal{C}$ مانند A، ریختار $\sigma(A) : F(A) \to G(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد با این ویژگی که به ازای هر ریختار از $\mathcal{C}$ مانند $f : A \to B$، نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\
\sigma(A)\downarrow & & \downarrow\sigma(B) \\
G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B)
\end{array}$$

(اگر F و G پادورد باشند، سطرهای $F(f)$ و $G(f)$ برعکس می شوند).

اگر برای هر شیء از $\mathcal{C}$ مانند A، $\sigma(A) : F(A) \to G(A)$ تابعی دوسویی باشد، آن گاه تبدیل طبیعی σ را یکریختی طبیعی از F به G می نامیم و می نویسیم $F \cong G$.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته های دلخواه باشند. آن گاه یک تابعگون همورد $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ یک هم ارزی رسته است، اگر یک تابعگون (الزاما) همورد $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ و یکریختی های

طبیعی $GF \cong ۱_{\mathcal{C}}$ و $FG \cong ۱_{\mathcal{D}}$ وجود داشته باشند. دو رسته هم ارزند اگر یک هم ارزی رسته ای از یکی به دیگری وجود داشته باشد. در این صورت می نویسیم $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$.

تعریف ۱۴.۱.۱ تابعگون T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ جمعی نامیده می شود اگر برای هر هر جفت ریختار f و g در $\mathcal{C}$ داشته باشیم:

$$T(f+g) = T(f) + T(g)$$

نمادگذاری ۱۵.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ رسته ای دلخواه باشد. مجموعه اشیاء رسته $\mathcal{C}$ را با $obj(\mathcal{C})$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ رسته $\mathcal{S}$ یک زیررسته از رسته $\mathcal{C}$ است، اگر:

۱) $obj(\mathcal{S}) \subseteq obj(\mathcal{C})$.

۲) برای هر $A, B \in obj(\mathcal{S})$، $Hom_{\mathcal{S}}(A,B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

۳) اگر $f \in Hom_{\mathcal{S}}(A,B)$ و $g \in Hom_{\mathcal{S}}(B,C)$، آن گاه ترکیب $gf \in Hom_{\mathcal{S}}(A,C)$ با ترکیب $gf \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ برابر باشد.

۴) اگر $A \in obj(\mathcal{S})$، آن گاه عنصر همانی $۱_A \in Hom_{\mathcal{S}}(A,A)$ با عنصر همانی $۱_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ برابر باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ یک زیررسته $\mathcal{S}$ از $\mathcal{C}$ یک زیررسته کامل است اگر برای هر $A, B \in obj(\mathcal{S})$، داشته باشیم $Hom_{\mathcal{S}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ زیررسته هایی کامل از رسته مدول ها باشند و همچنین فرض کنید $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ یک تابعگون همورد باشد. اگر برای دنباله دقیق کوتاه در $\mathcal{C}$ چون

$$\circ\to K\to M\to N\to\circ$$

دنباله

$$\circ\to F(K)\to F(M)\to F(N)$$

در $\mathcal{D}$ دقیق باشد، آن گاه گوییم F دقیق چپ است. همچنین اگر

$$F(K)\to F(M)\to F(N)\to\circ$$

در $\mathcal{D}$ دقیق باشد، F را دقیق راست گوییم. در حالت پادورد نمودارهای تعریف شده به صورت

$$\circ\to G(N)\to G(M)\to G(K)$$

برای دقیق چپ و

$$G(N)\to G(M)\to G(K)\to\circ$$

برای دقیق راست است.
تابعگونی که هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد، تابعگون دقیق گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱ یک مجموعه جزئی مرتب مجموعه ای است مانند X همراه با رابطه ای چون $\leq$ روی X که منعکس (برای هر $x\in X$، $x\leq x$)، متعدی (برای هر $x,y,z\in X$، اگر $x\leq y$ و $y\leq z$، آن گاه $x\leq z$) و پادمتقارن (برای هر $x,y\in X$، اگر $x\leq y$ و $y\leq x$، آن گاه $x=y$) باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱ یک مجموعه خوش ترتیب یک مجموعه جزئی مرتب چون X است که هر زیرمجموعه ناتهی S از آن یک عضو حداقل دارد. یعنی یک عنصر s از S هست که $s \leq x$ برای هر $x \in S$.

تعریف ۲۱.۱.۱ گوییم مجموعه A دارای خاصیت تعدی است اگر از این که $t \in A$ و $u \in t$، بتوان نتیجه گرفت که $u \in A$. یعنی هر عضو A یک زیرمجموعه از A است.

تعریف ۲۲.۱.۱ یک عدد ترتیبی یک مجموعه خوش ترتیب است که خاصیت تعدی دارد.

تعریف ۲۳.۱.۱ یک عدد ترتیبی α، تالی است اگر یک عدد ترتیبی β وجود داشته باشد که $\alpha = \beta + ۱$.

یک عدد ترتیبی α، عدد ترتیبی حدی است اگر $\alpha \neq ۰$ و همچنین α تالی نباشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ حلقه R را یک حلقه موضعی گوییم هرگاه مجموعه عناصر معکوس ناپذیر R، تحت جمع بسته باشند.

حلقه جابجایی R را یک حلقه موضعی گوییم هرگاه R تنها یک ایده آل ماکسیمال منحصربه فرد داشته باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنید I یک ایده آل از حلقه R باشد. گوییم خودتوان ها به پیمانه I بالا برده می شوند هرگاه برای هر $x \in R$ که $x^۲ - x \in I$، عنصر خودتوان $e \in R$ موجود باشد به طوریکه

$x - e \in I$. به عبارت دیگر اگر $x + I$ عنصر خودتوانی از حلقه $\frac{R}{I}$ باشد، آن گاه عنصر خودتوان $e \in R$ یافت شود که $x + I = e + I$.

تعریف ۲۶.۱.۱ حلقه R را نیم کامل [۱] می نامیم هرگاه $\frac{R}{J}$ نیم ساده باشد و خودتوان ها به پیمانه $J(R)$ بالا برده شوند. حلقه های موضعی و آرتینی چپ (راست) نمونه هایی از این حلقه ها هستند.

[۱] semiperfect

۲.۱ مفاهیمی از مدول ها

در این بخش به بیان مفاهیمی از مدول ها می پردازیم که در فصل های آینده به آن ها نیاز می باشد.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید M یک Rـمدول راست و K یک زیر مدول M باشد. اگر برای هر زیرمدول از M چون L، از $K + L = M$ بتوان نتیجه گرفت که $L = M$، K را زیرمدول بسیار کوچک در M می گوییم و می نویسیم $K << M$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیدM و N، Rـمدول راست باشند. گوییم بروریختی $g : M \to N$ بسیار کوچک است اگر $kerg << M$.

تعریف ۳.۲.۱ Rـمدول P را تصویری گوییم هرگاه به ازای هر بروریختی $f : M \to N$ بین Rـمدول های M و N و هر همریختی $g : P \to N$، همریختی $h : P \to M$ وجود داشته باشد که $fh = g$.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید M یک Rـمدول راست باشد. زوج (P, f) یک روکش تصویری از Rـمدول M است در صورتیکه P، Rـمدول راست تصویری و $P \xrightarrow{f} M \to 0$ بروریختی بسیار کوچک باشد(یعنی $kerf << P$) . می توان خود P را هم یک روکش تصویری M نامید.

تعریف ۵.۲.۱ حلقه R را کامل [۲] چپ گوییم، هرگاه هر Rـمدول چپ یک روکش تصویری داشته باشد.

[۲] perfect

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید M یک Rـمدول باشد. Rـمدول U، Mـیکدست است، اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول $K \leq M$، دنباله $0 \to U \otimes_R K \to U \otimes_R M$ دقیق باشد.

تعریف ۷.۲.۱ Rـمدول F را یکدست گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول K از هر Rـمدول راست مانند M، دنباله $0 \to K \otimes_R F \to M \otimes_R F$ دنباله ای دقیق از $\mathbb{Z}$ـهمریختی ها باشد.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید M یک Rـمدول راست، F یک Rـمدول راست یکدست و $\phi : F \to M$ یک همریختی از Rـمدول های راست باشد. آن گاه ϕ یک پیش روکش یکدست از M نامیده می شود، اگر برای هر $\psi : F' \to M$ که ψ یک همریختی با Rـمدول راست یکدست F' است، $h : F' \to F$ موجود باشد که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} & & F' \\ & \exists h \swarrow & \downarrow \psi \\ F & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

تعریف ۹.۲.۱ در تعریف بالا، $\phi : F \to M$ را یک روکش یکدست گوییم اگر هر درون ریختی $i : F \to F$ با شرط $\phi i = \phi$، یک خودریختی از F، باشد.

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \exists\, i \swarrow & \downarrow \phi \\ F & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید A، B و C، Rـمدول راست باشند. در اینصورت دنباله $A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{\sigma} C$ دقیق است، اگر $ker\sigma = Imd$. همچنین این دنباله مختلط است، اگر $\sigma d = ۰$. یعنی $Imd \subseteq ker\sigma$.

تعریف ۱۱.۲.۱ یک تحلیل تصویری از Rـمدول راست B که به صورت $< P_i, d_i >$ نمایش داده می شود، دنباله دقیقی ازRـمدول های راست همانند زیر است که در آن P_i ها Rـمدول های تصویری و d_i ها Rـمدول همریختی هستند.

$$\cdots \longrightarrow P_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \longrightarrow B \longrightarrow ۰$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید C، B و P_i ها برای هر i، Rـمدول های راست باشند. باتوجه به تحلیل تصویری

$$\cdots \longrightarrow P_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \longrightarrow B \longrightarrow ۰$$

و همچنین با حذف کردن جمله $Hom(B,C)$، داریم:

$$۰ \xrightarrow{Hom(d_۰, ۱_C)} Hom(P_۰, C) \xrightarrow{Hom(d_۱, ۱_C)} Hom(P_۱, C) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Hom(P_{n-۱}, C)$$

$$\xrightarrow{Hom(d_n,1_C)} Hom(P_n,C) \xrightarrow{Hom(d_{n+1},1_C)} Hom(P_{n+1},C) \longrightarrow \cdots$$

nامین همولوژی از این دنباله یعنی $\frac{ker(Hom(d_{n+1},1_C))}{Im(Hom(d_n,1_C))}$ را $Ext^n(B,C)$ گوییم. پس:

$$Ext^n(B,C) \cong \frac{ker(Hom(d_{n+1},1_C))}{Im(Hom(d_n,1_C))} \qquad , \qquad Ext^\circ(B,C) = Hom(B,C)$$

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید A، B و C، Rـمدول باشند. دو همریختی $f: B \to A$ و $g: C \to A$ داده شده است. یک عقب بر[3]، یک سه تایی (D,α,β) است به قسمی که $g\alpha = f\beta$ (یعنی دیاگرام زیر جابجایی باشد):

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \downarrow\beta & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

و برای هر (X,α',β') که $g\alpha' = f\beta'$، یک نگاشت منحصر به فرد $\theta: X \to D$ وجود داشته باشد که

$$\alpha\,\theta = \alpha' \quad , \quad \beta\,\theta = \beta'$$

عقب بر را اغلب با $B \sqcap_A C$ نشان می دهند.

[3] $pullback$