بسم الله الرحمن الرحیم

گروه ریاضی

عنوان:

تعریف و ویژگی‌های اساسی ضربگرهای بسل

استاد راهنما:
دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور:
دکتر قاسم نریمانی

دانشجو:
مرتضی رحیمی

دانشگاه محقق اردبیلی

مهر ۱۳۸۹

دانشکده علوم

تعریف و ویژگی های اساسی ضربگرهای بسل

پژوهشگر:

مرتضی رحیمی

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز)
از
دانشگاه محقق اردبیلی
اردبیل- ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی ....

دکتر عباس نجاتی (استاد راهنما)..استادیار

دکتر قاسم نریمانی (استاد مشاور)..استادیار

دکتر اصغر رحیمی (داورخارجی)..استادیار

دکتر محمد رضا عبدالله پور (داورداخلی)..استادیار

مهرماه 1389

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و

همه ی خواهران و برادران عزیزم

تقدیر و سپاسگزاری :

با سپاس به درگاه آن یزدان پاک که مرا توانائی اندیشیدن آموخت و امید آن دارم که با یاری آن قادر مطلق بتوانم گامهایی فراتر از این را در راه تحصیل علم بردارم.

در اینجا بر خود لازم می دانم که از استاد عزیزم جناب آقای دکتر عباس نجاتی سپاسگزاری و قدردانی کنم که راهنمایی پایان نامه اینجانب را تقبل فرمودند. همچنین از جناب آقای دکتر نریمانی که زحمت مشاوره پایان نامه را پذیرفتند سپاسگزارم.

در پایان از همه اعضای خانواده ام که در تمام دوران تحصیلاتم همواره مشوق من بودند، نهایت سپاس گزاری را دارم.

مرتضی رحیمی

مهر ۱۳۸۹

نام خانوادگی: رحیمی　　　　　　　**نام:** مرتضی
عنوان پایان‌نامه: تعریف و ویژگی‌های اساسی ضربگرهای بسل
استاد راهنما: دکتر عبّاس نجاتی **استاد مشاور:** دکتر قاسم نریمانی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　**رشته:** ریاضی محض　**گرایش:** آنالیز　**دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم　**تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۸۹/۷/۷　**تعداد صفحه:** ٥٤
کلید واژه‌ها: دنباله‌ی بسل؛ ضربگر بسل؛ نرم بسل؛ پایه‌های ریس؛ ضربگرهای ریس؛ ضرب تانسوری.

چکیده: در این پایان نامه مفهوم ضربگرهای بسل معرفی می‌شود. این عملگرها با یک الگوی ضرب مشخص که بین عملگرهای تجزیه و ترکیب جا داده شده، تعریف شده و خاصیت‌های اساسی این رده از عملگرها بررسی خواهد شد. در واقع با فرض این که $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ فضاهای هیلبرت باشند و $(\psi_k)_{k\in K} \subset \mathcal{H}_1$ و $(\phi_k)_{k\in K} \subset \mathcal{H}_2$ دنباله‌های بسل باشند و $m \in \ell^\infty(K)$، ضربگر بسل به عنوان عملگری برای دنباله‌های بسل (ψ_k) و (ϕ_k) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_{m,(\phi_k),(\psi_k)} \ : \ \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \ , \qquad M_{m,(\phi_k),(\psi_k)}(f) = \sum_k \ m_k \langle f, \psi_i \rangle \phi_k$$

که دنباله‌ی $m \in \ell^\infty(K)$، نماد M نامیده می‌شود. یکی از نتایج مهم، مرتبط بودن نماد با عملگر است. اگر نماد در فضاهای دنباله‌ای ℓ^∞, c_0, ℓ^1 یا ℓ^2 انتخاب شود، آنگاه ضربگر بسل به ترتیب، کراندار، فشرده، رده‌ی اثر یا عملگر هیلبرت ـ اشمیت خواهد بود. همچنین ثابت خواهیم کرد که برای پایه‌های ریس، ضربگرهای بسل رفتار خوبی دارند و نگاشت از نماد به عملگر یک به یک است. از نتایج دیگر این است که ضربگرهای بسل بطور پیوسته به نماد و دنباله‌های بسل بکار گرفته شده، وابستگی دارند و بدین جهت بررسی پریشندگی دنباله‌های بسل مهم است.

فهرست مندرجات

صفحه | **عنوان**

فصل اول

پیشینه ی پژوهش

آنالیز فوریه دو قرن پیش توسط اویلر، برنولی و فوریه با بررسی سری‌های مثلثاتی پایه ریزی و با تلاش دانشمندانی چون دیریکله، ریمان، کانتور و لبگ روی مسائل حساس و دقیق همگرایی شکل کاملتری به خود گرفت. شروع دوره‌ی آنالیز تابعی در ابتدای قرن بیستم میلادی نیز تاثیر بسزایی در پیشرفت آنالیز فوریه گذاشت. به خصوص با ظهور عملگرها و نظریه توزیع‌ها، همچنین با وارد کردن مفاهیم جبری در مسائل آنالیز فوریه پیشرفت این شاخه علمی دو چندان شد.

معمولاً برای دسترسی به مشخصه‌ی خاص یک سیگنال از تبدیلات مختلفی استفاده می‌شود. یک تبدیل در واقع بیانی از سیگنال است که موجب تغییر فضای سیگنال می گردد. در ابتدای قرن بیستم میلادی تبدیل فوریه مناسب‌ترین تبدیل برای پردازش سیگنال بود. این تبدیل در بررسی سیگنال‌ها، این امکان را فراهم می آورد که به جای درگیر شدن با تحلیل تفضیلی آنها در حوزه‌ی زمان، در حوزه‌ی فرکانس آنها را مورد بررسی قرار دهیم.

در سال ۱۹۴۶ یک فیزیکدان به نام گابور برای اندازه گرفتن مولفه‌های فرکانسی اصوات به جای استفاده از انتگرال فوریه، تبدیل دیگری تعریف کرد که این تبدیل به نام‌های تبدیل گابور، تبدیل فوریه‌ی زمان کوتاه و تبدیل فوریه‌ی پنجره‌دار شده خوانده شد. او برای بدست آوردن این تبدیل از طرز کار سیستم شنوایی انسان الهام گرفت.

اگر چه تبدیل فوریه و تبدیل فوریه‌ی زمان کوتاه برای مدّتی بکار رفته است، فقط در چند سال اخیر زمینه‌ی متمرکزی بنام « پردازش سیگنال ریاضی » تعریف شده و دنبال می‌شود. ارتباط بین نظریه و کاربرد با اصطلاح نظریه‌ی گابور به نتایج جالبی منجر شده است.

آنالیز گابور اسم ریاضی برای تبدیل فوریه زمان کوتاه است که یک روش آنالیز فرکانس ـ زمان است. این زمینه‌ی ریاضی جواب سوالات زیادی را که در ارتباط با کاربردها هستند بدنبال دارد. برای مثال چگونه پارامترهای یک سیستم تجزیه ـ ترکیب را انتخاب کنیم به طوری که نوسازی کاملی بدست آوریم.

بسیاری از کاربردها یک اصلاح روی ضرایب حاصل از عمل تجزیه بکار می‌برند. اگر اصلاح ضرایب حوزه‌ی زمان بوسیله‌ی ضرب آنها در یک تابع در حوزه‌ی فرکانس انجام شود، فرآیند کلی فیلتر کردن نامتغیر زمانی نامیده می‌شود. این فن برای مدّت زیادی بکار برده شد و برد وسیعی از کاربردها(به طور مثال برای بهبود صدا در ارتباطات تلفنی) را به خود اختصاص داد. تعمیمی از این فن که فیلتر کردن متغیر زمانی نامیده می‌شود در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. ضربگرهای گابور حالت‌های ویژه‌ای از فیلترهای متغیر زمانی هستند. در این حالت سیگنال به حوزه‌ی فرکانس ـ زمان تبدیل می‌شود و ضرایب حاصل به تابعی در همان حوزه ضرب می‌شوند. این ضربگرها به طور برجسته‌ای در [ ] بررسی شده‌اند.

اگر روش دیگری برای محاسبه این ضرایب انتخاب شود و یا ترکیب دیگری مورد استفاده قرار گیرد باز هم اصطلاحات زیادی می‌تواند به عنوان ضربگرها اعمال شود. برای مثال تعریف ضربگرهای موجک کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد. همچنین چون قاب‌های گابور نامنظم بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند، ضربگرهای گابور روی مجموعه‌های نامنظم مورد بررسی قرار گرفته‌اند [ ]. در این حالت نامنظم چون مجموعه مورد نظر یک شبکه تشکیل نمی‌دهد، هیچ نوع ساختار گروهی برای بکار بردن وجود ندارد. بنابراین در این حالت کاملاً طبیعی است که

حتّی بیشتر کلیّت بدهیم و ضربگرها را برای قاب‌ها بدون هیچ ساختار دیگری مورد بررسی قرار دهیم. انواع خاص دنباله‌ها کاربردهای فراوانی دارند و مزیت اصلی آنها این است که توجیه ضرایب تجزیه را ممکن می‌سازند.

بنابراین بررسی عملگرهای $M = \sum_k m_k \langle f, \psi_k \rangle \phi_k$ (که در آن ضرایب تجزیه $\langle f, \psi_k \rangle$ قبل از ترکیب شدن با ϕ_k در نماد ثابت (m_k) ضرب می‌شوند) برای دنباله‌های بسل خیلی طبیعی و مفید است. این‌ها همان ضربگرهای بسل هستند و کاربردهای فراوانی‌از این نوع عملگرها وجود دارد.

قاب‌ها برای فضای هیلبرت به طور صوری به وسیله‌ی دافین و شیفر در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه‌ی برخی مسائل جدی در زمینه‌ی آنالیز فوریه غیر هارمونیک تعریف شدند. اساساً دافین و شیفر ایده‌ی اصلی گابور را برای پردازش سیگنال به شکل مجرد در آوردند. با وجود این به نظر نمی‌رسید که ایده‌های دافین و شیفر در خارج از زمینه‌ی سری‌های فوریه‌ی غیر هارمونیک به کار گرفته شوند تا این که مقاله‌ی اساسی دابچیز، گراسمان و می‌یر در سال ۱۹۸۶ منتشر شد. بعد از انتشار این مقاله‌ی مهم، مقوله‌ی قاب‌ها به طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفت که حاصل آن تشکیل گروه‌های تحقیقاتی و انتشار مقالات فراوان در این زمینه و کاربردهای آن است.

فصل دوم

تعاریف و نتایج مقدماتی

۱.۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲. دنباله‌ی $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ ضرایب اسکالر منحصربفرد $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ موجود باشند به طوری که

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \ .$$

تعریف ۲.۲. دو دنباله‌ی $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ و $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ دو به دو متعامد نامیده می‌شوند هرگاه $\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{kj}$.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ یک پایه یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شوند هرگاه $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$.

قضیه ۴.۲ عبارات زیر معادل‌اند.

(۱) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه یکامتعامد است.

(۲) $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

(۳) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$.

(۴) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

(۵) $\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$.

(٦) اگر $\langle f, e_k \rangle = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$ آنگاه $f = 0$.

تعریف ۵.۲. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ جدایی پذیر نامیده می‌شود هرگاه دارای زیرمجموعه‌ی چگال و شمارش پذیر باشد.

قضیه ٦.۲ ([?] قضیه ۴.۴.۳) هر فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ یک پایه یکامتعامد دارد.

تعریف ۷.۲. دنباله‌ی $(f_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}$ همگرای غیر شرطی به $f \in \mathcal{H}$ نامیده می‌شوند هرگاه به ازای هر شمارش $\pi : I\!N \to K$، دنباله‌ی مجموع‌های جزئی سری $\sum_{\pi(k)} f_{\pi(k)}$ همگرا به f باشد.

۲.۲ عملگر کراندار روی فضای هیلبرت

فرض کنیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای هیلبرت[1] باشند و $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ مجموعه عملگرهای خطی کراندار از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ باشد که برای عملگر $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ نرم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\|T\|_{op} = \sup\{\|T(x)\|_{\mathcal{H}_2} \ : \ \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\} \ .$$

$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ با نرم $\|.\|_{op}$ یک فضای باناخ[2] است.

[1] Hilbert
[2] Banach

تعریف ۸.۲. فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$. در این صورت عملگر منحصربفردی که آن را با T^* نشان می‌دهیم وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\langle T(h_۱), h_۲\rangle \ = \ \langle h_۱, T^*(h_۲)\rangle \quad \forall h_۱ \in \mathcal{H}_۱, \forall h_۲ \in \mathcal{H}_۲ \ .$$

T^* عملگر الحاقی عملگر T نامیده می‌شود و $\|T\|_{op} = \|T^*\|_{op}$.

تعریف ۹.۲. عملگر $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ را با رتبه‌ی متناهی گوییم هرگاه $\mathcal{R}_T$ از بعد متناهی باشد.

تعریف ۱۰.۲. عملگر $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ را فشرده می‌نامیم هرگاه $\overline{T(B_۱)}$ فشرده باشد که در آن $B_۱$ گوی واحد بسته در $\mathcal{H}_۱$ است.

با توجه به اینکه در فضای از بعد متناهی ، گوی واحد بسته فشرده است، بنابراین عملگرهای با رتبه‌ی متناهی فشرده‌اند.

قضیه ۱۱.۲ ([?] قضیه ۲.۴.۴) اگر $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ آنگاه عبارت‌های زیر معادل‌اند.

(۱) T فشرده است.

(۲) دنباله‌ی $\{T_n\}$ از عملگرهای با رتبه‌ی متناهی وجود دارد به طوری که $\|T - T_n\| \longrightarrow ۰$.

لم ۱۲.۲ اگر $T \in B(\mathcal{H})$ و $\|I - T\| < ۱$ آنگاه T معکوسپذیر است.

تعریف ۱۳.۲. عملگر $T \in B(\mathcal{H})$ مثبت نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $h \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle T(h), h\rangle \geq ۰$ و به صورت $T \geq ۰$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۲ اگر $T \in B(\mathcal{H})$ مثبت باشد آنگاه T ریشه‌ی دوم مثبت منحصربفرد دارد که آن را با $T^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهیم . T و $T^{\frac{۱}{۲}}$ با هم جابجا می‌شوند و اگر T معکوسپذیر باشد $T^{\frac{۱}{۲}}$ نیز معکوسپذیر است. همچنین اگر $S \in B(\mathcal{H})$ با T جابجا شود آنگاه S با $T^{\frac{۱}{۲}}$ نیز جابجا می‌شود.

برای دیدن برهانی از قضیه‌ی فوق به [?] رجوع کنید.

توجه: T^*T یک عملگر مثبت است و ریشه‌ی دوم مثبت آن را با $|T|$ نشان می‌دهیم یعنی $|T| = (T^*T)^{\frac{۱}{۲}}$.

قضیه ۱۵.۲ فرض کنید $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ عملگرهای خودالحاقی باشند. فرض کنید $T_۱ \leq T_۲$ و $۰ \leq T_۳$ و $T_۳$ با $T_۱$ و $T_۲$ جابجا شود. آنگاه $T_۱T_۳ \leq T_۲T_۳$.

برای دیدن برهانی از این قضیه به [?] مراجعه کنید.

۳.۲ ضرب تانسوری

تعریف ۱۶.۲. فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_۱$ و $g \in \mathcal{H}_۲$. در این صورت ضرب تانسوری[۳](داخلی) $f \otimes_i \overline{g}$ به عنوان عملگری از $\mathcal{H}_۲$ به $\mathcal{H}_۱$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f \otimes_i \overline{g})(h) \ = \ \langle h, g\rangle f \ , \quad \forall f \in \mathcal{H}_۲ \ .$$

هر عنصر در برد این عملگر به صورت ضریبی از f است لذا برد این عملگر از بُعد ۱ یا ۰ است بنابراین فشرده است. این عملگر یک عملگر خطی کراندار از $\mathcal{H}_۲$ به $\mathcal{H}_۱$ است به طوری که $\|f \otimes_i \overline{g}\|_{op} = \ \|f\|_{\mathcal{H}_۱}\|g\|_{\mathcal{H}_۲}$. زیرا

$$\begin{aligned}\|f \otimes_i \overline{g}\| &= \sup_{\|h\|\leq ۱} \|(f \otimes_i \overline{g})(h)\| = \sup_{\|h\|\leq ۱} \|\langle h, g\rangle f\| \\ &= \sup_{\|h\|\leq ۱} |\langle h, g\rangle| \ \|f\| = \|f\| \sup_{\|h\|\leq ۱} |\langle h, g\rangle| \leq \|f\| \sup_{\|h\|\leq ۱} \|h\| \ \|g\| \quad \leq \|f\| \ \|g\| \ .\end{aligned}$$

با فرض $g \neq ۰$ داریم

$$\|(f \otimes_i \overline{g})(\frac{g}{\|g\|})\| = \|\langle \frac{g}{\|g\|}, g\rangle f\| = |\langle \frac{g}{\|g\|}, g\rangle| \ \|f\| = \|g\| \ \|f\| \ \ .$$

برای $g = ۰$ بدیهی است.

۴.۲ عملگرهای رده‌ی اثر

تعریف ۱۷.۲. $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ را یک عملگر رده‌ی اثر گوییم هرگاه دنباله‌های $(f_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}_۱$ و $(g_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}_۲$ موجود باشند به طوری که

$$\sum_k \|f_k\|_{\mathcal{H}_۱} \ \|g_k\|_{\mathcal{H}_۲} \ < \ \infty$$

و به ازای هر $f \in \mathcal{H}_۱$

$$T(f) \ = \ \sum_k \langle f, f_k\rangle g_k \ = \ \sum_k (g_k \otimes_i \overline{f}_k)(f) \ .$$

فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ یک عملگر رده‌ی اثر باشد. نرم رده‌ی اثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\|_{trace} \ = \ \inf \sum_k \|f_k\|_{\mathcal{H}_۱}\|g_k\|_{\mathcal{H}_۲} \ .$$

برای عملگر رده‌ی اثر T داریم

$$\|T\|_{op} \ = \ \|\sum_k (g_k \otimes_i \overline{f}_k)\|_{op} \leq \sum_k \|g_k \otimes_i \overline{f}_k\|_{op} = \sum_k \|f_k\| \ \|g_k\|$$

پس $\|T\|_{op} \leq \|T\|_{trace}$. لذا اگر $f \in \mathcal{H}_۱$ و $g \in \mathcal{H}_۲$، آنگاه

$$\|f\| \ \|g\| = \|f \otimes_i \overline{g}\|_{op} \leq \|f \otimes_i \overline{g}\|_{trace} \ .$$

و نیز داریم $\|f \otimes_i \overline{g}\|_{trace} \leq \|f\| \ \|g\|$ لذا $\|f \otimes_i \overline{g}\|_{trace} = \|f\| \ \|g\|$.

[۳] Tensor

گزاره ۱۸.۲ عملگر رده‌ی اثر عملگری فشرده است.

برهان : فرض کنیم $T = \sum_k (g_k \otimes_i \overline{f}_k)$ یک عملگر رده‌ی اثر باشد. تعریف می کنیم

$$T_N = \sum_{k=۱}^{N} \; g_k \otimes_i \overline{f}_k \; .$$

T_N با رتبه‌ی متناهی است و داریم

$$\lim_{N\to\infty} \left\| T - \sum_{k=۱}^{N} \; g_k \otimes_i \overline{f}_k \right\| \; = \; ۰ \quad .$$

بنابراین T به صورت حد عملگرهایی با رتبه‌ی متناهی است و لذا فشرده است. ■

تعریف ۱۹.۲. فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر رده‌ی اثر باشد. اثر T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$tr(T) \; = \; \sum_i \langle T\delta_i, \delta_i \rangle$$

که در آن $(\delta_i)_{i\in I}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ است.

گزاره ۲۰.۲ تعریف ۱۹.۲ مستقل از انتخاب پایه است.

برهان : فرض کنیم $(e_j)_{i\in J}$ پایه‌ی یکا متعامد دیگری برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle T\delta_i, \delta_i \rangle \; &= \sum_i \left\langle \sum_k \langle \delta_i, f_k \rangle g_k, \sum_j \langle \delta_i, e_j \rangle e_j \right\rangle \; = \; \sum_i \sum_k \sum_j \langle \delta_i, f_k \rangle \langle e_j, \delta_i \rangle \langle g_k, e_j \rangle \\
&= \sum_k \sum_j \left\langle e_j, \sum_i \langle f_k, \delta_i \rangle \delta_i \right\rangle \langle g_k, e_j \rangle \; = \; \sum_k \sum_j \langle e_j, f_k \rangle \langle g_k, e_j \rangle \\
&= \sum_j \left\langle \sum_k \langle e_j, f_k \rangle g_k, e_j \right\rangle \; = \; \sum_j \langle T e_j, e_j \rangle \; .
\end{aligned}$$

■

لم ۲۱.۲ فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر رده‌ی اثر باشد. دنباله‌های $(f_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}$ و $(g_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}$ وجود دارند به طوری که

$$tr(T) \; = \; \sum_k \langle g_k, f_k \rangle \; .$$

این دنباله‌ها همان دنباله‌های ذکر شده در تعریف عملگر رده‌ی اثر هستند.

برهان : طبق تعریف ۱۷.۲ دنباله‌های $(f_k) \subseteq \mathcal{H}$ و $(g_k) \subseteq \mathcal{H}$ موجودند به طوری که

$$\sum_k \|f_k\| \|g_k\| < \infty$$

و به ازای هر $f \in \mathcal{H}$

$$Tf \; = \; \sum_k \langle f, f_k \rangle g_k \; = \; \sum_k (g_k \otimes_i \overline{f}_k)(f) \; .$$

حال فرض کنیم $(\delta_i)_{i\in I}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت

$$tr(T) \ = \ \sum_i \langle T\delta_i, \delta_i\rangle \ = \ \sum_i \left\langle \sum_k \langle \delta_i, f_k\rangle g_k, \delta_i \right\rangle \ = \ \sum_i \sum_k \langle \delta_i, f_k\rangle \langle g_k, \delta_i\rangle \ = \ \sum_k \langle g_k, f_k\rangle \ .$$

■

گزاره ۲۲.۲ لم ۲۱.۲ تعریف ۱۹.۲ را نقض نمی‌کند.

برهان :

$$\begin{aligned}\sum_k \langle g_k, f_k\rangle &= \sum_k \left\langle \sum_i \langle g_k, \delta_i\rangle \delta_i, f_k \right\rangle = \sum_k \sum_i \langle g_k, \delta_i\rangle \langle \delta_i, f_k\rangle \\ &= \sum_i \left\langle \sum_k \langle \delta_i, f_k\rangle g_k, \delta_i \right\rangle = \sum_i \langle T\delta_i, \delta_i\rangle \ .\end{aligned}$$

■

لم ۲۳.۲ ([?]) فرض کنیم $T \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر رده‌ی اثر باشد و $(\delta_i)_{i\in I}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت

$$\|T\|_{trace} \ = \ \sum_i \langle |T|\delta_i, \delta_i\rangle \ .$$

۵.۲ عملگرهای هیلبرت ـ اشمیت

تعریف ۲۴.۲. ([?]) فرض کنید U یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و فرض کنید $(e_k)_{k\in K}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ باشد. نرم هیلبرت ـ اشمیت[۴] U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|U\|_{\mathcal{HS}} \ = \ \left(\sum_{k\in K} \|U(e_k)\|^{۲} \right)^{\frac{۱}{۲}} \ .$$

عملگر U را یک عملگر هیلبرت ـ اشمیت می‌نامیم هرگاه $\|U\|_{\mathcal{HS}} \ < \ +\infty$.

گزاره ۲۵.۲ تعریف ۲۴.۲ مستقل از انتخاب پایه است و داریم $\|U\|_{\mathcal{HS}} \ = \ \|U^*\|_{\mathcal{HS}}$.

برای دیدن برهانی از این گزاره به [?] صفحات ۵۹ و ۶۰ رجوع کنید.

مجموعه‌ی عملگرهای هیلبرت ـ اشمیت از $\mathcal{H}_۱$ به $\mathcal{H}_۲$ را با $\mathcal{HS}(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ نشان می‌دهیم و $\mathcal{HS}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{HS}(\mathcal{H})$. $\mathcal{HS}(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری است .

قضیه ۲۶.۲ ([?] قضیه ۱۰.۴.۲) فرض کنید V و U عملگرهایی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند و $\lambda \in C$. در این صورت

(۱) $\|U+V\|_{\mathcal{HS}} \ \le \ \|U\|_{\mathcal{HS}} + \|V\|_{\mathcal{HS}}$ و $\|\lambda U\|_{\mathcal{HS}} \ = \ |\lambda| \|U\|_{\mathcal{HS}}$.

(۲) $\|U\| \ \le \ \|U\|_{\mathcal{HS}}$.

(۳) $\|UV\|_{\mathcal{HS}} \ \le \ \|U\| \ \|V\|_{\mathcal{HS}}$ و $\|UV\|_{\mathcal{HS}} \ \le \ \|U\|_{\mathcal{HS}} \ \|V\|$.

---

[۴] Hilbert-Schmidt

اگر $f \in \mathcal{H}_۱$ و $g \in \mathcal{H}_۲$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\|f \otimes_i \overline{g}\|_{\mathcal{HS}} &= \left(\sum_{k\in K} \|(f \otimes_i \overline{g})(e_k)\|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\sum_{k\in K} \|\langle e_k, g\rangle f\|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= \left(\sum_{k\in K} |\langle e_k, g\rangle|^۲ \|f\|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = \|f\| \left(\sum_{k\in K} |\langle e_k, g\rangle|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = \|f\| \ \|g\| \ .\end{aligned}$$

لذا $f \otimes_i \overline{g}$ یک عملگر هیلبرت ـ اشمیت است و رابطه‌ی $\|f \otimes_i \overline{g}\|_{\mathcal{HS}} = \|f\| \ \|g\|$ برقرار است.

قضیه ۲۷.۲ عملگر هیلبرت ـ اشمیت روی فضای هیلبرت جدایی پذیر فشرده است.

برهان : فرض کنیم $(\delta_i)_{i=۱}^{\infty}$ پایه‌ی یکا متعامد برای این فضا باشد. اگر تعریف کنیم

$$T_n\delta_i = \begin{cases} T\delta_i & i \le n \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در این صورت T_n با رتبه‌ی متناهی است و

$$\|T - T_n\| \le \|T - T_n\|_{\mathcal{HS}} = \sum_{i=n+۱}^{\infty} \|T\delta_i\|^۲ \ \to \ ۰ \ .$$

■

تعریف ۲۸.۲. فرض کنید $T, S \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})$ و $(\delta_k)_{k\in K}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\langle T, S\rangle_{\mathcal{HS}} = \sum_k \langle T\delta_k, S\delta_k\rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

گزاره ۲۹.۲ تعریف ۲۸.۲ مستقل از انتخاب پایه است.

برهان : فرض کنیم $(e_i)_{i\in I}$ پایه‌ی یکا متعامد دیگری برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت

$$\sum_k \langle T\delta_k, S\delta_k\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \sum_k \langle S^*T\delta_k, \delta_k\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ tr(S^*T) \ = \ \sum_i \langle S^*Te_i, e_i\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \sum_i \langle Te_i, Se_i\rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

■

لم ۳۰.۲ ([?] لم ۵ و ٦) فرض کنید $T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})$ و $f, g, h, l \in \mathcal{H}$. در این صورت

(۱) $\langle ., . \rangle_{\mathcal{HS}}$ یک ضرب داخلی در فضای برداری $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ است.

(۲) $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ یک فضای هیلبرت با این ضرب داخلی است.

(۳) $\langle f \otimes \overline{g}, h \otimes \overline{l}\rangle_{\mathcal{HS}} \ = \ \langle f, h\rangle_{\mathcal{H}}\langle l, g\rangle_{\mathcal{H}}$.

(۴) $\langle T, f \otimes \overline{g}\rangle_{\mathcal{HS}} \ = \ \langle Tg, f\rangle_{\mathcal{H}}$.

۶.۲ قاب‌ها و دنباله‌های بسل

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و K مجموعه اندیسگذار دلخواه شمارش پذیر باشد.

تعریف ۳۱.۲. دنباله‌ی $(\psi_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}$

الف) یک **قاب** برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود هرگاه ثابت های $A, B > ۰$ موجود باشند به طوری که

$$A\,\|f\|_{\mathcal{H}}^{۲} \le \sum_k |\langle f, \psi_k\rangle|^{۲} \le B\,\|f\|_{\mathcal{H}}^{۲}\,, \qquad \forall f \in \mathcal{H}\,. \tag{۱.۲}$$

ب) **دنباله‌ی قاب** نامیده می شود هرگاه یک قاب برای $\overline{span}(\psi_k)_{k\in K}$ باشد.

ج) **کامل** نامیده می‌شود هرگاه $\overline{span}(\psi_k)_{k\in K} = \mathcal{H}$.

A رایک **کران پایینی** قاب و B را یک **کران بالایی** قاب گوییم. اگر $A = B$، قاب را **قاب تنگ** می‌گوییم.

بزرگترین مقدار ممکن برای A و کوچکترین مقدار ممکن برای B کران‌های **بهینه‌ی** قاب نامیده می‌شوند که آنها را به ترتیب با نماد A_{opt} و B_{opt} نشان می‌دهیم.

قاب $(\psi_k)_{k\in K}$ برای $\mathcal{H}$، **قاب دقیق** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $j \in K$، دنباله‌ی $(\psi_k)_{k\in K\setminus j}$ قابی برای $\mathcal{H}$ نباشد.

تعریف ۳۲.۲. اگر برای دنباله‌ی $(\psi_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{H}$ طرف راست نامساوی (۱.۲) برقرار باشد، یعنی $B > ۰$ موجود باشد به طوری که

$$\sum_k |\langle f, \psi_k\rangle|^{۲} \;\le\; B\,\|f\|_{\mathcal{H}}^{۲}\,, \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

آنگاه (ψ_k) **دنباله‌ی بسل**[۵] نامیده می‌شود.

لم ۳۳.۲ فرض کنید $(\psi_k)_{k\in K}$ یک دنباله‌ی بسل در $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}} \le \sqrt{B}\,.$$

برهان : فرض کنیم $k_۰ \in K$ ثابت باشد. نامساوی را برای $f = \psi_{k_۰}$ بکار می‌بریم

$$\sum_k |\langle \psi_{k_۰}, \psi_k\rangle|^{۲} \le B\,\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۲}\,.$$

پس $\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۴} + \sum_{k\neq k_۰} |\langle \psi_{k_۰}, \psi_k\rangle|^{۲} \le B\,\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۲}$.

در نتیجه $\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۴} \;\le\; \|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۴} + \sum_{k\neq k_۰} |\langle \psi_{k_۰}, \psi_k\rangle|^{۲} \le B\,\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۲}$.

با فرض $\psi_{k_۰} \neq ۰$ داریم

$$\|\psi_{k_۰}\|_{\mathcal{H}}^{۲} \;\le\; B\,.$$

■

[۵] Bessel

تعریف ۳۴.۲. برای دنباله‌ی بسل $(\psi_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{H}$

(۱) عملگر $C_{(\psi_k)}:\ \mathcal{H}\longrightarrow l^{۲}(K)$ با ضابطه‌ی $C_{(\psi_k)}(f)=(\langle f,\psi_k\rangle)_k$ عملگر **تجزیه** نامیده می‌شود.

(۲) عملگر $D_{(\psi_k)}:\ l^{۲}(K)\longrightarrow\mathcal{H}$ با ضابطه‌ی $D_{(\psi_k)}((c_k))=\sum_k c_k\psi_k$ عملگر **ترکیب** نامیده می‌شود.

(۳) عملگر $S_{(\psi_k)}:\ \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ با ضابطه‌ی $S_{(\psi_k)}(f)=\sum_k\langle f,\psi_k\rangle\psi_k$ عملگر **قاب** نامیده می‌شود.

اگر احتمال اشتباه نباشد، اندیس را حذف خواهیم کرد. مثلاً به جای $C_{(\psi_k)}$ می نویسیم C . این عملگرها ویژگی‌های زیر را دارند.

گزاره ۳۵.۲ (۱) فرض کنید $(\psi_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{H}$ یک دنباله‌ی بسل باشد. در این صورت سری $\sum_k c_k\psi_k$ به طور غیرشرطی همگراست. C و D الحاقی یکدیگرند و $\|D\|_{op}=\|C\|_{op}\leq\sqrt{B}$.

(۲) فرض کنید $(\psi_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت C عملگری یک به یک و کراندار با برد بسته است.

(۳) فرض کنید $(\psi_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{H}$ یک قاب باشد. در این صورت $\mathcal{N}_D^{\perp}=\mathcal{R}_C$.

(۴) فرض کنید $(\psi_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت $S=C^*C=DD^*$ یک عملگر معکوسپذیر مثبت است که در روابط زیر صدق می کند

$$B^{-۱}I_{\mathcal{H}}\leq S^{-۱}\leq A^{-۱}I_{\mathcal{H}}\quad,\quad AI_{\mathcal{H}}\leq S\leq BI_{\mathcal{H}}\ .$$

برهان : (۱) فرض کنید $(k_n)_{n=۱}^{\infty}$ شمارشی دلخواه از اعضای K باشد. ثابت می‌کنیم دنباله‌ی مجموع‌های جزئی $\sum_{i=۱}^{\infty}c_{k_i}\psi_{k_i}$ همگراست. فرض کنیم $n,m\in N\quad n>m,$. در این صورت

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=۱}^{n}c_{k_i}\psi_{k_i}-\sum_{i=۱}^{m}c_{k_i}\psi_{k_i}\right\| &= \left\|\sum_{i=m+۱}^{n}c_{k_i}\psi_{k_i}\right\|\\ &= \sup_{\|f\|=۱}\left|\left\langle\sum_{i=m+۱}^{n}c_{k_i}\psi_{k_i},f\right\rangle\right| \ \leq\ \sup\sum_{i=m+۱}^{n}|c_{k_i}\langle\psi_{k_i},f\rangle|\\ &\leq \left(\sum_{i=m+۱}^{n}|c_{k_i}|^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\sup_{\|f\|=۱}\left(\sum_{i=m+۱}^{n}|\langle\psi_{k_i},f\rangle|^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\\ &\leq \sqrt{B}\left(\sum_{i=m+۱}^{n}|c_{k_i}|^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\ .\end{aligned}$$

چون $(c_{k_i})_{i=۱}^{\infty}\in l^{۲}(K)$ لذا $\sum_{i=۱}^{\infty}|c_{k_i}|^{۲}<\infty$. بنابراین با توجه به نامساوی بالا دنباله‌ی مجموع‌های جزئی $\sum_{i=۱}^{\infty}c_{k_i}\psi_{k_i}$ یک دنباله‌ی کوشی است و در نتیجه $\sum_{i=۱}^{\infty}c_{k_i}\psi_{k_i}$ همگراست. چون $(k_n)_{n=۱}^{\infty}$ شمارش دلخواه از اعضای K بود پس سری $\sum_{k\in K}c_k\psi_k$ به طور غیرشرطی همگراست.

حال فرض کنید $f\in\mathcal{H}$ و $(c_k)\in l^{۲}(K)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\langle f,D(c_k)\rangle &= \langle f,\sum_k c_k\psi_k\rangle \ =\ \sum_k\overline{c_k}\langle f,\psi_k\rangle\\ &= \sum\langle f,\psi_k\rangle\overline{c_k}\ =\ \langle((\langle f,\psi_k\rangle),(c_k)\rangle\ =\ \langle C(f),(c_k)\rangle\ .\end{aligned}$$