بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

پایداری ساختاری میدان های برداری با خاصیت سایه زنی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مولایی

مؤلف:

سکینه السادات موسوی استرآبادی

آذرماه ۱۳۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : سکینه السادات موسوی استر آبادی

استاد راهنما : دکترمحمدرضا مولایی

داور ۱ : دکترمحمدابراهیمی

داور ۲ : دکترفرزادنعمت

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

دانشگاه شهید باهنر
کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که حیات و بالندگی خویش رامدیون گذشت ها و تلاش های شب وروز ایشان هستم.

تشکر وقدردانی

حمد وسپاس پروردگار عالمیان بر گردن آدمی است هرچند از انجام شکر وبندگی قاصر است. و پس از شکر خداوند برای همه آنچه به من عطا کرده و آن را می دانم یا نمی دانم، تشکر از پدر و مادرم را بر خود لازم می دانم. زیرا فرموده الهی است و اگر وجود دارم درسایه تلاش وفداکاری ایشان است.

وسپاسگذارم از معلمین واساتیدی که "اندیشیدن را به من آموختند" و یاریم کرند تا در راه رشد قدم بگذارم.

از استاد گرانقدر آقای دکتر محمدرضا مولایی که اغلب پیش نیازهای این پایان نامه را از ایشان آموخته ام ونیز راهنمای من در انجام این پایان نامه بودند کمال تشکر را دارم.

از داوری اساتید محترم آقای دکتر ابراهیمی وآقای دکتر نعمت صمیمانه سپاسگذارم.

چکیده

فرض کنیم X میدان برداری C^r و فاقد تکین باشد. در این پایان نامه نشان داده ایم X درون مجموعه میدانهای برداری با خاصیت سایه دار است اگر و فقط اگر X در اصل A و شرط تقاطع قوی صدق کند و این معادل است با اینکه X به طور ساختاری پایدار است.

طرف اول قضیه یعنی اگر X در اصل A و شرط تقاطع قوی صدق کند دارای خاصیت سایه‌دار است، قبلا ثابت شده است[٤ و ٥]. طرف دیگر قضیه را طی دو مرحله در گزاره A و گزاره B ثابت خواهیم کرد.

مقدمه

سیستم‌های ساختاری پایدار (دیفیومورفیسم‌ها و میدان‌های برداری) مهمترین موضوعات جالب نظریه رفتار کلی سیستم‌های دینامیکی در چهل سال اخیر بوده‌اند. یکی از مهمترین خصوصیات سیستم ساختاری پایدار، خاصیت سایه‌زنی است (همچنین با نام خاصیت مسیر شبه‌مدار شناخته می‌شود.).

توسط مولف دوم مرجع اصلی ثابت شده است که درون مجموعه دیفیومورفیسم‌های دارای خاصیت سایه‌زنی با C^1-توپولوژی بر مجموعه دیفیومورفیسم‌های ساختاری پایدار منطبق است. [۱۲] حال اینکه چه موقع نتایج بالا در مورد میدان‌های برداری برقرار است همچنان یک مسأله باز است؛ یعنی آیا یک میدان برداری درون مجموعه میدان‌های برداری دارای خاصیت سایه‌زنی همراه با C^1 - توپولوژی ساختاری پایدار است؟

اخیرا موریاسو[٤و٣] ثابت کرد که درون مجموعه میدان‌های برداری C^1پایدار توپولوژیک با مجموعه میدان‌های برداری ساختاری پایدار توصیف می‌شود[۱۳] ؛ و اگر یک میدان برداری با خاصیت سایه‌زنی درون مجموعه میدان‌های برداری‌ای که شارهای سرتاسری‌شان انبساطی است همراه با C^1 - توپولوژی باشد ، به طور ساختاری پایدار است.

اکنون ما نشان می‌دهیم که اگر میدان برداری فاقد نقطه تکین درون مجموعه میدان‌های برداری با خاصیت سایه‌زنی همراه با C^1 - توپولوژی باشد، در اصل A و شرط تقاطع قوی صدق می‌کند و بنابراین ساختاری پایدار است.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و اندیشه های پایه

مهمترین مطالب این فصل تعاریف سیستم دینامیکی، شار میدان برداری،مجموعه های حدی، نقطه هذلولوی ونگاشت پوانکاره است.

تعریف ۱.۱. همه حالتهای ممکن یک سیستم توسط نقاط مجموعه ای مانند X مشخص می شوند. این مجموعه فضای حالت سیستم نامیده می شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم به ازای هر $t > ۰$ یک تابع تک مقداری $\phi^t : X \to X$ روی فضای حالت X تعریف شده باشد که حالت اولیه $x_0 \in X$ را در زمان t به حالت $x_t \in X$ انتقال می دهد، یعنی $x_t = \phi^t(x_0)$. در اینصورت نگاشت ϕ^t عملگر تکامل سیستم دینامیکی نامیده می شود.

مورد زمان پیوسته خانواده $\{\phi^t\}_{t \in T}$ از عملگرهای تکامل، شار نامیده می شود.

تعریف ۱.۳. یک سیستم دینامیکی جفت (X, ϕ^t) است که X فضای حالت و $\{\phi^t\}$ خانواده ای از عملگرهای تکامل باشند که در دو شرط زیر صدق کنند:

$i) \quad \phi^0 = id$

$ii) \quad \phi^{t+s} = \phi^t o \phi^s \qquad \forall\ t,s \in R$

مثال ۱.٤. $X=\mathbb{R}$ و خانواده تبدیلات خطی نامنفرد $\phi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$ به ازای $t \in \mathbb{R}$ و $0 \neq \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ یک سیستم دینامیکی است. [٥]

تعریف ۱ . ۵ . فرض کنیم $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ یک منیفلد هموار باشد. یک میدان برداری از کلاس C^r روی M یک نگاشت C^r، $X : M \to \mathbb{R}^k$ است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار $X(p) \in T_pM$ نسبت می‌دهد.

نمادگذاری . مجموعه همه میدان‌های برداری C^r روی M را با $\chi^r(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.٦ . یک منحنی انتگرال $X \in \chi^r(M)$ گذرنده از نقطه $p \in M$ یک نگاشت $\alpha : I \to M$ از کلاس C^{r+1} است که I یک بازه شامل صفر است به طوری که

$$\alpha(0) = p \text{ و } \alpha'(t) = X(\alpha(t)). \quad \forall t \in I .$$

تعریف ۱.۷ . فرض می‌کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز حول p باشد. نگاشت $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p \to U$ که در آن V_p یک همسایگی p درون U است به طوری که به ازای هر $q \in V_q$ نگاشت $\varphi_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ با ضابطه $\varphi_q(t) = \varphi(t,q)$ یک منحنی انتگرال گذرنده از q باشد و

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,q) = X(\varphi(t,q)) \qquad \forall (t,q) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times V_p \qquad \text{و} \qquad \varphi(0,q) = q$$

شار موضعی X در $p \in U$ نامیده می‌شود.

گزاره ۱.۸. فرض کنید M یک منیفلد فشرده و $X \in \chi^r(M)$ باشد. یک شار C^r کلی (سرتاسری) از X روی M وجود دارد یعنی یک نگاشت $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ از کلاس C^r وجود دارد به طوری که

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,p)=X(\varphi(t,p)) \qquad , \quad \varphi(0,p)=p \qquad \forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall p\in M\,.$$

نتیجه ۱. ۹. فرض کنید $X\in\chi^r(M)$ و $\varphi:\ \mathbb{R}\times M\to M$ شار میدان برداری X باشد. به ازای هر $t\in\mathbb{R}$ نگاشت $X_t: M\to M$ با ضابطه $X_t(p)=\varphi((t,p))$ یک C^r-دیفیومورفیسم است؛ علاوه بر آن

$$X_0=id \qquad \text{و} \qquad X_{t+s}=X_t o X_s \qquad \forall t,s\in\mathbb{R}.$$

تعریف ۱. ۱۰. فرض کنید $X\in\chi^r(M)$ وبه ازای $t\in\mathbb{R}$ ، X_t شار میدان برداری X باشد. مدار گذرنده از $p\in M$ مجموعه $O(p)=\{X_t(p): t\in R\}$است.

تعریف ۱. ۱۱. مجموعه α-حد p به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha(p)=\{q\in M:\exists\{t_n\}\ni X_{t_n}(p)\to q \quad as \quad t_n\to-\infty\}$$

تعریف ۱. ۱۲. مجموعه ω-حد p به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega(p)=\{q\in M:\exists\{t_n\}\ni X_{t_n}(p)\to q \quad as \quad t_n\to+\infty\}$$

تعریف ۱. ۱۳. ایزومورفیسم خطی A روی $\mathbb{R}^n$ هذلولوی است اگر طیف(مجموعه مقادیر ویژه) A از دایره واحد $S^1\subset C$ مجزا باشد. به عبارت دیگر A مقدار ویژه ای با اندازه ۱ نداشته باشد.

تعریف ۱. ۱٤. فرض کنیم $X\in\chi^r(M)$ و در نقطه $p\in M$ ، $X(p)=0$ شود؛ در این صورت p را نقطه تکین میدان برداری X گوییم.

در این حالت مدار p تک نقطه ای $\{p\}$ است.

تعریف ۱. ۱۵. فرض کنیم $p \in M$ نقطه تکین میدان برداری X باشد. گوییم p یک تکین ساده X است اگر $DX_p : T_pM \to T_pM$ مقدار ویژه صفر نداشته باشد.

در اینجا DX_p مشتق گیری مؤلفه به مؤلفه از X در نقطه p است.

گزاره ۱. ۱۶. فرض کنیم $X \in \chi^r(M)$ و $p \in M$ یک تکین ساده X باشد. در این صورت یک همسایگی $N(X) \subset \chi^r(M)$ از X و همسایگی $U \subset M$ حول p همراه با یک تابع پیوسته $\rho : N(X) \to U$ وجود دارد که به هر میدان برداری $Y \in N(X)$ تکین یکتای Y در U را نسبت می دهد. بویژه هر تکین ساده ایزوله است.

تعریف ۱. ۱۷. فرض کنیم f یک C^r-دیفیومورفیسم و $p \in M$ یک نقطه ثابت f باشد. گوییم p یک نقطه ثابت هذلولوی است اگر $Df_p : T_pM \to T_pM$ مقدار ویژه ای با اندازه یک نداشته باشد. در حالتی که Df_p مقدار ویژه ای با اندازه یک ندارد ، Df_p ایزومورفیسم هذلولوی نامیده می شود.

تعریف ۱. ۱۸ . فرض کنیم $S \subset N$ یک C^r- زیر منیفلد و $f : M \to N$ نگاشتی از کلاس C^k باشد ($k,r \geq 1$). گوییم f در نقطه $p \in M$ متقاطع به S است اگر یکی از دو حالت زیر پیش آید:

۱. $f(p) \notin S$

۲. $df_p(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$.

گوییم f بر S متقاطع است هرگاه f در تمام نقاط $p \in M$ بر S متقاطع باشد.

در حالتی که بعد M از هم بعد S کمتر است f بر S متقاطع است اگروفقط اگر

$.f(M)\bigcap S=\phi$

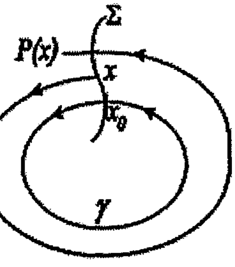
وقتی که $f:M\to N$ سابمرژن است f متقاطع بر هر زیرمنیفلد $S\subset N$ است.

فرض کنیم زیرمنیفلد های $S_1,S_2\subset N$ باشند. گوییم S_1 بر S_2 متقاطع است هرگاه نگاشت $i:S_1\to N$ متقاطع بر S_2 باشد.

$C^k(M,N)$ را مجموعه همه نگاشت های $f:M\to N$ از کلاس C^k می گیریم.

قضیه ۱. ۱۹ . (قضیه تقاطع). فرض کنیم M منیفلدی فشرده و $S\subset N$ زیر منیفلدی بسته باشد. دراین صورت مجموعه نگاشت های $f\in C^k(M,N)$ که بر S متقاطع است، در $C^k(M,N)$ باز و چگال است.

تعریف ۱. ۲۰ . فرض کنیم γ یک مدار بسته میدان برداری $X\in\chi^r(M)$ باشد و Σ تقاطع متقاطع به میدان برداری X در نقطه $x_0\in\gamma$ باشد. در اینصورت اگر $V\subset\Sigma$ یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از x_0 باشد، نگاشت $P:V\to\Sigma$ که به هر $x\in V$ اولین نقطه ای از مدار x که Σ را قطع کند نسبت می دهد، قابل تعریف است. این نگاشت، نگاشت پوانکاره وابسته به γ نامیده می شود.



شناخت این نگاشت به ما اجازه می دهد تا مدارها را در همسایگی γ توصیف کنیم. بنابراین اگر $x \in V$ یک نقطه ثابت P باشد آنگاه مدار x بسته است و دوره تناوب آن تقریبا برابر دوره تناوب γ است.

اگر $P^k(x)$ مدار مثبت گذرنده از x در یک همسایگی γ باشد و علاوه بر آن وقتی $k \to \infty$، $P^k(\bar{x}) \to x_0$ آنگاه γ، ω - حد مدار x است. به وسیله معکوس P روی میدان $X-$ این مطلب را در مورد α - حد نیز می‌توان گفت.

پیوستگی شار میدان های X و $X-$ ایجاب می کند P همیومورفیسمی از یک همسایگی x_0 در Σ به Σ است.

در گزاره زیر نشان داده می شود که P دیفیومورفیسم موضعی از همان کلاس میدان برداری است. به این ترتیب قادر خواهیم بود که از مشتق P در x_0 برای توصیف ساختار مدارها در همسایگی γ استفاده کنیم.

گزاره ۱. ۲۱. فرض کنید γ یک مدار بسته میدان برداری $X \in \chi^r(M)$ باشد و Σ تقاطع متقاطع بر X گذرنده از نقطه $p \in \gamma$ باشد. اگر $P_\Sigma : U \subset \Sigma \to \Sigma$ نگاشت پوانکاره باشد آنگاه P_Σ یک C^r-دیفیومورفیسم از همسایگی U از p در Σ بروی یک مجموعه باز در Σ است.

تعریف ۱. ۲۲. فرض کنیم γ مدار بسته X و $p \in \gamma$ و Σ تقاطع متقاطع بر X گذرنده از نقطه p باشد. گوییم γ مدار بسته هذلولوی X است اگر p نقطه ثابت هذلولوی نگاشت پوانکاره $P : V \subset \Sigma \to \Sigma$ باشد.

ساسپنشن . فرض کنیم $\tilde{M}$ منیفلدی باشد که بعدش یکی بیشتر از M است. ساختاری که ما را قادر می‌کند تا به دیفیومورفیسم‌های روی منیفلد M میدان‌های برداری روی منیفلد $\tilde{M}$ را نسبت دهیم، ساسپنشن یک دیفیومورفیسم نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم $X \in \chi^r(\tilde{M})$ و $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ زیرمنیفلد فشرده‌ای با هم‌بعد ۱ باشد.

تعریف ۱. ۲۳. گوییم $\tilde{\Sigma}$ یک تقاطع متقاطع کلی X است اگر

i. X متقاطع بر $\tilde{\Sigma}$ باشد.

ii. مدار مثبت X گذرنده از هر نقطه $\tilde{\Sigma}$ دوباره برگردد تا $\tilde{\Sigma}$ را قطع کند.

اگر $\tilde{\Sigma}$ یک تقاطع متقاطع کلی از $X \in \chi^r(M)$ باشد، آن‌گاه شار X یک دیفیومورفیسم $\tilde{f} : \tilde{\Sigma} \to \tilde{\Sigma}$ القا می‌کند که به هر نقطه $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ نقطه $\tilde{f}(\tilde{p})$ را نسبت می‌دهد که $\tilde{f}(\tilde{p})$ اولین تقاطع مدار مثبت $\tilde{p}$ با $\tilde{\Sigma}$ است. به عبارت دیگر دیفیومورفیسم $\tilde{f}$ نگاشت پوانکاره مربوط به $\tilde{\Sigma}$ است.

اگر $X \in \chi^r(M)$ یک تقاطع متقاطع کلی $\tilde{\Sigma}$ بپذیرد، آن‌گاه اشباع $\tilde{\Sigma}$ توسط شار میدان برداری X منطبق بر $\tilde{M}$ است یعنی $\bigcup_{t \in R} X_t(\tilde{\Sigma}) = \tilde{M}$. به ویژه X فاقد تکین است.

در نهایت ساختار مداری X توسط ساختار مداری نگاشت پوانکاره $\tilde{f}$ تعیین می‌شود و برعکس.

حقایق زیر بلافاصله نتیجه می‌شوند.

i. $\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$ نقطه متناوب است اگر و فقط اگر $O_X(\widetilde{p})$ بسته باشد.

ii. $\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$ نقطه متناوب هذلولوی است اگر و فقط اگر $O_X(\widetilde{p})$ یک مدار بسته هذلولوی باشد.

iii. اگر $\widetilde{p}_1$ و $\widetilde{p}_2$ نقاط متناوب هذلولوی $\widetilde{f}$ باشند، $W^s(\widetilde{p}_1)$ متقاطع بر $W^u(\widetilde{p}_2)$ است اگر و فقط اگر $W^s(O_X(\widetilde{p}_1))$ متقاطع بر $W^u(O_X(\widetilde{p}_2))$ باشد.

iv. $\widetilde{q} \in \omega(\widetilde{p})$ اگر و فقط اگر $O_X(\widetilde{q}) \subset \omega(O_X(\widetilde{p}))$.

گزاره زیر نشان می‌دهد که هر دیفیومورفیسم، نگاشت پوانکاره مربوط به یک تقاطع متقاطع یک میدان برداری است.

گزاره ۱. ۲٤. اگر f یک C^r–دیفیومورفیسم روی منیفلد فشرده M باشد، آن‌گاه یک منیفلد $\widetilde{M}$ و یک میدان برداری $X \in \chi^{r-1}(\widetilde{M})$ وجود دارد که یک تقاطع متقاطع کلی $\widetilde{\Sigma}$ می‌پذیرد و یک C^r–دیفیومورفیسم $h: M \to \Sigma$ وجود دارد که f و نگاشت پوانکاره $\widetilde{f}: \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{\Sigma}$ را مزدوج می‌سازد یعنی در یک همسایگی رابطه $h(\widetilde{f}(p)) = f(h(p))$ را داریم.

طبق این گزاره ساسپنشن یک C^r–دیفیومورفیسم یک میدان برداری C^{r-1} است. هر چند با اصلاح ساختار اثبات گزاره می‌توان به یک میدان برداری C^r، به عنوان ساسپنشن یک C^r– دیفیومورفیسم رسید. [۲]

فصل دوم

پیش نیازها

۱. C^r - توپولوژی

فرض کنیم M یک منیفلد فشرده و $\chi^r(M)$ مانند قبل باشد.

توپولوژی طبیعی روی $\chi^r(M)$ را تعریف میکنیم. با بیانی ساده دو میدان برداری $X, Y \in \chi^r(M)$ در این توپولوژی به هم نزدیکند اگر میدانهای برداری و مشتقاتشان تا مرتبه r در همه نقاط M نزدیک باشند.

اگر $0 \leq r < \infty$ و $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ فضای نگاشت های C^r روی منیفلد فشرده M باشد، ساختار فضای برداری طبیعی را روی $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ داریم:

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p) \quad , \quad (\lambda f)(p) = \lambda f(p) \qquad \forall f, g \in C^r(M, R^s)$$

پوشش بازی از مجموعه های باز $V_1, \dots, V_k$ را روی M به گونه ای انتخاب می کنیم که V_i در دامنه چارت موضعی (x_i, U_i) قرار گیرد و $x_i(U_i) = B(2) \quad , \quad x_i(V_i) = B(1)$. در اینجا $B(1)$, $B(2)$ گوی هایی به شعاع ۱و۲ و مرکز مبدا $\mathbb{R}^m$ هستند به طوریکه m بعد M است.

با فرض $f^i := f o x_i^{-1} : B(2) \to \mathbb{R}^s$

تعریف می کنیم:

$$\|f\|_r := \max_i \ \sup\{\|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|; u \in B(1)\}.$$

برای اینکه روی $C^r(M, TM)$ به عبارت دیگر روی $\chi^r(M)$ فضای همه میدانهای برداری C^r روی منیفلد فشرده M، یک C^r - توپولوژی تعریف کنیم کافی است TM را در $\mathbb{R}^{2m}$ بنشانیم.این توپولوژی مستقل از ضابطه نشاندن است.