بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

روشهای حل تکراری برای دستگاههای معادلات خطی

استاد راهنما:

دکتر پرویز سرگلزایی

تحقیق و نگارش:

مهدی حمیدی

شهریور ۱۳۸۶

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان **روشهای حل تکراری برای دستگاههای معادلات خطی** قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد **ریاضی کاربردی** توسط دانشجو **مهدی حمیدی** تحت راهنمایی استاد پایان نامه **دکتر پرویز سرگلزایی** تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

(نام و امضاء دانشجو)

مهدی حمیدی

این پایان نامه ٦ واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ **١٣٨٦/٠٦/٣١** توسط هیئت داوران بررسی و نمره ۱۷/ هفده/۰ و با درجه بسیار خوب به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	**امضاء**	**تاریخ**
استاد راهنما:	**دکتر پرویز سرگلزایی**		
داور ۱:	**دکتر علیرضا سهیلی**		
داور ۲:	**دکتر حسن میش مست نهی**		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	**دکتر مرتضی سنجرانی پور**		

تقدیم به:

پدر بزرگوارم

مادر عزیزم

و

همسر عزیز و مهربانم

تشکر و قدردانی

سپاس خداوند یکتا را که جهان هستی را با قدرت بی پایانش آفرید و به انسان آموخت تا در جهت کسب علم و معرفت تلاش نماید. دریچه‌های شناخت را برای بشر مفتوح ساخت شاید که سعادتمند شود. امید آن دارم که با لطف و عنایتش رهروی صادق برای راهش و خادمی مخلص برای خلقش باشم.

بر خود لازم می دانم از پدرم و مادرم به عنوان اولین مشوق هایم در جهت کسب علم صمیمانه تقدیر و تشکر به عمل آورم. همچنین از زحمات و فداکاریهای همسر عزیز و مهربانم که همیشه مشوق من در تحصیل علم می‌باشند تشکر و قدردانی می‌نمایم. از خداوند متعال برای همه این عزیزان آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روز افزون مسئلت می‌نمایم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر پرویز سرگلزایی که در دوران تحصیل حق استادی را بجا آوردند کمال تشکر و سپاس را دارم و از درگاه خداوند آرزوی توفیق روز افزون و سلامتی برای ایشان مسئلت می‌نمایم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علیرضا سهیلی و جناب آقای دکتر حسن میش مست نهی که مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند و جناب آقای دکتر مرتضی سنجرانی پور که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاعیه شرکت نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نموده و از خداوند متعال برای این عزیزان آرزوی توفیقات روز افزون دارم.

در پایان از همه دوستان ارجمندم که همواره مورد لطف و محبتشان بوده ام تشکر می کنم.

مهدی حمیدی

شهریور ۸۶

چکیده

در این پایان نامه روشهای حل تکراری برای دستگاههای معین مثبت و متقارن تُنک خطی که از گسسته سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل می شوند مورد بررسی قرار می گیرند. به همین منظور در ابتدا روشهای حل تکراری اصلی شرح داده می شود و سپس به بررسی شیوه اصلی استفاده شده در طراحی های پیش حالت ساز[1] پرداخته می شود.

همچنین نشان داده می شود پیش حالت ساز های پیچیده توسط جمع ها و ضرب های عناصر ساده تر مانند آنچه در روش های چند شبکه[2] بوجود می آید ساخته می شوند. همچنین در این پایان نامه بعضی نتایج عددی از این روشها با تعدادی مسأله آزمایش می شود.

[1] precondition

[2] multigrid

پیشگفتار

جواب بسیاری از مسائل عملی در علوم کاربردی سرانجام وابسته به حل دستگاههای خطی بسیار بزرگ تُنک می‌باشد که معمولاً از طریق روشهای حل تکراری بدست می آید. انگیزه اصلی این روشها در حقیقت سریع و کارا بودن آنها می‌باشد. اما در واقع روشهای سریع از دقت خوبی برخوردار نبوده و لذا توجه خاصی به روشهای کارا شده است. به هر حال از دیدگاه فیزیکی اهمیت دادن به این دسته از روشها از جایگاه خاصی برخوردار است. از اینرو برای پیاده سازی این روشها نیازمند تجزیه و تحلیل دقیقی خواهیم بود همچنانکه تقریبهای هندسی و جبری منجر به این تجزیه و تحلیل ها خواهند شد.

در اولین حالت خانواده‌ای از عملگرها را که از گسسته سازی مسائل مقدار مرزی نتیجه می شود را می توان نام برد. در حالت دوم خانواده مفروضی از ماتریس ها مانند ماتریس های معین مثبت متقارن [۳] و M – ماتریس ها در نظر گرفته می شود. علیرغم اینکهِ تقریب های هندسی به نگرش فیزیکی نزدیک تر بوده و شهودی تر می‌باشند به این دیل که پیاده سازی تقریب های جبری در قالب برنامه های رایانه ای بهتر صورت می گیرد تقریب های جبری مورد استفاده قرار می گیرند.

---

[۳] symmetric positive definite matrix

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه

در فصل نخست به بیان تعاریف و مفاهیمی که در پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرد پرداخته می شود. پس از آن به معرفی پیش حالت ساز پرداخته خواهد شد و در نهایت سرعت همگرایی روش های تکراری مورد بررسی قرار می گیرد.

۱—۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱—۱: بردار $x \in R^n$ را نرمال شده گویند اگر و تنها اگر $x^T x = 1$.

تعریف ۱—۲: مجموعه بردارهای $\{x_i : x_i \in R^n, 1 \leq i \leq m \leq n\}$ را مجموعه پایه متعامد یکه گویند اگر و تنها اگر:

$$x_i^T x_j = \delta_{ij},$$

که دلتای کرونیکر[1] چنین تعریف می شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۱—۳: ماتریس A با ابعاد $n \times n$ معین مثبت است اگر و تنها اگر:

$$x^T A x > 0, \forall \quad 0 \neq x \in R^n$$

تعریف ۱—۴: ماتریس A را با ابعاد $n \times n$ نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر:

$$x^T A x \geq 0, \forall 0 \neq x \in R^n$$

[1] Kronecker

تعریف ۱—۵: فرض کنید A یک ماتریس مختلط $n \times n$ باشد در اینصورت A^H را ترانهاده مزدوج مختلط A گویند هرگاه:

$$A^H = (\bar{A})^H$$

تعریف ۱—۶: تابع $R^n \to R$: $\|.\|$ یک نرم برداری روی R^n گویند هرگاه:

(۱) بازای هر $x \in R^n$، $\|x\| \geq 0$؛

(۲) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(۳) بازای هر $\alpha \in R$ و $x \in R^n$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

(۴) بازای هر $x, y \in R^n$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۱—۷: اگر $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ و $A = (a_{ij})_{m \times n}$ با عناصر حقیقی باشد آنگاه نرم های برداری x و ماتریسی A به صورت زیر تعریف می شوند:

(۱) نرم یک: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

(۲) نرم بینهایت: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

(۳) نرم خطی: $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

(۴) نرم ماکزیمم یا چبیشف: $\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

(۵) نرم فروبنیوس[1]: $\|A\|_F = (\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$

تعریف ۱—۸: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. حاصلضرب داخلی روی V عبارت است از نگاشتی که به هر زوج عنصر v و w متعلق به V یک اسکالر نسبت دهد و در شرایط زیر صدق کند:

$$< \ , \ >: V \times V \to F$$

(۱) بازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم:

$$< v, w > = < w, v >$$

[1] Frobenius

(۲) اگر $x \in F$ آنگاه:

$< u, xv >= x < u, v >$ و $< xu, v >= x < u, v >$

تعریف ۱—۹: ماتریس A ناویژه است اگر و تنها اگر دارای معکوس باشد. در غیر این صورت A ویژه است.

تعریف ۱—۱۰: A یک M — ماتریس است اگر عناصر غیر واقع بر قطر مثبت نباشند و معکوس آن نا منفی باشد.

تعریف ۱—۱۱: اگر برای هر زوج i و j که $i > j + ۱$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$، ماتریس A را هسنبرگ بالایی گویند.

تعریف ۱—۱۲: یک اسکالر مختلط λ را مقدار ویژه ماتریس مربعی A گویند اگر یک بردار مخالف صفر از C^n وجود داشته باشد بطوری که $Au = \lambda u$. بردار u، بردار ویژه A نظیر λ می باشد.

تعریف ۱—۱۳: مجموعه همه مقادیر ویژه ماتریس A را طیف آن ماتریس گویند و با $\sigma(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱—۱۴: بزرگترین مقدار مطلق ویژه ماتریس A را شعاع طیفی آن گویند و با $\rho(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱—۱۵: ماتریس های $G, H \in C^{n\times n}$ متشابه اند هرگاه یک ماتریس نامنفرد $S \in C^{n\times n}$ وجود داشته باشد بطوری که $H = SGS^{-۱}$.

تعریف ۱—۱۶: عدد حالت یک ماتریس نامنفرد A برای $\|.\|_p$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-۱}\|_p,$$

همچنین عدد حالت یک ماتریس میزانی از نحوه حساسیت دستگاههای معادلات با ماتریس ضرایب A را نسبت به آشفتگی های کوچک مانند آشفتگی هایی که در اثر گرد کردن حاصل می شوند را معین می کند. هرگاه $\kappa(A) >> ۱$ ماتریس A را بد رفتار است.

تعریف ۱—۱۷: اگر $A = (a_{ij})$ و $\alpha = (\alpha_{ij})$ بر ماتریس هایی با ابعاد یکسان دلالت کنند حاصلضرب آدامار[۱] آن ها به صورت زیر است:

$$(\alpha * A)_{ij} = \alpha_{ij} a_{ij}$$

تعریف ۱—۱۸: شکافت ماتریس A که به صورت $A = B - C$ منظم است هرگاه ماتریس C نامنفی و ماتریس

[۱] Hadamard product

B دارای معکوس نامنفی باشد.

تعریف ۱—۱۹: ماتریس $A \in R^{n\times n}$ بطور سازگار مرتب است هرگاه برای هر مقدار غیر صفر α مقادیر ویژه ماتریس $G(\alpha) = \alpha D^{-1}L + \alpha^{-1}D^{-1}U$ مستقل از α باشد که اگر A یک ماتریس سه قطری بلوکی باشد در صورتی که همه بلوک های قطری، قسمت های قطری غیر صفر داشته باشند بطور سازگار مرتب خواهد بود.

تعریف ۱—۲۰: زیر فضای کریلوف با بعد m بصورت زیر تعریف می شود:

$$K_m(A, r_0) = Span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, ..., A^{m-1}r_0\}$$

تعریف ۱—۲۱: حاصلضرب داخلی هرمیتی $(.,.)$ برای بردار های $y = (y_i)_{i=1,...,n}$ و $z = (z_i)_{i=1,...,n}$ از C^n بصورت زیر تعریف می شود:

$$(y, z) = z^*y = \bar{z}^Ty = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i y_i.$$

تعریف ۱—۲۲: اگر A یک ماتریس معین مثبت و متقارن باشد عناصر $u, v \in R^n$ را A—مزدوج گویند هرگاه $u^TAv = 0$.

۱—۳ پیش حالت سازی

وقتی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع بیضوی گسسته سازی می شوند منجر به یک دستگاه معادلات خطی تُنک با ابعاد خیلی بزرگ خواهند شد. حل این نوع دستگاه ها در صورتی که با یک ماتریس پیش حالت ساز ترکیب شوند نتیجه خوبی در پی خواهد داشت. در این بخش به شرح روش پیش حالت سازی پرداخته می‌شود.

روش های تکراری را می توان توسط اضافه کردن تصحیح های متوالی و مقداردهی اولیه اجرا کرد. به عبارت دیگر در هر مرحله، تقریب بعدی x_{m+1} با اضافه کردن برخی اصلاحات s_m به x_m که تکرار فعلی است محاسبه می شود یعنی:

$$x_{m+1} = x_m + s_m, \qquad (1-1)$$

فرض کنید دستگاه زیر را بخواهید حل کنید:

$$Ax = b, \qquad (۱ - ۲)$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار ستونی n بعدی بوده و بنابراین یک تصحیح ایده آل برای دستگاه (۱ − ۲) بصورت زیر خواهد بود:

$$s_m = x - x_m = A^{-1}b - x_m = A^{-1}(b - Ax_m) = A^{-1}r_m, \qquad (۱ - ۳)$$

که در آن:

$$r_m = b - Ax_m, \qquad (۱ - ۴)$$

m امین باقیمانده است. برای پیدا کردن بهترین جواب باید مسأله اصلی:

$$As_m = r_m, \qquad (۱ - ۵)$$

حل شود. رابطه (۱ − ۵) از ضرب طرفین (۱ − ۳) در ماتریس A حاصل شده است که s_m یک تصحیح می‌باشد. بنابراین می توان معادله (۱ − ۵) را با معادله تقریبی به صورت:

$$Bs_m = r_m, \qquad (۱ - ٦)$$

تعویض کرد و بجای معادله اصلی، معادله (۱ − ٦) را حل کرد. ماتریس B راماتریس پیش حالت ساز نامیده و روش مورد بحث را پیش حالت سازی کردن گویند. ماتریس B باید طوری انتخاب شود که برای حل کردن معادله آسان باشد. این مطلب قسمت اصلی روش تکراری است. توجه شود که پیش حالت سازی ممکن است با روش تفکیکی[۱] ارتباط داشته باشد. بطوری که:

$$x_{m+1} = x_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_m, \qquad (۱ - ۷)$$

[۱] splitting

با توجه به معادله (۱ – ۶) داریم:

$$s_m = B^{-1} r_m, \tag{۱ – ۸}$$

یا

$$s_m = B_m^{-1} r_m, \tag{۱ – ۹}$$

که در آن الگوریتم تکرارها بصورت زیر است:

$$s_m = B_m^{-1} r_m, \tag{۱ – ۱۰}$$

$$x_{m+1} = x_m + s_m, \tag{۱ – ۱۱}$$

$$r_{m+1} = r_m - A s_m, \tag{۱ – ۱۲}$$

در حقیقت آخرین تساوی از این نتیجه می شود که:

$$r_m = b - A x_m = b - A(x_{m+1} - s_m) = b - A x_{m+1} + A s_m = r_{m+1} + A s_m,$$

بنابراین رابطه (۱ – ۱۲) حاصل خواهد شد. اگر از پیش حالت ساز استفاده نشود در حقیقت $B = I$ و تکرارها به صورت زیر می باشد:

$$x_{m+1} = x_m + r_m,$$

$$r_{m+1} = r_m - A s_m,$$

از طرف دیگر معادله (۱ – ۲) با:

$$B^{-1} A x = B^{-1} b, \tag{۱ – ۱۳}$$

معادل خواهد بود. حل (۱ − ۱۳) بدون پیش حالت ساز، معادل با حل (۱ − ۲) با پیش حالت ساز B است.

فرض کنیم $\varepsilon_m = x_m - x$ در گام m ام بر خطا دلالت داشته باشد. در اینصورت بنابر روابط قبل داریم:

$$\varepsilon_{m+1} = x_{m+1} - x = x_m + s_m - x = (x_m - x) + s_m = \varepsilon_m + s_m,$$

همچنین:

$$A\varepsilon_m = A(x_m - x) = Ax_m - Ax = b - r_m - b = -r_m = -B_m s_m \Longrightarrow s_m = -B_m^{-1} A\varepsilon_m,$$

بنابراین:

$$\varepsilon_{m+1} = (I - B_m^{-1} A)\varepsilon_m, \qquad (۱۴ - ۱)$$

در حالت پیش حالت سازی ثابت که $\varepsilon_m = (I - B^{-1}A)^m \varepsilon_0 = T^m \varepsilon_0$ وقتی که $T = I - B^{-1}A$ ماتریس تکرار است، نشان می دهیم روش همگراست یعنی بازای هر $\forall \varepsilon_0$ برای $m \to \infty$ داشته باشیم:

$$\varepsilon_m \to 0$$

اگر و فقط اگر $\rho(T) = max|\lambda_i| < 1$.

با در نظر گرفتن رابطه (۱ − ۱۴) اگر $m = 0$ آنگاه:

$$\varepsilon_1 = (I - B^{-1}A)\varepsilon_0,$$

اگر $m = 1$ آنگاه:

$$\varepsilon_2 = (I - B^{-1}A)\varepsilon_1 = (I - B^{-1}A)(I - B^{-1}A)\varepsilon_0,$$

که در نهایت با ادامه روند بالا داریم:

$$\varepsilon_m = (I - B_m^{-1} A)^m \varepsilon_0. \qquad (۱۵ - ۱)$$

فرض کنیم $x_m - x = T^m \varepsilon_0$ آنگاه:

$$\|x_m - x\| \leq \|T^m \varepsilon_0\| \leq \|T\|^m \|\varepsilon_0\| \leq (\rho(T))^m \|\varepsilon_0\|.$$

حال فرض کنیم $\rho(T) < 1$ آنگاه:

$$\|x_m - x\| = \|T^m \varepsilon_0\| \to 0 \Rightarrow T \to 0.$$

حال اگر نرم رابطه (۱ − ۱۵) را در نظر بگیریم نشان می دهیم که کاهش میانگین خطا در هر تکرار توسط $\|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ کراندار شده و همچنین بطور مجانبی با رابطه زیر کراندار شده است:

$$\rho(T) = lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}, \qquad (۱ - ۱۶)$$

برای اولین حالت داریم:

$$\varepsilon_m = T^m \varepsilon_0 \Rightarrow \|\varepsilon_m\| = \|T^m \varepsilon_0\| \leq \|T^m\| \|\varepsilon_0\|$$

برای نشان دادن اینکه نرم (۱ − ۱۵) بطور مجانبی با (۱ − ۱۶) کراندار شده داریم:

$$lim_{m\to\infty} \|\varepsilon_m\|^{\frac{1}{m}} \leq lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \|\varepsilon_0\|^{\frac{1}{m}} \to 1$$

بنابراین $\rho(T)$ به منظور اندازه گیری سرعت همگرایی بکار رفته و با $R(T) = \log \rho(T)$ نشان داده می شود.

۱ − ۴ سرعت همگرایی

پیش حالت سازها به تنهایی استفاده نمی شوند و همگرایی روش های تقریب های متوالی معمولاً توسط نوعی از سرعت همگرایی افزایش می یابد و ممکن است به عنوان جایگذاری روند تکرار در بعضی از گروه های بزرگ تر با معرفی کردن پارامترهای تکرار که به نوع خود بهینه شده است مشاهده شود. به عنوان مثال روش فوق تخفیف متوالی (SOR[1]) نسخه سرعت بخشیده شده گوس سایدل (GS[2]) بوده که با تغییر پیش حالت ساز GS از $B = D - E$ (بخش ۲ − ۳ را ملاحظه کنید.) به $B_\omega = \frac{1}{\omega} D - E$ و به تدریج بهینه کردن زیر دنباله ω بدست می

[1] successive over relaxation
[2] Gauss-Seidel