بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

قضیه نقطه ثابت روی فضاهای متریک مخروطی با نوعی انقباض جدید

استاد راهنما:

دکتر طیبه لعل شاطری

استاد مشاور:

دکتر قدیر صادقی

نگارش:

محمود بومری

شهریور ۱۳۹۲

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، خانم دکتر طیبه لعل شاطری، تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، تشکر می‌کنم از همسر و فرزند عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

محمود بومری
شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

همه عزیزانی که مرا در این راه یاری نموده اند.

چکیده

در این پایان نامه، قضیه نقطه ثابت مشترک برای نگاشت های خود ریختی با نوعی انقباض جدید روی فضای متریک مخروطی اثبات شده است. هم چنین مثال هائی آورده شده که نشان می دهد این اثبات، تعمیمی از اثبات برانکیاری [۵] و هانگ و ژانگ [۸]، درباره نقطه ثابت مشترک است.

در ادامه، برخی از مفاهیم و تعاریف توپولوژی روی فضای متریک مخروطی تعمیم داده شده و ثابت می شود که هر فضای متریک مخروطی، فضای توپولوژیک شمارای اول است و زیرمجموعه های فشرده دنباله ای، فشرده هستند. هم چنین نگاشت های انقباض قطری و نگاشت های انقباض قطری مجانبی را، روی فضاهای متریک مخروطی تعریف می کنیم و قضیه نقطه ثابت را با فرض این که مخروط ما قویاً شبکه است برای این گونه انقباض ها به دست می آوریم.

کلمات کلیدی:

نقطه ثابت، فضای متریک مخروطی، انقباض قطری، فشرده دنباله ای، کلاً کراندار، قویاً شبکه

فهرست مطالب

پیشگفتار

اولین بار مفهوم متر مخروطی و فضای متری مخروطی را در سال ۱۹۸۰، بگدان زپیکی [1] [۱۲] بیان کرد. و سپس در سال ۱۹۸۷، شی-در لین [2] [۱۰] به اثبات قضیه نقطه ثابت مشترک در این فضا پرداخت.

تعمیم های زیادی از قضیه نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک وجود دارد که یکی از جالب ترین تعمیم ها را برنکیاری[3] [۵] در سال ۲۰۰۲ با گرفتن نوعی انقباض انتگرالی به جای انقباض معمولی بیان کرد. پس از آن ریاضی دانان زیادی از جمله عباس و آلیوچ [4] [۲] به بیان قضیه نقطه ثابت و قضیه نقطه ثابت مشترک با انقباض انتگرالی پرداختند. بعد ها در سال ۲۰۰۷، هانگ [5] و ژانگ [6] [۸] به طور مفصل فضای متریک مخروطی را معرفی کرده و مورد بحث قرار دادند. آن ها هم چنین برخی از ویژگی های همگرائی دنباله ها را بیان و در نهایت تعدادی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های انقباضی را در فضاها ی متریک مخروطی نرمال اثبات کردند که این قضایا تعمیمی از قضایای موجود در فضاهای متریک بودند.

رضاپور [7] و حمل بارانی [8] [۱۱] نشان دادند که مخروط های نرمالی با ثابت نرمال $K < 1$ وجود ندارند و برای هر $M > 1$، مخروط های نرمالی با ثابت نرمال $K < M$ می توان یافت.

در سال ۲۰۱۰، دوران ترک اغلو [9] و محیب ابولها [10] [۱۳] ثابت کردند که فضاهای متریک مخروطی، فضاهای توپولوژیک هستند و با معرفی انقباض های قطری و قطری مجانبی، قضایای نقطه ثابت را برای این گونه انقباض ها ثابت کردند.

[1] Bogdan Rzepecki
[2] Shy-Der Lin
[3] Branciari
[4] A. Aliouche
[5] Huang Long-Guang
[6] Zhang Xian
[7] Rezapour
[8] Hamlbarani
[9] Duran Turkoglu
[10] Muhib Abuloha

ایساک آلتن [1] و مجاهد عباس و هاکان سیمسک [2] [۳] در سال ۲۰۱۱ با الهام گرفتن از ایده برانکیاری و هانگ، با معرفی نوعی نگاشت به نام $\varphi-$ نگاشت و نوعی انقباض جدید، قضیه نقطه ثابت مشترک را برای این نوع انقباض ثابت کردند که اثبات آنها تعمیم نتیجه برانکیاری و هانگ در مورد نقطه ثابت است. این پایان نامه شامل سه فصل است. فصل اول از سه بخش تشکیل شده است که از مقالات زیر برگرفته شده است.

1) L.G. Huang and X. Zhang, Cone metric spaces and fixed point theorem of contractive mapping, J. Math. Anal. Appl. 332 (2) (2007), 1468-1476.

2) Sh. Rezapour and R.Hamlbarani, Some notes on the paper ”Cone metric spaces, and fixed point theorem of contractive mappings, J. Math. Anal. 345 (2008), 719-724.

3) M. Asadi and H. Soleimani, Examples in cone metric spaces, Middle- East J. Sci. Res. 11 (12) (2002), 1636-1640.

در بخش اول تعاریف و قضایائی از آنالیز حقیقی و تابعی بیان می شود. بخش دوم به تعریف مخروط و انواع و ویژگی های آن اختصاص داده شده است. در بخش سوم، متر مخروطی و فضاهای متریک مخروطی معرفی شده اند. فصل دوم دارای دو بخش است که از مقالات زیر برگرفته شده است.

1) I. Altun, M. Abbas and H. Simsek, A fixed point theorem on cone metic spaces with new type contractiveity, J. Math. Anal. 5 (2) (2007), 780-786.

2) C. Di Bari and P. Vetro, Weakly $\varphi-$pairs and common fixed points, Rend. Circ. Mat. Palermo 58 (2009), 125-132.

در بخش اول به معرفی $\varphi-$ نگاشت و انقباض جدید پرداخته شده است. در بخش دوم قضایای نقطه ثابت را برای این گونه نگاشت ها اثبات کردیم. فصل سوم مشتمل بر دو بخش و از مقالات زیر برگرفته شده است.

[1] Ishak Altun
[2] Hakan Simsek

1) D. Turkoglu and M. Abuloha, Cone metric space and fixed point theorems in diametically contractive mappings, Acta Math. Sin. 26 (3) (2010), 489- 496.

2) H .K. Xu, Diametrically contractive mappings, Bull. Australian. Math. Soc. 70 (3) (2004), 463-468.

در بخش اول ثابت می شود فضای متریک مخروطی، یک فضای توپولوژیک است و مطالبی درباره $c-$ تور و تعاریف دیگر بیان می شود. در بخش دوم، به معرفی انقباض های قطری و انقباض های قطری مجانبی پرداخته شده و قضایای نقطه ثابت، برای این نگاشت ها اثبات شده است.

در پایان یادآوری می کنیم که پایان نامه ی حاضر تنها به بررسی تعدادی از قضایای نقطه ی ثابت پرداخته است و هنوز بسیاری از قضیه های این مبحث هستند که مورد توجه قرار نگرفته اند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این بخش تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی و تابعی که در بخش های بعدی مورد نیاز است بیان می شود.

۱.۱ انقباض

تعریف ۱.۱.۱. اگر $(X,\ \|\cdot\|)$ یك فضای نرم دار باشد، آن گاه $d(x,\ y)=\|x-y\|$ یك متر روی X تعریف می‌کند. فضایی که با متر تعریف شده به وسیله نرم کامل باشد را فضای باناخ [1] گوییم.

فضای باناخ حقیقی[2] فضایی است که میدان اسکالر آن حقیقی باشد.

قضیه ۲.۱.۱. *فضای نرم دار $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای باناخ است اگر و فقط اگر هر سری مطلقاً همگرا در X همگرا باشد.*

برهان. برای اثبات صفحه ۱۵۲ مرجع [۷] راببینید.

□

[1] Banach space
[2] Real Banach space

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. یک انقباض [۱] روی X نگاشتی مانند T روی X است به طوری که

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) \quad (x,y \in X,\ \alpha \in [0,1)).$$

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $M=[1,\infty[$ با متر معمولی باشد. برای $0 \leq k < 1$ نگاشت $f: M \to M$ را با ضابطه $f(x)=k(x+\frac{1}{x})$ تعریف می کنیم، در این صورت f یک انقباض است.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر باشد. و $\alpha < 1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $| f'(x) | \leqslant \alpha$. در این صورت با توجه به قضیه مقدار میانی برای هر $x,y \in \mathbb{R}$ که $x<y$ است، $\xi \in (x,y)$ طوری وجود داردکه

$$| f(x)-f(y) |=| f'(\xi) || x-y | \leqslant \alpha | x-y | .$$

بنابراین f یک انقباض است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت $T: X \longrightarrow X$ را انقباضی [۲] گوییم، هرگاه

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \quad (x,y \in X, x \neq y)$$

مثال ۷.۱.۱. فرض کنید $M=\mathbb{R}$ با متر معمولی باشد. نگاشت $T: M \longrightarrow M$ با ضابطه $Tx=\ln(1+e^x)$ را برای هر $x \in M$ تعریف می کنیم، در این صورت T یک نگاشت انقباضی است که نقطه ثابت ندارد.

[۱] Contraction

[۲] Contractive

چون در ادامه می خواهیم قضیه نقطه ثابت باناخ را در فضاهای متریک مخروطی بیان کنیم، قضیه نقطه ثابت باناخ را یادآوری کنیم.

قضیه ۸.۱.۱. (*قضیه نقطه ی ثابت باناخ*) *فرض کنید* (X, d) *یک فضای متریک کامل غیرتهی و* T *یک انقباض از* X *به توی* X *باشد. در این صورت* T *دارای یک نقطه ثابت منحصربه فرد مانند* $x^{\star} \in X$ *است، یعنی* $Tx^{\star} = x^{\star}$.

برهان. برای اثبات صفحه ۲۶۶ کتاب اصول آنالیز ریاضی والتر رودین را ببینید.

□

۲.۱ مخروط

در این بخش با تعریف مخروط و انواع آن آشنا می شویم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و P زیرمجموعه آن باشد.P را یک مخروط[1] گوییم هرگاه

۱. P بسته، ناتهی و $P \neq \{0\}$ باشد،

۲. برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ که $\alpha, \beta \geq 0$ و هر $x, y \in P$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in P$،

۳. اگر$x \in P$ و $-x \in P$ آن گاه $x = 0$.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $E = C([0,1], \mathbb{R})$ با نرم سوپریموم باشد و $P = \{f \in E : f \geq 0\}$. آن گاه P یک مخروط است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $P \subseteq E$ یک مخروط باشد رابطه ترتیب جزیی $\leqslant$ را نسبت به P این گونه تعریف می کنیم $x \leqslant y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P$. هم چنین $x < y$ یعنی $x \leqslant y$ اما $x \neq y$ و $x \ll y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P^o$، که P^o نشان دهنده نقاط درونی P است.

تعریف ۴.۲.۱. مخروط P را نرمال[2] گوییم هرگاه عدد $K > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر $x, y \in E$ که $0 \leqslant x \leqslant y$ نتیجه دهد $\| x \| \leq K \| y \|$.

کوچک ترین عدد مثبت K که در شرایط بالا صدق می کند را ثابت نرمال P گوییم.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید $E = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}; x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ یک فضای برداری حقیقی با نرم سوپریموم باشد و $P = \{ax + b : a \leq 0, b \geq 0\}$. اگر تعریف کنیم $f(x) = -2x + 10$ و $g(x) = -6x + 11$ در این صورت $f, g \in P$. لذا $f \leqslant g$، زیرا $g(x) - f(x) = -3x + 1 \in P$ ، اما $\|f\| = f(\frac{1}{2}) = 9$ و $\|g\| = g(\frac{1}{2}) = 8$ بنابراین $\|f\| > \|g\|$. در نتیجه P یک مخروط نرمال با $K > 1$ است.

[1] Cone

[2] Normal

تعریف ۶.۲.۱. مخروط P را منظم [1] گوییم اگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار در آن همگرا باشد، یعنی اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در E باشد و $y \in E$ به طوری که $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y$ آن گاه $x \in E$ وجود داشته باشد به طوری که $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$.

در ادامه بعضی خواص مخروط منظم بررسی می شود.

گزاره ۷.۲.۱. *مخروط P منظم است اگر و فقط اگر هر دنباله نزولی و از پایین کراندار در آن همگرا باشد.*

برهان. ابتدا فرض می کنیم مخروط P منظم و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله نزولی و از پایین کراندار به $y \in E$ باشد، یعنی $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \ldots \geqslant y$. در این صورت دنباله $x_1 - x_n$ صعودی و از بالا کراندار به $x_1 - y$ است. اما مخروط P منظم است، پس $x \in E$ وجود دارد که $\| x_1 - x_n - x \| \longrightarrow 0$ یعنی $x_n \longrightarrow x_1 - x$ پس $\{x_n\}$ همگرا است.
عکس رابطه به طور مشابه اثبات می شود.

□

گزاره ۸.۲.۱. *هر مخروط منظم، نرمال است.*

برهان. فرض می کنیم مخروط P منظم باشد ولی نرمال نباشد. برای $n \geq 1$، $s_n, t_n \in P$ را طوری انتخاب می کنیم که $n^2 \| t_n \| \leq \| s_n \|$ و $t_n - s_n \in P$.
برای $n \geq 1$ قرارمی دهیم $y_n = \dfrac{t_n}{\| t_n \|}$ و $x_n = \dfrac{s_n}{\| t_n \|}$. آن گاه برای هر $n \geq 1$، چون $\frac{1}{\|t_n\|} \geq 0$ بنابراین با توجه به تعریف مخروط $x_n, y_n \in P$ و هم چنین $y_n - x_n = (\frac{1}{\|t_n\|})(t_n - s_n)$ و $\| y_n \| = 1$.
اما $\| x_n \| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|}$ لذا $\| x_n \| \geq n^2$. از طرفی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \| y_n \|$ همگراست و E فضای باناخ است، بنابراین بنابه قضیه ۲.۱.۱ و بسته بودن P، $y \in P$ وجود دارد که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$. از این که $x_n \leqslant y_n$ داریم

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_1 + \tfrac{1}{2^2} x_2 \leqslant x_1 + \tfrac{1}{2^2} x_2 + \tfrac{1}{3^2} x_3 \leqslant \ldots \leqslant y.$$

[1] Regular

چون مخروط P منظم است، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\|x_n\|$ همگرا است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{n^2} = 0$ که این متناقض با $\| x_n \| \leq n^2$ است. در نتیجه مخروط منظم نرمال است.

$\square$

با یک مثال نشان می دهیم که عکس گزاره فوق برقرار نیست.

مثال ۹.۲.۱. فرض کنید $E = C([0,1], \mathbb{R})$ با نرم سوپریموم باشد و $P = \{f \in E : f \geq 0\}$. آن گاه P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال $K = 1$ است. حال دنباله ی $f^n(x) = x^n$ از عناصر E که نزولی و از پایین کراندارند را در نظر می گیریم. چون $0 \leqslant ... \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x^1$ این دنباله در E همگرا نیست. بنابراین هر مخروط نرمال، منظم نیست.

گزاره ۱۰.۲.۱. *مخروط نرمال با ثابت نرمال $K < 1$ وجود ندارد.*

برهان. فرض کنید P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال $K < 1$ باشد. عنصر ناصفر $x \in P$ را انتخاب می کنیم و $0 < \varepsilon < 1$ را طوری در نظر می گیریم که $K < 1 - \varepsilon$، در این صورت $K \| x \| < (1-\varepsilon) \| x \|$. از طرفی

$$x - (1-\varepsilon)x = x - x + \varepsilon x = \varepsilon x \in P$$

لذا طبق تعریف رابطه ترتیب جزیی در مخروط داریم $(1-\varepsilon)x \leqslant x$. بنابراین

$$(1-\varepsilon) \| x \| \leq K \| x \|$$

و این امکان پذیر نمی باشد. $\square$

مثال زیر نشان می دهد که مخروط های غیرنرمال وجود دارند.

مثال ۱.۲.۱۱. فرض کنید $C^{2}([0,1],R)$ با نرم $\| f \|=\| f \|_{\infty} + \| f' \|_{\infty}$ باشد و $P=\{f \in E : f \geq 0\}$. برای $K>1$، قرار دهید $f(x)=x$ و $g(x)=x^{2K}$ آن گاه $0 \leq g \leq f$، $\| f \|=2$ و $\| g \|=2K+1$. چون به ازای هر $K>1$، $K\| f \| < \| g \|$ است، بنابراین P یک مخروط غیرنرمال است.

تعریف ۱.۲.۱۲. مخروط P را شبکه [1] گوییم اگر سوپریموم $\{x,y\}$ برای هر $x,y \in E$ وجود داشته باشد و قویاً شبکه [2] گوییم هرگاه هر زیرمجموعه ای از E که از بالا کراندار باشد، دارای سوپریموم باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. مخروط P را جامد [3] گوییم هرگاه $P^{o} \neq \varnothing$.

در ادامه چند مثال از مخروط های تعریف شده می آوریم. هم چنین لازم به ذکر است اگر P مخروطی در$\mathbb{R}^n$ باشد ترتیب جزئی روی P را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$(x_1,...,x_n) \leqslant (y_1,...,y_n) \Longleftrightarrow x_i \leqslant y_i \ , \ (i=1,...,n)$$

مثال ۱.۲.۱۴. فرض کنید $E=\mathbb{R}^n$ و مخروط P به صورت زیر باشد،

$$P=\{(x_1,...,x_n) \ : \ x_i \geq 0 \ (i=1,...,n)\}$$

در این صورت مخروط P نرمال، شبکه، قویاً شبکه و جامد است.

[1] Minihedral
[2] Strongly minihedral
[3] Solid

مثال ۱.۲.۱۵. فرض کنید $E = \mathbb{R}^2$ و $P = \{(x,0) : x \geq 0\}$ در این صورت مخروط P قویاً شبکه بوده ولی شبکه نیست. به عنوان مثال اگر $x = (-1,4)$ و $y = (0,3)$، $\alpha = (0,4)$ سوپریموم دو نقطه مورد نظر است در این صورت $\alpha - x = (1,0)$ و $\alpha - y = (0,1)$. چون $(0,1)$ متعلق به P نیست بنابراین $\{x,y\}$ دارای سوپریموم نبوده. پس مخروط شبکه نیست.

۳.۱ فضا های متریک مخروطی

در این بخش به معرفی فضاهای متریک مخروطی می پردازیم. برای این منظور ابتدا متر مخروطی را تعریف می کنیم و سپس ویژگی های این فضا را بیان می کنیم و با آوردن مثال ها و قضایایی بخش را به پایان می رسانیم.

در ادامه E یک فضای باناخ حقیقی، P یک مخروط در E که $P^o \neq \emptyset$ و $\leqslant$ یک ترتیب جزیی در E را نشان می دهند.

تعریف ۱.۳.۱. فر ض کنید X یک مجموعه ناتهی و $P \subseteq E$ یک مخروط باشد. هم چنین فرض کنید نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند.

۱) $d(x,y) \geqslant \circ \quad , \quad d(x,y) = \circ \Longleftrightarrow x = y$

۲) $d(x,y) = d(y,x)$

۳) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

آن گاه d را یک متر مخروطی [۱] روی X و (X,d) را یک فضای متریک مخروطی [۲] گوییم.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید $E = \mathbb{R}^۲$، $P = \{(x,y) : x, y \geq \circ\}$ و $X = \mathbb{R}$، $d : X \times X \longrightarrow E$ طوری باشد که $d(x,y) = (\mid x-y \mid, \alpha \mid x-y \mid)$ که در آن $\alpha \geq \circ$. در این صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

[۱] Cone metric

[۲] Cone metric space

مثال ۳.۳.۱. فرض کنید $E=\mathbb{R}^2$ و $P=\{(x,y):x,y\geq 0\}$ در این صورت P یک مخروط مثبت در $\mathbb{R}^2$ است.

$$(x_1,y_1)\leqslant(x_2,y_2)\Longleftrightarrow x_1\leqslant x_2\ ,\ y_1\leqslant y_2$$

و هم چنین اگر $X=\mathbb{R}^2$ و E و $d:X\times X\longrightarrow E$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=(\alpha\mid x_1-x_2\mid,\beta\mid y_1-y_2\mid)\quad(\alpha,\beta>0)$$

در این صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنید $E=\ell^1$، $P=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in E: x_n\geq 0,\ n\in\mathbb{N}\}$، (X,ρ) یک فضای متریک و $d:X\times X\longrightarrow E$ با ضابطه $d(x,y)=\{\frac{\rho(x,y)}{2^n}\}_1^{\infty}$ تعریف شود در این صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی با ثابت نرمال ۱ است.

بدیهی است که P یک مخروط است. فرض کنید $y=\{y_n\}_1^{\infty}$ و $x=\{x_n\}_1^{\infty}$ و $\{y_n\}_1^{\infty}\leqslant\{x_n\}_1^{\infty}\leqslant 0$ یعنی برای هر n، $y_n\leqslant x_n\leqslant 0$ و لذا $\mid y_n\mid\leqslant\mid x_n\mid\leqslant 0$. این نتیجه می دهد،

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mid x_n\mid\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mid y_n\mid$$

و بنابر این $\parallel x\parallel\leq\parallel y\parallel$ یعنی P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال $K=1$ است. حال نشان می دهیم نگاشت d، خوش تعریف و در شرایط متر مخروطی صدق می کند.

d خوش تعریف است زیرا ρ خوش تعریف است.

هم چنین برای $x,y\in X$،

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mid\frac{\rho(x,y)}{2^n}\mid=\mid\rho(x,y)\mid\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگرا است پس $d(x,y)=\{\frac{\rho(x,y)}{2^n}\}_1^{\infty}\in E$.

چون ρ یک متر است به وضوح d در شرایط ۱ و ۲ متر مخروطی صدق می کند و برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \{\frac{\rho(x,y)}{2^n}\}_1^\infty \leqslant \{\frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{2^n}\}_1^\infty \\ &= \{\frac{\rho(x,z)}{2^n}\}_1^\infty + \{\frac{\rho(z,y}{2^n}\}_1^\infty \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

بنابراین (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

این مثال نشان می دهد که رسته فضاهای متریک مخروطی بزرگتر از رسته فضاهای متری است.

۴.۱ همگرائی دنباله ها در فضاهای متریک مخروطی

در این بخش به خواص دنباله ها در فضاهای متریک مخروطی می پردازیم و بعضی از این خواص را اثبات می کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی باشد. هم چنین فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ یک دنباله در X باشد و $x\in X$، اگر برای هر $c\in E$ ،$0\ll c$، $N\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n\geq N$، $d(x_n,x)\ll c$، آن گاه دنباله $\{x_n\}_1^\infty$ همگرا به x نامیده می شود و x را حد دنباله ای $\{x_n\}_1^\infty$ گوییم که آن را با نماد $x_n\to x$ وقتی که $n\to\infty$، یا $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ نمایش می دهیم.

گزاره ۲.۴.۱. *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، هم چنین فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ یک دنباله در X باشد. آن گاه $\{x_n\}_1^\infty$ به x همگراست اگر و تنها اگر $d(x_n,x)\to 0$.*

برهان. فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ به x همگرا باشد. برای هر عدد حقیقی $\varepsilon\geq 0$، $c\in E$ را طوری انتخاب می کنیم که $0\ll c$ و $K\parallel c\parallel<\varepsilon$. آن گاه $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر$n\geq N$ $d(x_n,x)\ll c$. از طرفی P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K است. پس برای هر $n\geq N$، $\parallel d(x_n,x)\parallel\leq K\parallel c\parallel<\varepsilon$ و این یعنی $d(x_n,x)\longrightarrow 0$.
بالعکس، فرض کنید $d(x_n,x)\longrightarrow 0$. لذا برای هر $\varepsilon>0$، $n_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n_0\geq n$، $\parallel d(x_n,x)\parallel<\varepsilon$. فرض کنید $c\in E$ داده شده باشد که $c\gg 0$، چون $c\in P^o$، پس $\delta>0$ وجود دارد که $N_\delta(c)\subseteq P^o$. لذا برای هر y که $\parallel y\parallel<\delta$، $\parallel c-y-c\parallel=\parallel y\parallel<\delta$ که در نتیجه $c-y\in N_\delta(c)\subseteq P^o$. برای δ، $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\geq N$، $\parallel d(x_n,x)\parallel<\delta$ بنابراین

$$c-d(x_n,x)\in N_\delta(c)\subseteq P^o$$

ودر نتیجه $d(x_n,x)\ll c$. پس دنباله $\{x_n\}_1^\infty$ به x همگرا است.

□