دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

تعیین مرکز توپولوژیکی عملهای مدولی باناخ

مولف :

سمیه محمدزاده

ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات جهت اخذ درجه
دکتری در رشته ریاضی محض

استاد راهنما:

دکترحمید رضا ابراهیمی ویشکی

استادمشاور :

دکترشیرین حجازیان

مرداد ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر، مادر و همسر گرامی

و فرزند دلبندم

از دست و زبان که بر آید
کز عهده شکرش بدر آید

از همه اساتید فرهیخته و گرامی که چگونه اندیشیدن را به من آموختند، نهایت تشکر و قدر دانی را می نمایم. خصوصاً از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر ابراهیمی، که در این مدت از فضائل علمی و اخلاقی ایشان بسیار بهره بردم، سپاسگزارم.

سمیه محمدزاده
۶/ ۶/ ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

مقدمـــه

مبحث منظم پذیری آرنزی یک نگاشت دوخطی و بالاخص منظم پذیری یک جبر باناخ، بیش از نیم قرن است که مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. این موضوع اولین بار توسط آرنز[۱] با معرفی الحاق یک نگاشت دوخطی کراندار مطرح شد، [۳]. او نشان داد که هر نگاشت دوخطی و کراندار $f : X \times Y \longrightarrow Z$، روی فضاهای نرمدار، بطور کلی دارای دو توسیع به صورت نگاشتهای دوخطی و کراندار f^{***} و f^{r***r} است. هرگاه این دو توسیع از f با یکدیگر برابر شوند، f را منظم (آرنزی) گویند؛ همچنین هرگاه عمل ضرب روی یک جبر باناخ A دارای این خاصیت باشد، A نیز منظم (آرنزی) گفته می شود.

سیوین و یود[۲] نشان دادند که هر C^*−جبر منظم پذیر است، [۹]. همچنین یانگ[۳] نشان داد که جبر گروهی $L^{۱}(G)$ منظم است اگر و فقط اگر G متناهی باشد، [۳۵]. از کارهای دیگر در این زمینه می توان به مقاله [۵] از آریکان[۴] اشاره کرد. او در این مقاله محکی برای منظم پذیری یک نگاشت دوخطی کراندار ارائه کرد و با بکارگیری آن، منظم پذیری چندین جبر

[۱] Arens
[۲] Civin and Yood
[۳] Young
[۴] Arikan

خاص از جمله جبر عملگرهای رده اثرپذیر و همچنین جبر $L^\infty(G)$ با ضرب پیچشی، برای گروه فشرده G، را مورد بررسی قرار داد.

در مقاله [۳۶]، یانگ نشان داد که برای هر فضای باناخ X، جبر $K(X)$، شامل همه عملگرهای فشرده، منظم است اگر و فقط اگر X انعکاسی باشد. بعداً این نتیجه توسط اُلگر[۵] گسترش یافت، [۳۲]. همچنین، تلاشهای دیگری در این زمینه، در مقالات اخیر داوس[۶] انجام شده است، ([۱۵] و [۱۶] را ببینید).

ما نیز با ادامه این بحث و مباحث مرتبط با آن، مانند «مرکزهای توپولوژیکی»، «بی نظمی قوی» و غیره، سعی داریم به نوبه خود، به گسترش این موضوع در خلال نتایج جدیدتر بپردازیم. برخی مقدمات و قضایای اساسی که در فصول اصلی از آنها بهره خواهیم برد در فصل اول ذکر شده اند. به عنوان منابعی جامع برای این فصل، می توان [۱۰]، [۱۱]، [۱۸]، [۲۲] و [۲۷] را نام برد.

در فصل دوم، به عنوان اولین فصل اصلی، ابتدا در کلی ترین حالت به منظم پذیری نگاشتهای دوخطی کراندار می پردازیم؛ بالاخص نشان خواهیم داد که چنین نگاشت fی از $X \times Y$ به توی Z، منظم است اگر و فقط اگر $f^{(۴)}(Z^*, X^{**}) \subseteq Y^*$. سپس با استفاده از آن، نتایجی از مقالات [۱۴] و [۵]، در این زمینه را گسترش خواهیم داد. از جمله نگاشتهای دوخطی که در این رساله بیشتر مورد توجه قرار گرفته اند عملهای مدولی هستند. در انتهای این فصل، به منظم پذیری عملهای مدولی بر مبنای برخی خواص تجزیه پذیری پرداخته شده است.

از آنجا که عملهای مدولی، نقشی اساسی در ارتباط با مباحثی همچون «میانگین پذیری»، «الحاق دوم مشتقها» و غیره، ایفا می کنند، موضوع اصلی ما در فصل سوم، به این نگاشتها و

[۵] Ulger
[۶] Daws

مراکز توپولوژیکی آنها اختصاص می یابد. در این خصوص، محکهای مذکور، در رابطه با منظم پذیری را برای عملهای مدولی یک A−مدول باناخ X به کار می بریم.

بدیهی است که بی نظمی قوی نگاشتهای دوخطی، رابطه بسیار نزدیکی با مرکزهای توپولوژیکی آنها دارد. در ادامه این فصل، بی نظمی قوی برخی از الحاقهای عملهای مدولی مورد مطالعه قرار می گیرد. همچنین، برای هر فضای نرمدار X، زیرفضایی از X^{**} تحت عنوان M_X، با دارا بودن خواص قابل توجهی، را معرفی خواهیم کرد؛ به ویژه، نشان می دهیم که مرکز توپولوژیکی چپ هر نگاشت دوخطی کراندار $f : X \times Y \longrightarrow Z$ شامل M_X است. سپس به عنوان کاربردهایی از آن، برخی روابط شمولی میان مرکزهای توپولوژیکی الحاقهای مراتب مختلف f را مورد بررسی قرار می دهیم. از آن جمله، نشان خواهیم داد که همواره $Z^t(f^{*r*}) \subseteq Z(f)$.

برای یک A−مدول باناخ X، الحاق دوم $D^{**} : A^{**} \to X^{***}$ از یک مشتق $D : A \to X^*$، همواره یک توسیع خطی از D است. مسأله ای که در اینجا مطرح می شود این است که تحت چه شرایطی D^{**}، خود نیز یک مشتق است. همانطور که پیش از این نیز اشاره کردیم، منظم پذیری عملهای مدولی جبر باناخ A روی X، شرایط را برای حل این مسأله، هموار می سازد. دیلز، رودریگز و ولاسکو[۷]، این مسأله را برای حالت خاص $X = A$ در مقاله [۱۴] مورد بررسی قرار داده اند؛ از آن جمله نشان داده اند که D^{**} یک مشتق است اگر و فقط $D^{**}(A^{**}) \cdot A^{**} \subseteq A^*$. ما این نتیجه آنها را برای مشتق $D : A \to X^*$ گسترش داده و نشان دادیم که در این حالت D^{**} یک مشتق است اگر و فقط اگر $D^{**}(A^{**}) \cdot X^{**} \subseteq A^*$. این قضیه و نتایج مرتبط با آن، در فصل چهارم مورد بررسی قرار می گیرد.

قابل ذکر است که نتایج فصول ۲، ۳ و ۴ عموماً مطالب جدیدی هستند که برگرفته از مقالات [٦]، [۲۵] و [۲٦] می باشند. برای مطالعه بیشتر در خصوص مفاهیم بکار رفته در این

[۷] Dales, Rodrigues-Palacios and Velasco

رساله می توانید به منابع [۱۱] و [۱۳] مراجعه کنید.

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل به برخی مباحث مقدماتی و پایه ای که در فصول بعد مطرح خواهند شد، می پردازیم. از جمله، ساختار جبرهای باناخ و C^*−جبرها و برخی مثالهای متداول در این زمینه را، به اجمال، مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱−۱ C^*−جبرها

در رساله ای که پیش رو دارید، A همواره یک جبر باناخ روی میدان $\mathbb{K}$ با ضرب π فرض می شود؛ مگر اینکه خلاف آن صریحاً بیان شود. از این رو، ابتدا ساختار این جبرها را به اختصار مورد بحث قرار می دهیم.

هرگاه A یک جبر و $\|\cdot\|$ یک نرم روی فضای خطی A باشد بطوریکه

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad (a, b \in A),$$

زوج $(A, \|\cdot\|)$ را یک جبر نرمدار گویند. یک جبر باناخ، جبر نرمداری مانند A است بطوریکه با نرم $\|\cdot\|$ کامل باشد.

نگاشت طولپای $a \longrightarrow a^*$ از جبر باناخ A بروی A یک برگشت نامیده می شود هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{K}$ و $a, b \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

(آ) $(a+b)^* = a^* + b^*$ ،

(ب) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ ،

(پ) $(a^*)^* = a$ ،

(ت) $(ab)^* = b^* a^*$ ؛

در اینصورت A یک $*$–جبر باناخ نامیده می شود.

$*$–جبر باناخ A را یک C^*–جبر گویند هرگاه

$$\|a^*a\| = \|a\|^{۲} \quad (a \in A).$$

یادآوری می کنیم که زیرفضای خطی I از جبر باناخ A یک ایده‌آل نامیده می شود هرگاه برای هر $a \in A$ و $x \in I$، $ax, xa \in I$.

فرض کنید E یک زیرفضای خطی از A باشد. در این صورت E دارای هم بعد n در A است هرگاه بعد فضای خارج قسمتی A/E برابر با n باشد.

تابعک خطی $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک مشخصه (و یا یک تابعک ضربی) روی جبر باناخ A نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in A$، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

جبر نرمدار A را یکدار گویند هرگاه A همراه با عمل ضرب دارای عضو همانی مانند e باشد بطوریکه $\|e\| = ۱$. تور کراندار $\{e_\alpha\} \subseteq A$ را یک همانی تقریبی چپ A گویند هرگاه

برای هر $a \in A$، در توپولوژی حاصل از نرم A، $a \longrightarrow e_\alpha a$؛ همانی تقریبی راست (کراندار) برای A نیز بطور مشابه تعریف می شود. همچنین یک همانی تقریبی (کراندار) برای A تور کرانداری است که هم یک همانی تقریبی راست و هم یک همانی تقریبی چپ برای A باشد.

در ادامه، به بررسی ساختار چند نمونه از جبرهای باناخ و همچنین مواردی از C^*–جبرها می پردازیم.

فرض کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده موضعی باشد. فضای همه نگاشتهای پیوسته و کراندار مختلط مقدار روی Ω با $C(\Omega)$ نشان داده می شود. در واقع این فضا همراه با اعمال جمع، ضرب و ضرب اسکالر نقطه‌وار و برگشت

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \quad (x \in \Omega,\ f \in C(\Omega))$$

یک C^*–جبر جابجایی و یکدار است که نرم آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \mid f(x) \mid .$$

گوییم نگاشت $f \in C(\Omega)$ در بینهایت صفر می شود هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، مجموعه $\{x \in \Omega : \mid f(x) \mid \geq \epsilon\}$ فشرده باشد؛ مجموعه همه نگاشتهای دارای این خاصیت با $C_0(\Omega)$ نشان داده می شود؛ این مجموعه در واقع یک C^*–زیر جبر بسته از $C(\Omega)$ است. واضح است که $C_0(\Omega)$ یکدار است اگر و فقط اگر Ω فشرده باشد؛ در این حالت، $C_0(\Omega) = C(\Omega)$.

فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرمداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند. فضای همه نگاشتهای خطی کراندار (یا پیوسته) از X بتوی Y با $BL(X, Y)$ نشان داده می شود که در واقع یک فضای خطی نرمدار با نرم

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \ x \in X\ ,\ \|x\| \leq 1\},$$

برای هر $u \in BL(X,Y)$، می باشد. معمولاً $BL(X,\mathbb{K})$ را با X^* نشان داده و دوگان فضای X می نامیم؛ در این حالت X را پیش دوگان X^* گوییم. همچنین $(X^*)^*$ را با X^{**} نشان می دهیم؛ دوگانهای مراتب بالاتر X نیز بطور مشابه تعریف می شوند. مقدار هر $x^* \in X^*$ روی یک $x \in X$ اغلب با $\langle x^*, x\rangle$ نشان داده می شود. همچنین فضای نرمدار X گاه با تصویر آن تحت نگاشت طولپای خطی $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ که به صورت

$$\langle J_X(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \quad (x \in X, x^* \in X^*)$$

تعریف می شود، نشان داده می شود. هرگاه نگاشت J_X پوشا باشد X را انعکاسی گویند.

در ادامه، ساختار «توپولوژی ضعیف» و همچنین «توپولوژی ضعیف*» روی یک فضای نرمدار X را به اختصار مورد بررسی قرار می دهیم.
برای هر $x^* \in X^*$، تعریف می کنیم:

$$p_{x^*}(x) = \mid \langle x^*, x\rangle \mid \quad (x \in X);$$

که در واقع یک شبه نرم روی X است. توپولوژی تعریف شده توسط خانواده $\{p_{x^*};\ x^* \in X^*\}$، توپولوژی ضعیف روی X نامیده می شود. تور $\{x_\alpha\}$ در X، بطور ضعیف همگرا به $x \in X$ است هرگاه برای هر $x^* \in X^*$ ، $\langle x^*, x_\alpha\rangle \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$.

همچنین خانواده همه شبه نرمهای به فرم p_x $(x \in X)$، تعریف شده به صورت

$$p_x(x^*) = \mid \langle x^*, x\rangle \mid \quad (x^* \in X^*),$$

توپولوژی روی X^* تعریف می کند که توپولوژی ضعیف* نامیده می شود. تور $\{x^*_\alpha\}$ در توپولوژی ضعیف* همگرا به $x^* \in X^*$ است هرگاه برای هر $x \in X$ ، $\langle x^*_\alpha, x\rangle \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$.

تعریف ۱.۱ فضای باناخ X، بطور دنباله‌ای ضعیف کامل گفته می شود هرگاه هر دنباله کشی در توپولوژی ضعیف X بطور ضعیف همگرا باشد؛ به عبارت دیگر، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد بطوریکه برای هر $x^* \in X^*$، $\{\langle x^*, x_n\rangle\}$ یک دنباله کشی باشد، آنگاه $x \in X$ وجود داشته باشد که $w - \lim_n(x_n) = x$.

$u \in BL(X,Y)$ را در نظر بگیرید. نگاشت $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ را که به صورت

$$\langle u^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, u(x)\rangle \quad (x \in X, y^* \in Y^*)$$

تعریف می شود، الحاق u می نامیم. u^* در واقع یک نگاشت خطی کراندار است و نسبت به توپولوژیهای ضعیف* X^* و Y^* پیوسته می باشد.

قضیه ۲.۱ (گلدشتاین[۱])[۱۰] فضای نرمدار X با توپولوژی ضعیف*، در X^{**} چگال است.

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. در اینصورت فضای $BL(H,H)$، که آن رابه اختصار با $B(H)$ نشان می دهیم، یک C^*-جبر بااعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه وار می باشد که عمل ضرب آن، $(u,v) \longrightarrow u \circ v$، همان عمل ترکیب توابع است.

تعریف ۳.۱ فرض کنید X و Y فضاهای نرمداری باشند و S گوی واحد بسته در X باشد؛ $u \in BL(X,Y)$ را در نظر بگیرید.

(آ) عملگر u را فشرده گویند هرگاه $\overline{u(S)}$ در Y فشرده باشد؛

(ب) u را فشرده ضعیف گویند هرگاه $\overline{u(S)}$ در توپولوژی ضعیف Y فشرده باشد.

---

[۱] Goldstine

مجموعه همه عملگرهای فشرده از X به توی Y با $K(X,Y)$ نشان داده می شود؛ همچنین $K(X,X)$ را معمولاً با $K(X)$ نشان می دهند.

مثال ۴.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد در اینصورت $K(H)$ یک ایده‌آل بسته از $B(H)$ است و بنابراین یک C^*-جبر می باشد.

قضیه ۵.۱ [۱۰] فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $u \in BL(X,Y)$، در اینصورت شرایط زیر باهم معادلند:

(آ) u فشرده ضعیف است؛

(ب) u^* فشرده ضعیف است؛

(پ) $u^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.

۱—۲ گروههای توپولوژیکی و اندازه هار

یک گروه G مجهز به یک توپولوژی را گروه توپولوژیکی گویند هرگاه عملهای

$$(x,y) \longmapsto xy : G \times G \longrightarrow G \quad \text{و} \quad x \longmapsto x^{-1} : G \longrightarrow G$$

پیوسته باشند.

یک اندازه رادون غیرصفر λ روی یک گروه توپولوژیکی موضعاً فشرده G را یک اندازه هار چپ (راست) گویند اگر برای هر $x \in G$ و مجموعه بورلی E، $\lambda(xE) = \lambda(E)$ ($\lambda(Ex) = \lambda(E)$).

قضیه ۶.۱ [۱۸] اگر λ و μ دو اندازه هار چپ روی گروه توپولوژیکی فشرده موضعی G باشند، آنگاه عدد $c > \circ$ ی وجود دارد بطوریکه $\mu = c\lambda$.

اگر λ یک اندازه هار چپ روی G باشد، در این صورت برای هر $x \in G$، اندازه λ_x که برای هر مجموعه بورلی E با ضابطه $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$ تعریف می شود نیز یک اندازه هار چپ است. بنابراین با استفاده از قضیه ۶.۱، عدد مثبتی مانند $\triangle(x)$ وجود دارد بطوریکه $\lambda_x = \triangle(x)\lambda$. همچنین با به کار گیری این قضیه، می توان تابع $\triangle : G \longrightarrow (\circ, \infty)$ را مستقل از انتخاب λ تعریف کرد؛ $\triangle$ را تابع مدولی G می نامند.

یک اندازه هار چپ روی G، یک اندازه هار راست نیزمی باشد هرگاه ۱ $\equiv \triangle$؛ در این حالت G را تکمدولی گویند. بدیهی است که هر گروه جابجایی، تکمدولی است.

قضیه ۷.۱ [۱۸] هر گروه توپولوژیکی فشرده، تکمدولی است.

۱—۳ جبر گروهی $L^1(G)$

فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. برای هر $1 \leq p < \infty$ ، فضای $L^p(X, \mu)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$L^p(X, \mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C};\ \ \|f\|_p < \infty \text{ و } \text{اندازه پذیر است } f\}$$

که در آن

$$\|f\|_p = [\int_X \mid f \mid^p d\mu]^{\frac{1}{p}}.$$

مجموعه $E \in \mathcal{M}$ موضعاً پوچ گفته می شود هرگاه برای هر $F \in \mathcal{M}$ با شرط $\mu(F) < \infty$، $\mu(E \cap F) = \circ$.

برای تابع اندازه پذیر f روی X تعریف می کنیم:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq ۰; \quad \text{مجموعه } \{x : | f(x) | > \alpha\} \text{ موضعاً پوچ است}\}$$

و آن را سوپریموم اساسی $| f |$ می نامیم و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x\in X} | f(x) | .$$

اکنون $L^\infty(X,\mu)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$L^\infty(X,\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \|f\|_\infty < \infty \text{ و } \text{اندازه پذیر است } f\}.$$

برای $۱ \leq p \leq \infty$، دو عضو f و g از $L^p(X,\mu)$ یکسان فرض می شوند هرگاه مجموعه $\{x; \ f(x) \neq g(x)\}$ موضعاً پوچ باشد. در این صورت $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ یک فضای باناخ خواهد شد.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی فشرده موضعی همراه با اندازه هار λ باشد. برای هر دو تابع اندازه پذیر f و g روی G، پیچش f و g که با $f \star g$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$$f \star g(x) = \int_G f(y)g(y^{-۱}x)d\lambda(y) \quad (x \in G).$$

در این صورت $f \star g$ یک تابع اندازه پذیر است و $(L^۱(G), \star)$ یک جبر باناخ می باشد. این جبر باناخ، یکدار است اگر و فقط اگر G گسسته باشد.

در حالتیکه G یک گروه گسسته و λ اندازه شمارشی باشد، معمولاً برای $۱ \leq p \leq \infty$ به جای $L^p(G)$ نماد $\ell^p(G)$ را به کار می بریم.

برای هر $f \in L^۱(G)$ برگشت f به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^*(x) = \frac{\overline{f(x^{-۱})}}{\triangle(x)} \quad (x \in G);$$

که در آن $\triangle$ تابع مدولی G است. به این ترتیب $L^1(G)$ یک $*-$جبر باناخ می شود.

قضیه ۸.۱ [۲۹] جبر باناخ $L^1(G)$ دارای همانی تقریبی کراندار است.

قضیه ۹.۱ [۲۲] فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این صورت نگاشت $g \longrightarrow \phi_g$ از $L^\infty(G)$ به $L^1(G)^*$ یک یکریختی طولپاست که در آن

$$\phi_g(f) = \int_G fgd\lambda \quad (f \in L^1(G)).$$

۱ـ۴ جبر اندازه $M(G)$

فرض کنید Ω فضای هاسدرف فشرده موضعی باشد. فضای باناخ شامل همه اندازه های مختلط بورلی منظم کراندار روی Ω، با $M(\Omega)$ نشان داده می شود. برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $\mu, \nu \in M(\Omega)$ و زیر مجموعه بورلی E از Ω، اپراتور جمع و ضرب اسکالر این فضا به صورت

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(E) = \alpha\mu(E) + \beta\nu(E)$$

و اپراتور نرم آن به صورت

$$\|\mu\| = \mid \mu \mid (\Omega) \quad (\mu \in M(\Omega))$$

تعریف می شوند که در آن

$$\mid \mu \mid (E) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} \mid \mu(E_i) \mid; \text{ شامل مجموعه های بورلی است } E \text{ افرازی از } \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}\}$$

تغییر کل μ روی زیر مجموعه اندازه پذیر E از Ω است.
لازم به ذکر است که $\mid \mu \mid (E) < \infty$ و $\mid \mu \mid$ یک اندازه مثبت متناهی روی Ω است.

قضیه ۱۰.۱ (قضیه نمایش ریس[۲])[۱۸] فرض کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده موضعی باشد و برای $\mu \in M(\Omega)$ و $f \in C_\circ(\Omega)$ قرار دهید $I_\mu(f) = \int_\Omega f d\mu$. در این صورت نگاشت $I_\mu \longrightarrow \mu$ یک یکریختی طولپا از $M(\Omega)$ به $C_\circ(\Omega)^*$ می باشد.

اکنون فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی فشرده موضعی و هاسدرف باشد. برای هر $\mu, \nu \in M(G) = C_\circ(G)^*$ و $f \in C_\circ(G)$ پیچش μ و ν روی $M(G)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu \star \nu(f) = \int_G f d\mu \star \nu = \int_G \int_G f(xy) d\mu(x) d\nu(y).$$

همچنین برای هر زیر مجموعه بورلی E از G و $\mu \in M(G)$، برگشت μ با ضابطه $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ تعریف می شود. در واقع $(M(G), \star)$ یک $*-$جبر باناخ یکدار می باشد؛ اگر e همانی گروه G باشد در این صورت δ_e ، اندازه دیراک e، همانی $M(G)$ است .

۱—۵ جبر عملگرهای ردهٔ اثرپذیر

فرض کنید $(H, < \cdot >)$ یک فضای هیلبرت باشد. برای هر $u \in B(H)$ و پایه متعامد یکه E از H، نرم ردهٔ اثر u به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|u\|_۱ = \sum_{x \in E} <\mid u \mid x, x >;$$

[۲] Riesz representation theorem