بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

هندسه توپولوژی

عنوان پایان نامه:

پایداری ساختاری میدان‌های برداری دارای خاصیت سایه‌زنی

استاد راهنما: دکتر مهدی فاتحی‌نیا

استاد مشاور: دکتر علی دلاور خلفی

پژوهش و نگارش: سپیده نیک‌نام

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به

پدرم   راه تمام زندگی

و

مادرم   دلخوشی همیشگی

سپاسگذاری

ستایش خدای را که عالم آفرینش را بی‌مثال و بی‌سابقه فکرت به قدرت کامله و مشیت بالغه بیافرید.

مفتخرم از خانواده گرانقدرم که حامی و مشوق‌ام در تمام لحظه‌ها هستند و به انگیزه‌ی وجودشان است، که سختی‌ها آسان می‌نماید منتهای سپاس و قدردانی را داشته باشم.

به جناب آقای دکتر فاتحی‌نیا استاد راهنما و جناب آقای دکتر علی دلاورخلفی استاد مشاورم مراتب سپاس خویش را تقدیم می‌دارم.

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی که داوری پایان‌نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم .

مایلم از این فرصت استفاده کنم و صادقانه از جناب آقای دکتر حسین خورشیدی تشکر نمایم، از این جهت که قویا باور دارم که شخصیتی زیباتر و فراتر از آن‌چه در ذهن من به عنوان یک دانشجو نقش بسته دارا هستند، قدردانی از ایشان به جهت داوری پایان‌نامه موجب کمال امتنان است.

سپیده نیک‌نام

مهر ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه، نتایج اخیر در پایداری ساختاری را با توجه به خاصیت سایه‌زنی و سیستم‌های دینامیکی آناسوف ارائه می‌دهیم.

ابتدا برخی از مفاهیمی که در پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند را بازبینی می‌کنیم. در فصل دوم سیستم‌های دینامیکی خطی معرفی می‌شود. فصل سوم به هم‌ارزی توپولوژیکی، پایداری ساختاری و اصل اول پایداری اختصاص یافته است. بعد از آن سیستم‌های دینامیکی آناسوف برای شارها و دیفئومورفیسم‌ها مطرح می‌گردد (فصل ۴). در نهایت، نشان می‌دهیم که یک میدان برداری در درون مجموعه میدان‌های برداری با خاصیت سایه‌زنی قرار دارد اگر و فقط اگر در هردو خاصیت اصل اول پایداری و شرط متقاطع قوی صدق کند.

واژه‌های کلیدی:

اصل اول پایداری، خاصیت سایه‌زنی، ساختاری پایدار، شار آناسوف، شار گسترشی، شرط متقاطع قوی.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

پیشگفتار

به طور کلی پیدایش مفاهیم مربوط به سیستم‌های دینامیکی، از کارهای وسیع و اساسی پوانکاره[۱] درباره مکانیک اجرام آسمانی شروع شد. پایداری ساختاری سیستم‌ها (دیفئومورفیسم‌ها و شارها) از موضوعات مهم سیستم‌های دینامیکی در ۴۰ سال اخیر بوده است، از جمله دانشمندانی که می‌توان در این زمینه معرفی نمود استفان اسمیل[۲] آمریکایی است.

کازوهیرو ساکایی[۳] در مرجع [۲۵] ثابت کرده است که C^1-درون مجموعه دیفئومورفیسم‌ها با خاصیت سایه‌زنی، با مجموعه دیفئومورفیسم‌های ساختاری پایدار یکی می‌شود.

موریس[۴] و همکاران اثبات کردند که C^1-درون مجموعه میدان‌های برداری که به طور توپولوژیکی C^1-پایدار هستند، به عنوان میدان‌های برداری ساختاری پایدار مشخص می‌شود. در این راستا مراجع [۱۵، ۱۶، ۲۴] را ملاحظه نمایید.

آناسوف[۵]، دانشمند روسی، اثبات کرد که دیفئومورفیسم‌ها با هر بعدی، ساختاری پایدار هستند و از بین منیفلدهای با بعد دو، فقط روی چنبره دیفئومورفیسم آناسوف (دیفئومورفیسم‌هایی که در سال ۱۹۶۷ به نام این دانشمند روسی ثبت شد) وجود دارد.

از مدت‌ها قبل راه‌حل‌های گوناگونی برای نشان دادن خاصیت سایه‌زنی شارها مطرح شد، اما در نهایت اثبات این‌که پایداری ساختاری شارها خاصیت سایه‌زنی دارد توسط پیلیوجین[۶]، دانشمند روسی، در سال ۱۹۹۷ به ثبت رسید.

در فصل اول تعاریف و مطالب مقدماتی برای فصل‌های بعد تشریح شده است. برخی از مراجع مورد استفاده عبارت هستند از: [۳۰، ۳۱، ۳۲].

فصل دوم به سیستم‌های دینامیکی خطی اختصاص یافته است و در مورد دستگاه معادلات

---
[۱] Poincare
[۲] Stephan Smale
[۳] Kazuhiro Sakai
[۴] Moriyasu
[۵] Anosov
[۶] Pilyugin

دیفرانسیل مربوط به این سیستم‌ها به تفصیل سخن گفته شده است. در این‌جا دو مرجع [۱۰، ۱۹] بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در فصل سوم تلاش کرده‌ایم پایداری ساختاری را به صورتی گویا با ذکر مثال توضیح دهیم. مطالب این فصل با بکارگیری مراجعی مانند [۴، ۱۷، ۱۹، ۲۰، ۲۸] تدوین شده است.

فصل چهارم، سیستم آناسوف با مرکزیت شار آناسوف را در بر دارد و برگرفته از مراجعی مانند [۱، ۲، ۵] است.

فصل آخر با تعریف خاصیت سایه‌زنی آناسوف آغاز می‌شود و مجموعه همه میدان‌های برداری که خاصیت سایه زنی دارند را با $S(M)$ نشان می‌دهیم. هدف از توضیح و تفصیل مطالب تا به این‌جا بیان و اثبات قضیه زیر است:

قضیه اصلی: فرض کنید میدان برداری X هیچ نقطه تکینی نداشته باشد، X در C^1-درون $S(M)$ است، اگر و تنها اگر در هر دو خاصیت اصل اول پایداری و شرط متقاطع قوی صدق کند.

این قضیه دارای نتایج زیادی است که نتیجه زیر یکی از مهم‌ترین آن‌ها است:

نتیجه: برای میدان برداری شرایط زیر معادل هستند:

الف. X درون $S(M)$ و گسترشی است.

ب. X آناسوف است.

این فصل حاوی تعاریف و لم‌های لازم در راستای بیان و اثبات این قضیه است و با آوردن برهان آن کامل می‌شود. برخی از مراجع مورد استفاده عبارت هستند از: [۱، ۳، ۷، ۱۴، ۱۶، ۲۳].

فصل ۱

تعاریف اولیه

در این فصل، به بیان مطالب و مفاهیمی پرداخته‌ایم که در راستای فصل‌های بعد مورد نیاز هستند. قضیه تابع ضمنی و قضیه اساسی وجود و یکتایی بیان شده است. برای تعاریفی که مرتبط با منیفلدها هستند ازجمله: تعریف کارت، زیرمنیفلد، فضای مماس، منیفلد مرزدار، منیفلد ریمان و... از مراجع [۳۱] و [۳۲] استفاده شده است. تابع جهشی و همسایگی لوله‌ای را تعریف کرده‌ایم که در فصل ۵ از آن‌ها استفاده شده است. در مورد مقدار ویژه و بردار ویژه با ذکر مثال صحبت نموده‌ایم. تعریف ریاضی سیستم دینامیکی مطرح شده است و این‌که سیستم‌های دینامیکی بر حسب زمان به دو دسته اصلی سیستم دینامیکی گسسته و سیستم دینامیکی پیوسته تقسیم می‌شوند.

۱.۱ حسابان روی $\mathbb{R}^n$ و منیفلد هموار

فرض کنیم $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک تابع است که روی زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{R}^m$ تعریف شده است.

توابع حقیقی مقدار $f_1, ..., f_k$ از U به $\mathbb{R}$ وجود دارند که به ازای هر $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in U$

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_k(x)),$$

تابع f را در نقطه $P \in U$ مشتق پذیر گوییم، اگر تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ و $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ وجود داشته باشند که به ازای نقطه v که $\|v\|$ به قدر کافی کوچک است و $P+v \in U$ داشته باشیم، $f(P+v) = f(P) + T(v) + g(v)$ و

$$\lim_{v \to 0} \frac{g(v)}{\|v\|} = 0.$$

و در صورتی که تابع f در نقطه P مشتق پذیر باشد آن‌گاه

$$df(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

ماتریس T در تعریف مشتق‌پذیری تابع f، همان $df(P)$ است.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنیم $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۳$ یک تابع است که $f(x,y,z)=(x+y\,,\,xy+z\,,\,yz+x)$ در این‌صورت:

$$df(\circ)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

اگر تابع f در هر نقطه از دامنه مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه گوییم مشتق‌پذیر است.

اگر تابع f دارای مشتق مرتبه rام باشد آن‌گاه گوییم f یک تابع هموار از رده‌ی $C^r(U)$ است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید U و V مجموعه‌هایی باز در $\mathbb{R}^m$ باشند، اگر $f:U\longrightarrow V$ یک به یک، پوشا و مشتق‌پذیر از رده‌ی $C^r(U)$ باشد، آن‌گاه گوییم f یک همئومورفیسم از رده‌ی $C^r(U)$ از U به V است. اگر تابع مشتق‌پذیر $g:V\longrightarrow U$ از رده‌ی $C^r(U)$ وجود داشته باشد که $gof:U\longrightarrow U$ همانی باشد آن‌گاه گوییم f یک دیفئومورفیسم از رده‌ی $C^r(U)$ است.

گزاره ۳.۱.۱. [۳۳] ***(قاعده زنجیره‌ای):*** *فرض کنیم $U\subset\mathbb{R}^m$ و $V\subset\mathbb{R}^n$ مجموعه‌هایی باز باشند. اگر $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ در $p\in U$ مشتق‌پذیر باشد و $f(U)\subset V$ و $g:V\longrightarrow\mathbb{R}^k$ در $q=f(p)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه تابع $gof:U\longrightarrow\mathbb{R}^k$ در p مشتق‌پذیر است و*

$$d(gof)(p)=dg(f(p))\,o\,df(p).$$

نتیجه ۴.۱.۱. *اگر f و g هر دو از رده‌ی C^r باشند آن‌گاه gof از رده‌ی C^r است.*

نتیجه ۵.۱.۱. *اگر $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^k$ در $p\in U$ مشتق‌پذیر باشد و $\alpha:(-۱,۱)\longrightarrow U$ یک خم[۱] باشد که $\alpha(\circ)=p$ و $(\frac{d}{dt})\alpha(\circ)=V$، آن‌گاه $fo\alpha:(-۱,۱)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ یک خم است که در صفر مشتق‌پذیر است و*

$$(\frac{d}{dt})(fo\alpha)(\circ)=df(p)V.$$

قضیه ۶.۱.۱. [۳۳] ***(تابع ضمنی):*** *فرض کنید $U\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز است و تابع $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ از رده‌ی $C^r(r\geq ۱)$ است. قرار دهید $Z_\circ=(x_\circ,y_\circ)\in U$ و $C=f(Z_\circ)$، که $x_\circ\in\mathbb{R}^m$ و $y_\circ\in\mathbb{R}^n$. همچنین مشتق جزئی نسبت به مولفه دوم در نقطه $Z_\circ$، $d_۲f(Z_\circ):$*

[۱] curve

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وارون‌پذیر باشد. در این صورت مجموعه باز $V \subset \mathbb{R}^m$ شامل $x_\circ$ و مجموعه باز $W \subset U$ شامل $Z_\circ$ و تابع مشتق‌پذیر $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارند که به ازای هر $x \in V$، داریم $(x, g(x)) \in W$ و $f(x, g(x)) = C$.

حال برخی نتایج مهم در معادلات دیفرانسیل را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه باز است. هر تابع به شکل $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک میدان برداری بر روی U نامیده می‌شود.

فرض کنیم $p \in U$، $\varepsilon > \circ$ و X یک میدان برداری از رده‌ی $C^r(r \geq ۱)$ است. خم انتگرال[۲] میدان برداری X، گذرنده از p، نگاشتی مشتق‌پذیر مانند $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ است که $\alpha(\circ) = p$ و به ازای هر $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$، $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. نگاشت α جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} = X(t)$ با شرایط اولیه $x(\circ) = p$ نیز نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۱.۱. [۱۷] **(*قضیه اساسی وجود و یکتایی*):** *فرض کنید X یک $C^r(r \geq ۱)$ میدان برداری روی مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^m$ است و قرار دهید $p \in U$. یک خم انتگرال مانند $\alpha : I \longrightarrow U$ وجود دارد که I یک بازه باز شامل صفر است و $\alpha(\circ) = p$. همچنین اگر $\beta : J \longrightarrow U$ خم انتگرال دیگری باشد که $\beta(\circ) = p$، آن‌گاه به ازای هر $t \in I \cap J$، $\alpha(t) = \beta(t)$. یک شار موضعی از میدان برداری X در نقطه $p \in U$، یک نگاشت مانند $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p \longrightarrow U$ است که $V_p \subset U$ یک همسایگی باز شامل p است که به ازای هر $q \in V_p$، تابع $\phi_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ با ضابطه $\phi_q(t) = \phi(t, q)$ یک خم انتگرال گذرنده از q است.*

به عبارت دیگر به ازای هر $q \in V_p$، $\phi(\circ, q) = q$ و برای هر $(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p$:

$$(\frac{\partial}{\partial t})\phi(t, q) = X(\phi(t, q)).$$

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید X یک میدان برداری از رده‌ی $C^r(r \geq ۱)$ است. به ازای هر $p \in U$ یک شار موضعی مانند $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p \longrightarrow U$ موجود است.*

تعریف ۹.۱.۱. منیفلد هموار[۳]: مجموعه $M \subset \mathbb{R}^k$ یک منیفلد هموار از بعد m است، هرگاه به ازای هر نقطه مانند p یک همسایگی باز $U \subset M$ شامل p و یک همئومورفیسم مانند $\rho : U_\circ \longrightarrow$

---
[۲] integral curve
[۳] smooth manifold

U موجود هستند به گونه‌ای که $U_\circ$ یک همسایگی باز شامل مبدا در $\mathbb{R}^m$ است و $\rho^{-1} : U \longrightarrow U_\circ$ یک همئومورفیسم است که برای هر $U \in U_\circ$:

$$d_{\rho^{-1}}(U) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

یک به یک است.

مثال ۱۰.۱.۱. نمودار تابع $f(x) = e^x$ یک منیفلد هموار یک بعدی است.

مثال ۱۱.۱.۱. هر مجموعه به شکل $U_c = \{x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ یک منیفلد هموار دو بعدی است.

به طور کلی هر رویه دو بعدی هموار یک منیفلد هموار دو بعدی است.

یک میدان برداری روی منیفلد هموار M به هر نقطه $p \in M$ یک بردار نسبت می‌دهد. ارائه میدان برداری روی یک منیفلد معادل ارائه شار روی آن منیفلد است.

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم M یک منیفلد فشرده و X یک میدان برداری هموار از رده‌ی C^r روی M است. یک شار سراسری برای X روی M وجود دارد. به عبارت دیگر یک تابع $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ از رده‌ی C^r موجود است که به ازای هر $p \in M$،*

$$(\frac{\partial}{\partial t})\phi(t, p) = X(\phi(t, p)),$$

و

$$\phi(\circ, p) = p.$$

نتیجه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید X یک میدان برداری از رده‌ی C^r روی منیفلد هموار و فشرده M است. فرض کنید $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ شار سراسری حاصل از X روی M است. برای هر $t \in \mathbb{R}$ تابع $f_t : M \longrightarrow M$، که $f_t(p) = \phi(t, p)$ یک تابع دیفئومورفیسم از رده‌ی C^r است. علاوه بر این تابع $f_\circ$ همانی است و به ازای هر $t, s \in \mathbb{R}$ داریم:*

$$f_{t+s} = f_t o f_s.$$