دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

خواص همواری رسته‌ی S–سیستم‌های مرتبِ دوری

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور:
دکتر علی‌اکبر استاجی

نگارش:
مجتبی قاسمیان

مهر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

همسرم

سپاس و قدر دانی

سپاس و ستایش پروردگارم که مرا توفیق داد تا در مقطعی دیگر از زندگی به کسب دانش بپردازم. از استاد عزیز و و بزرگوارم جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی که در طول دوره تحصیل از تجربه‌های ارزشمندشان بهره‌مند شده و راهنمایی این جانب را در طول این پایان نامه داشتند، مراتب سپاس و قدردانی به جای می‌آورم. هم چنین جا دارد از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر علی اکبر استاجی که مشاوره این پایان نامه را داشته‌اند نهایت تشکر را داشته باشم. از جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و سرکار خانم دکتر مژگان محمودی که داوری این پایان نامه را قبول کردند کمال تشکر و سپاس را دارم. از خانواده‌ام که با صبر و بردباری مرا یاری کردند تشکر کرده و از مادرم و پدرم که در تمام مراحل زندگی مشوق من بوده‌اند، قدردانی می‌کنم.

مجتبی قاسمیان

مهرماه ۱۳۸۸

چکیده

رسته‌ی $S-$ سیستم‌های مرتبِ جزئی (S − Pos) تلفیقی از رسته‌ی $S-$ سیستم‌ها (S − Act) و رسته‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی (Pos) است. عمده‌ی بحث در این پایان نامه بررسی خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتب دوری است.

در این پایان نامه رسته‌ی $S-$ سیستم‌های مرتب و ساختارهای کلی این رسته را شرح داده و با معرفی شرط (P) و شرط (E) به بیان خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتب می‌پردازیم. بعلاوه نتایج حاصل از آنها را برای $S-$ سیستم‌های مرتب دوری تحلیل می‌کنیم و نهایتاً تکواره‌های مرتب نیم تام، PP و PSF را با توجه به خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتبِ دوری توصیف می‌کنیم. از نتایج مهم حاصل شده بیان خاصیت‌های هموار مرتبِ ضعیف و هموار مرتبِ ضعیف اصلی برای $PP-$ سیستم‌های مرتب و $PSF-$ سیستم‌های مرتب، فقط به کمک روابط ترتیبی آنها و تکواره های مرتبِ مرتبط با آنها می‌باشد (بدون استفاده از ضرب تانسوری).

ایده‌ی اصلی این تحقیق از مقاله‌ی

$$On\ flatness\ properties\ of\ cyclic\ S-poset$$

نوشته‌ی $Xiaoping\ Shi$ گرفته شده و با استفاده از سایر منابع سعی شده است مفاهیم به طور دقیق مورد بررسی قرار گیرند.

واژه های کلیدی: تکواره‌ی مرتب، $S-$ سیستم مرتب، همنهشتی مرتب، شرط (E)، شرط (P)، هموار قوی، هموارمرتب، هموار مرتبِ ضعیف، شبه ترتیب، $I-$منظم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

تحقیق در مورد خواص همواری، $S-$ سیستم‌های مرتبِ جزئی برای اولین بار توسط فخرالدین [۱] صورت گرفت که نتایج کار در دهه ۱۹۸۰ میلادی طی مقالاتی در سالهای ۱۹۸۶ و ۱۹۸۸ ارائه شد. این تحقیقات توسط شی، [۲] لیو[۳] و بولمن فلمینگ [۴] ادامه پیدا کرد. لان[۵] و بولمن فلمینگ برای خواص زیر عقب بر هموار و زیر برابر ساز هموار شرایط معادل (P) و (E) را مطرح کردند. در این نوشته عمده‌ی بحث ما در رابطه با خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتبِ جزئی دوری می‌باشد. فصل اول را به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه اختصاص داده‌ایم که شامل چهار بخش است. در بخش اول مفاهیم رسته‌ای را می‌گوییم. در بخش‌های دوم و سوم مجموعه‌های مرتب جزئی و تکواره‌ها را بیان می‌کنیم. و از آن جایی که در فصل‌های آتی اساس کار مرتبط با $S-$ سیستم‌ها است، بخش چهارم را به این موضوع اختصاص داده‌ایم.

فصل دوم شامل شش بخش است. در بخش اول $S-$ سیستم‌های مرتب جزئی را معرفی می‌کنیم. در بخشهای دوم، سوم و چهارم بعضی از ساختارهای کلی این رسته را بررسی می‌کنیم. بخش پنجم را به ضرب تانسوری اختصاص داده‌ایم و در بخش ششم که مهمترین موضوع این فصل است خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتب جزئی را تحلیل می‌کنیم. فصل سوم شامل سه بخش است که بخش اول را به رابطه‌ی ترتیبیِ $S-$

---

[۱] Fakhrudin

[۲] Shi

[۳] Liu

[۴] Bulman Fleming

[۵] Laan

سیستم‌های مرتب خارج قسمتی اختصاص داده‌ایم. در بخش دوم خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتب جزئی به کمک همنهشتی‌های مرتب تحلیل می‌کنیم. و در بخش سوم خاصیت $I-$منظمی را می‌گوییم. در فصل چهارم به معرفی برخی از تکواره‌های مرتب با توجه به خواص همواری $S-$ سیستم‌های مرتب جزئی دوری می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

با توجه به موضوع‌هایی که در فصل‌های آتی ارائه خواهیم کرد، در این فصل سعی شده است که تقریباً تمام مطالب مورد نیاز ارائه شود.

۱.۱ مفاهیم رسته‌ای

یکی از ابزارهای سودمند در بررسی ساختارهای جبری رسته[۱] می باشد. رسته زبانی مشترک است که زمینه‌ای عمومی برای پرداختن به حالات مختلف ریاضی را فراهم می‌کند. ایده‌ی شهودی در تعریف رسته این است که ساختمان‌های ریاضی، همراه با نگاشت‌های مناسبی بین اشیاء آنها از خواص مشترکی برخوردار هستند. با توجه به اهمیت موضوع این فصل را به آن اختصاص داده‌ایم.

---

[۱] $category$

تعریف ۱.۱ : هر **رسته** رده‌ای است مانند $\mathcal{C}$ از اشیاء که معمولا با $A, B, C....$ نشان داده شده و به ترتیب شرایط زیر را دارا باشد:

۱) یک رده از مجموعه‌های از هم جدا، که با $hom(A,B)$ نمایش داده می شود (برای هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک عضو f از $hom(A,B)$ یک **ریخت**[۲] از A به B نامیده و با $f: A \to B$ نمایش داده می شود)

۲) به ازای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء در $\mathcal{C}$، تابعی مانند

$$hom(B,C) \times hom(A,B) \to hom(A,C)$$

(برای ریخت‌های $g: B \to C$ و $f: A \to B$، این تابع به صورت $(g,f) \to gof$ نوشته و $gof: A \to C$ ترکیب f و g خوانده می‌شود) که در دو اصل موضوع زیر صدق می کند:

الف) هر گاه $h: C \to D$ و $f: A \to B$ و $g: B \to C$ ریخت هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آن گاه $ho(gof) = (hog)of$(شرکت پذیری).

ب) به ازای هر شئ B از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $id_B: B \to B$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g: B \to C$ و $f: A \to B$

$$id_B of = f \quad \text{و} \quad goid_B = g$$

تعریف ۲.۱ : در رسته‌ی $\mathcal{C}$ ریخت $f: A \to B$ را **تعادل** نامند، اگر ریختی مانند $g: B \to A$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به طوری که $gof = id_A$ و $fog = id_B$.

ترکیب دو تعادل، وقتی تعریف شده باشند، یک تعادل است. اگر $f: A \to B$ تعادل باشد گوییم A و B **معادل** می‌باشند و می‌نویسیم $A \simeq B$.

[۲] $morphism$

تعریف ۳.۱ : رسته‌ی $\mathcal{D}$ را **زیر رسته‌ای** از رسته‌ی $\mathcal{C}$ نامند، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) اشیاء $\mathcal{D}$ زیر مجموعه‌ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشند؛

۲) به ازای هر A و B از اشیاء $\mathcal{D}$، $hom_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq hom_{\mathcal{C}}(A,B)$؛

۳) ترکیب ریخت ها در $\mathcal{D}$، تحدیدی از ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ باشد.

مثال ۴.۱ : فرض کنیم $\mathcal{S}$ **رسته‌ی تمام مجموعه‌ها** باشد به ازای $A,B \in \mathcal{S}$، $hom(A,B)$ مجموعه‌ی تمام توابع $f : A \to B$ است. ریخت f از $\mathcal{S}$ یک **تعادل** است اگر و تنها اگر f **دوسویی** باشد.

مثال ۵.۱ : فرض کنیم $\mathcal{G}$ **رسته‌ی تمام گروه‌ها** باشد به ازای $A,B \in \mathcal{G}$، $hom(A,B)$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های گروه $f : A \to B$ است. ریخت f یک **تعادل** است اگر و فقط اگر f **یکریختی** باشد.

تعریف ۶.۱ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و $\{A_i|\ i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک **حاصل ضرب**[3] برای خانواده‌ی $\{A_i|\ i \in I\}$ شیئی است مانند P از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت ها مانند $\{\pi_i : P \to A_i|\ i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شیٔ B و خانواده‌ی $\{\phi_i : B \to A_i|\ i \in I\}$ از ریخت ها، ریخت منحصر به فردی مانند $\phi : B \to P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$ داشته باشیم $\pi_i\phi = \phi_i$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "\exists!\phi"'] \arrow[d, "\phi_i"] & \\
P \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \arrow[r] & \circ
\end{tikzcd}$$

[3] $product$

قضیه ۷.۱ : هرگاه $(P,\{\pi_i\})$ و $(Q,\{\psi_i\})$ دو حاصل ضرب برای خانواده‌ی $\{A_i|i\in I\}$ از اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند آن گاه P و Q معادلند.

برهان: به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۷.۳.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۸.۱ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و $\{A_i|\ i\in I\}$ خانواده‌ای از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد. یک **هم حاصل ضرب** [۴] برای خانواده‌ی $\{A_i|\ i\in I\}$ شیئی است مانند S از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت ها مانند $\{\iota_i : A_i \to S|\ i\in I\}$ به طوری که به ازای هر شئ B و خانواده‌ی $\{\psi_i : A_i \to B|\ i\in I\}$ از ریخت ها، ریخت منحصر به فردی مانند $\psi : S\to B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i\in I$ داشته باشیم $\psi o\iota_i=\psi_i$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & S \arrow[dl, "\exists!\psi"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

قضیه ۹.۱ : هرگاه $(S,\{\iota_i\})$ و $(S',\{\lambda_i\})$ دو هم حاصل ضرب برای خانواده‌ی $\{A_i|i\in I\}$ از اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند آن گاه S و S' معادلند.

برهان: به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۷.۵.۱ مراجعه شود.

■

---

[۴] $coproduct$

تعریف ۱۰.۱ رسته‌ی ملموس[۵] رسته‌ای است مانند $\mathcal{C}$ همراه با تابعی چون σ که به هر شیٔ A از $\mathcal{C}$ مجموعه‌ی $\sigma(A)$ (به نام مجموعه‌ی زمینه‌ی A) را نسبت می‌دهد به طوری که شرایط زیر را داشته باشیم:

۱) هر ریخت $A \to B$ از $\mathcal{C}$ تابعی بر مجموعه‌های زمینه‌ی $\sigma(A) \to \sigma(B)$ است؛

۲) ریخت همانیِ هر شیٔ A از $\mathcal{C}$ تابع همانی بر مجموعه‌ی زمینه‌ی $\sigma(A)$ است؛

۳) ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ با ترکیب توابع بر مجموعه‌های زمینه یکی است.

تعریف ۱۱.۱ : فرض کنیم F شیئی در رسته‌ی ملموس $\mathcal{C}$، X مجموعه‌ای ناتهی و $i : X \to F$ یک نگاشت باشد. F بر مجموعه‌ی X **آزاد** [۶] است اگر به ازای هر شیٔ A از $\mathcal{C}$ و نگاشت $f : X \to A$ ریخت منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\overline{f} : F \to A$ موجود باشد به طوری که، $\overline{f}i = f$. به عبارت دیگر نمودار ذیل جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ F \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۲.۱ : شیٔ I در رسته‌ی $\mathcal{C}$ را **عمومی (یا اولیه**)[۷] گویند اگر به ازای هر شیٔ C از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت مانند $I \to C$ موجود باشد. شیٔ T از $\mathcal{C}$ را **هم عمومی (یا نهایی**)[۸] گویند اگر به ازای هر شیٔ C از $\mathcal{C}$، یک و فقط یک ریخت مانند $C \to T$ وجود داشته باشد.

---

[۵] *concrete category*

[۶] *free*

[۷] *initial object*

[۸] *terminal object*

مثال ۱۳.۱ : در رسته‌ی مجموعه‌ها مجموعه‌ی $\emptyset$ شئ عمومی و مجموعه‌ی تک عضوی شئ هم عمومی می‌باشند.

لم ۱۴.۱ : هر دو شئ **عمومی** (یا هم عمومی) در رسته‌ی $\mathcal{C}$ معادلند.

■

تعریف ۱۵.۱ : ریخت $f : C \to D$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$ **تکین** (یا تکریختی) است اگر به ازای جمیع اشیاء B و ریخت های $g, h \in hom(B, C)$ از $fh = fg$ نتیجه شود که $h = g$.

تعریف ۱٦.۱ : ریخت $f : C \to D$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$ **برویی** (یا بروریختی) است اگر به ازای جمیع اشیاء E و ریخت‌های $k, t \in hom(D, E)$ از $kf = tf$ نتیجه شود که $k = t$.

مثال ۱۷.۱ یک ریخت در رسته‌ی مجموعه‌ها تکین (برویی) است اگر و فقط اگر یک به یک (پوشا) باشد.

قضیه ۱۸.۱ : فرض کنیم $f : B \to C$ و $g : C \to D$ ریخت‌هایی از رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱) اگر f و g تکین باشند، آن گاه gf تکین است؛

۲) اگر gf تکین باشد، آن گاه f تکین است؛

۳) اگر f و g برویی باشند، آن گاه gf برویی است؛

۴) اگر gf برویی باشد، آن گاه g برویی است؛

۵) اگر f یک تعادل باشد، آن گاه f تکین و برویی می باشد.

برهان: به مرجع [۹] قضیه ۱۳.٦.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۱۹.۱ : فرض کنیم $f : A \to B$ ریختی از رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. f را **درون بری** [۹] گوییم اگر f دارای معکوس راست باشد، یعنی $g \in hom(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $fg = id_B$. بعلاوه گوییم B **درون‌بر** A است.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم $f : A \to B$ ریختی از رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. f را **هم درون بری** [۱۰] گوییم اگر f دارای معکوس چپ باشد یعنی $g \in hom(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $gf = id_A$. بعلاوه گوییم A**هم‌درون‌بر** B است.

قضیه ۲۱.۱ : اگر $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی ملموس باشد. آن گاه برای ریخت $f : A \to B$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

هم درون بری $\Leftarrow$ یک به یک بودن $\Leftarrow$ تکریختی

درون بری $\Leftarrow$ پو شا بودن $\Leftarrow$ برو ریختی

برهان: به مرجع [۹] قضیه‌ی ۱۴.۶.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۲۲.۱ : شئ P در رسته‌ی $\mathcal{A}$ **تصویری** می نامیم اگر برای هر $f \in hom(P, Y)$ و هر بروریختی $\pi \in hom(X, Y)$، ریخت $\bar{f} \in hom(P, X)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\pi \bar{f} = f$$

به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

---

[۹] $retraction$

[۱۰] $coretraction$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\bar{f}"'] \\ X \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

قضیه ۲۳.۱ : درون بر هر شئ تصویری، تصویری است.

برهان: به [۹] گزاره‌ی ۳۰.۷.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۲۴.۱ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. **تابعگر همورد** [۱۱] T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، که با $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ نمایش داده می‌شود، تابعی است که به شئ C از $\mathcal{C}$ شیئی مانند $T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و به ریخت $f : C \to C'$ از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $T(f) : T(C) \to T(C')$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد به طوری که

۱) به ازای هر ریخت همانی id_C از $\mathcal{C}$، $T(id_C) = id_{T(C)}$

۲) به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ که ترکیب gof آن‌ها تعریف شده باشد، $T(gof) = T(g)T(f)$.

مثال ۲۵.۱ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی ملموس باشد. تابعگر فراموشی همورد از $\mathcal{C}$ به رسته‌ی $\mathcal{S}$ از مجموعه‌ها به هر شئ A مجموعه‌ی زمینه‌ی آن و به هر ریخت $f : A \to A'$ تابع $f : A \to A'$ را نسبت می‌دهد.

تعریف ۲۶.۱ : فرض کنید $f, g : A \to B$ یک زوج از ریخت‌ها باشند. زوج (E, e) که $E \xrightarrow{e} A$ **برابرساز** [۱۲] برای f و g نامیده می شود هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

---

[۱۱] $covariant\ functor$

[۱۲] $equalizer$

۱) $fe=ge$

۲) برای هر ریخت $e':E'\to A$ اگر $fe'=ge'$ ریختی منحصر به فرد مانند $\bar{e}:E'\to E$ به طوری موجود باشد که $e'=e\bar{e}$ یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
& E' \arrow[dl, "\bar{e}"'] \arrow[d, "e'"] & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

قضیه ۲۷.۱ : گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) برابر ساز در حد یکریختی منحصر به فرد است.

۲) اگر (E,e) برابر ساز باشد e تکریختی است.

برهان: [۹] گزاره‌ی ۸.۲.۲ مراجعه شود.

■

تعریف ۲۸.۱ : فرض کنیم $f,g:A\to B$ یک زوج از ریخت‌ها باشند. زوج (c,C) که $B\xrightarrow{c}C$ **هم برابر ساز**[۱۳] برای f و g نامیده می شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $cf=cg$

۲) برای هر ریخت $c':B\to C'$ اگر $c'f=c'g$، ریخت منحصر مانند $\bar{c}:C\to C'$ به قسمی موجود باشد که $c'=c\bar{c}$، یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c'"'] & C \arrow[dl, "\bar{c}"] \\
& C' &
\end{tikzcd}$$

[۱۳] $coequalizer$

تعریف ۲۹.۱ : فرض کنیم ریخت‌های f_1 و f_2 به صورت زیر در رسته‌ی $\mathcal{A}$ داده شده باشند:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

جفت $(P,(p_1,p_2))$ با $p_i : P \to X_i$ که $i = 1, 2$ در $\mathcal{A}$ **عقب بر** [14] جفت (f_1, f_2) نامیده می‌شود اگر

۱) $f_1 p_1 = f_2 p_2$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, "p'_1"] \arrow[ddr, "p'_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

۲) برای هر جفت $(P',(p'_1,p'_2))$ با $p'_i : P' \to X_i$، $i = 1, 2$ که $f_1 p'_1 = f_2 p'_2$ ریخت منحصر به فرد $p : P' \to P$ وجود داشته باشد که $p_i p = p'_i$، $i = 1, 2$. به عبارت دیگر دیاگرام بالا جابجایی باشد.

عقب بر $(K,(p_1,p_2))$ ازجفت (f,f) برای ریخت $f : X \to Y$، هسته جفت f نامیده می‌شود.

تعریف ۳۰.۱ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک رسته و f_1 و f_2 به صوررت زیر داده شده باشند:

[14] $pullback$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & Y_2 \\ Y_1 & \end{tikzcd}$$

جفت $((q_1, q_2), Q)$ با $q_i : Y_i \to Q$، $i = 1, 2$ در $\mathcal{A}$، **جلو بر** [15] جفت (f_1, f_2) نامیده می‌شود اگر

۱) $q_1 f_1 = q_2 f_2$

۲) برای هر جفت $((q'_1, q'_2), Q')$، $q'_i : Y_i \to Q'$، $i = 1, 2$ و $q'_1 f_1 = q'_2 f_2$ ریخت منحصر به فرد $q : Q \to Q'$ وجود داشته باشد به طوری که $qq_i = q'_i$، $i = 1, 2$. به عبارت دیگر دیاگرام زیر

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_2 \arrow[d, "q_2"'] \arrow[ddr, "q'_2"] & \\ Y_1 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[drr, "q'_1"'] & Q \arrow[dr, "q"] & \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد.

جلو بر $((q_1, q_2), Q)$ از جفت (f, f)، را هم هسته جفت f می‌نامند.

۲.۱ مجموعه‌های مرتب جزئی و مشبکه

از آن جایی که عمده‌ی کار صورت گرفته در فصل های آتی روی مجموعه‌های مرتب جزئی است این بخش را به این موضوع اختصاص داده‌ایم که با تعریف زیر آغاز می شود.

[15] pushout