بسم الله الرحمن الرحیم

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** است که در ۱۳۹۲ شهریور در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر محمدتقی حیدری** و مشاورهٔ **دکتر علی ایلون‌کشکولی** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

برد عددی توانهای یک عملگر

استاد راهنما

دکتر محمدتقی حیدری

پژوهشگر

بهنام کریمی

۱۳۹۲ شهریور

برد عددی توانهای یک عملگر

به وسیلهٔ

بهنام کریمی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی محض

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱– استاد راهنما: دکتر محمدتقی حیدری با مرتبهٔ علمی استادیار امضاء

۲– استاد مشاور: دکتر علی ایلون‌کشکولی با مرتبهٔ علمی استادیار امضاء

۳– استاد داور : دکتر حمیدرضا گودرزی با مرتبهٔ علمی استادیار امضاء

۴– استاد داور : دکتر مهدی شریف‌زاده با مرتبهٔ علمی استادیار امضاء

۵– نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر حمیدرضا رجبی با مرتبهٔ علمی استادیار امضاء

تقدیم به:

اساتید و همکلاسیهای خوبم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و ریاضی را آفرید تا شاید عقل آدمی کمی از این دنیای فانی فاصله بگیرد که

آدمی در عالم فانی نمی‌آید به دست　　　عالمی دیگر بباید ساخت وز نو آدمی

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدتقی حیدری ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی ایلون‌کشکولی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را.

بهنام کریمی

۱۳۹۲ شهریور

چکیده

فرض کنید$A \in B(H)$، در این صورت برد عددی A و همچنین شعاع عددی A و کروفورد عددی A به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$W(A) = \{\langle Av, v\rangle : v \in H, \|v\| = ۱\}$$
$$w(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(A)\}$$
$$c(A) = \inf\{|\lambda| : \lambda \in W(A)\}$$

که در آن $\langle .,.\rangle$ و $\|.\|$ به ترتیب حاصلضرب داخلی و نرم روی فضای هیلبرت H می‌باشند.
هورن و جانسون نشان دادند که $w(A^k) \leq w(A)^k$.
فرض کنید که $A \in B(H)$ نرمال باشد. در این صورت رابطه زیر را داریم

$$conv\sigma(A^k) = \overline{W(A^k)} \subseteq conv\overline{W(A)}^k$$

اما؛ سؤال اساسی این است، آیا شمول $W(A^k) \subseteq W(A)^k$ برای هر عملگر خطی کراندار دلخواه A برقرار است؟ با ارائه مثالی می‌توان نشان داد که جواب منفی است.

در ادامه شرایطی ایجاد می‌کنیم که شمول $W(A^k) \subseteq W(A)^k$ برقرار شود.
فرض کنید $\widehat{A} = A \oplus \mu A \oplus \mu^۲ A \oplus .... \oplus \mu^{k-۲} A \oplus \mu^{k-۱} A$ که $\mu = e^{i\frac{۲\pi}{k}}$ می‌باشد.
در این صورت $W(\widehat{A}^k) = W(A^k)$ به ویژه $W(\widehat{A}) = W(A)$، همچنین روابط زیر را داریم

$$W(\widehat{A})^k = \{conv[\textstyle\bigcup_{j=۱}^{k} \mu^j W(A)]\}^k$$
$$W(A^k) = W((\widehat{A})^k) \subseteq W(\widehat{A})^k = W(A)^k.$$

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

۱-۱ خواص عملگرها روی فضای هیلبرت

قرارداد: در این پایان‌نامه منظور از $\mathbb{F}$، میدان اعداد مختلط یا میدان اعداد حقیقی می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱. یک فضای برداری[۱] (فضای خطی) متشکل است از:

۱- یک هیأت[۲] $\mathbb{F}$ از اسکالرها؛

۲- یک مجموعه V از اشیایی به نام بردارها؛

۳- یک قاعده (یا عمل) به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای x و y از V بردار $x+y$ از V را که مجموع x و y نامیده می‌شود، وابسته سازد با این شرایط که

الف: جمع جابه‌جایی است، یعنی $x+y=y+x$؛

ب: جمع شرکت‌پذیر است، یعنی $(x+y)+z=x+(y+z)$؛

پ: بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر x در

---

[۱] Vector space

[۲] Field

V، $x+0=0$؛

ت: به ازای هر بردار x در V، بردار یکتای $-x$ در V موجود است به طوری که $x+(-x)=0$.

۴- یک قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از $\mathbb{F}$ و هر بردار x از V بردار cx در V را که حاصلضرب c و x نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط که

الف: به ازای هر x در V $\quad 1x=x$؛

ب: $(c_1c_2)x=c_1(c_2x)$؛

پ: $c(x+y)=cx+cy$؛

ت: $(c_1+c_2)x=c_1x+c_2x$.

تعریف ۱-۱-۲. فضای برداری مختلط H (فضای برداری روی میدان اعداد مختلط) را یک فضای ضرب داخلی[۳] (یا فضای یکه‌ای) نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x,y\rangle$ به نام «حاصلضرب داخلی » چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

آ) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$؛

ب) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$؛

پ) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$؛

ت) ($\langle x,x\rangle$ عدد حقیقی نامنفی باشد) یا $\quad \langle x,x\rangle\geq 0$؛

---

[۳] Inner product space

ث) $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

که $x,y,z \in H$ ، $\alpha \in \mathbb{C}$ و علامت بار نشانگر مزدوج مختلط می‌باشد.
همچنین تا تعریف (۱-۲-۷) منظور از H یک فضای ضرب داخلی می‌باشد.

حال چند نتیجه فوری از این اصول را بیان می‌کنیم:

نتیجه ۱-۱-۳. *قاعده (پ) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $y \in H$ ، $\langle ۰,y\rangle = ۰$. قاعده (آ) و (پ) نشان می‌دهند که $\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$. (آ) و (ب) قانون دوم پخشپذیری را ایجاب می‌کنند:*

$$\langle z,x+y\rangle = \langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$$

بنا بر (ت) می‌توان $\|x\|$ ، یعنی نرم بردار $x \in H$ ، را ریشه دوم نامنفی $\langle x,x\rangle$ تعریف کرد، لذا $\|x\|^۲ = \langle x,x\rangle$.

گزاره ۱-۱-۴. ***(نامساوی شوارتز)***[۴] *خواص (آ) تا (ت) تعریف از (۱-۲-۲) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $x,y \in H$ ،*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

برهان. به [۳] مراجعه شود.

□

گزاره ۱-۱-۵. ***(نامساوی مثلثی)***[۵] *به ازای هر x و y در H داریم*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

برهان. طبق نامساوی شوارتز،

$$\begin{aligned}\|x+y\|^۲ &= \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\ &\leq \|x\|^۲ + ۲\|x\|\|y\| + \|y\|^۲ = (\|x\| + \|y\|)^۲.\end{aligned}$$

[۴] Schwarz inequality

[۵] Triangle inequality

با توجه به نامنفی بودن طرفین نامساوی، از طرفین جذر می‌گیریم و لذا

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

تعریف ۱-۱-۶. مجموعهX که عضوهایش را نقاط می‌نامیم، در صورتی یک فضای متریک[۶] است که به هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی نامنفی $d(p,q)$ ، به نام فاصله از p تا q ، طوری مربوط شده باشد که

آ) $d(p,q) > ۰$ هرگاه $p \neq q$؛

ب) $d(p,q) = ۰$ هرگاه $p = q$؛

پ) $d(p,q) = d(q,p)$؛

ت) به ازای هر $r \in X$ ، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

تعریف ۱-۱-۷. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|.$$

که در آن $x, y, z \in H$.

اگر فاصله بین x و y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متریک برقرارند.

لذا H یک فضای متریک است. هرگاه این فضای متریک تام باشد یعنی هر دنباله کشی در H در آن همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت[۷] نام دارد.

قرارداد: از اینجا تا آخر پایان‌نامه منظور از H همواره یک فضای هیلبرت می‌باشد.

[۶] Metric space

[۷] Hilbert spase

مثال ۱-۱-۸. به ازای هر n طبیعی، مجموعه $\mathbb{C}^n$ مرکب از تمام nتاییهای $x = (\xi_۱, ..., \xi_n)$ که در آن $\xi_۱$، ...، ξ_n اعداد مختلطاند، درصورتی‌که جمع و ضرب اسکالر طبق معمول مؤلفه به مؤلفه تعریف شوند و داشته باشیم:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} \quad (y = (\eta_۱, ..., \eta_n)).$$

در این صورت $\mathbb{C}^n$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۱-۱-۹. *نگاشتهای* $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ *و* $x \longrightarrow \langle y, x\rangle$ *به ازای هر* $۰ \neq y \in H$ *ثابت توابع پیوسته‌ای بر* H *هستند.*

برهان. فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in H$ و $\|x_۱ - x_۲\| \leq \delta$ (که در آن $۰ \neq \delta \in \mathbb{R}$)، در این صورت نامساوی شوارتز ایجاب می‌کند که

$$|\langle x_۱, y\rangle - \langle x_۲, y\rangle| = |\langle (x_۱ - x_۲), y\rangle| \leq \|x_۱ - x_۲\|\|y\|.$$

با توجه به اینکه y ثابت است، با انتخاب $\frac{\delta}{\|y\|} \leq \varepsilon$ پیوستگی یکنواخت $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ ثابت می‌شود، پیوستگی یکنواخت $\langle y, x\rangle \longrightarrow x$ مشابهاً ثابت می‌شود. □

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنید H یک فضای هیلبرت روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت یک عملگر خطی[۸] روی H عبارت است از یک تبدیل خطی از H در H.

تعریف ۱-۱-۱۱. عملگر خطی T را روی فضای هیلبرت H کراندار[۹] گوییم هرگاه عدد ثابت $c \gneqq ۰$ موجود باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

[۸] linear operator

[۹] Bounded

قرارداد: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار روی H را با نماد $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند، در این صورت تابع $u : H \times K \longrightarrow \mathbb{F}$ را یک «فرم یک و نیم خطی»[۱۰] گوییم هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $h, g \in H$ و $k, f \in K$ داشته باشیم

۱- $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$.

۲- $u(h, \alpha k + \beta f) = \overline{\alpha} u(h, k) + \overline{\beta} u(h, f)$.

تعریف ۱-۱-۱۳. یک فرم یک و نیم خطی کراندار است هرگاه عدد ثابت M باشد که برای هر $h \in H$ و $k \in K$، داشته باشیم

$$|u(h, k)| \leq M\|h\|\|k\|.$$

قرارداد:

فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از H به K را با $B(H, K)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۱۴. *فرض کنید $u : H \times K \longrightarrow \mathbb{F}$ یک فرم یک و نیم خطی کراندار با کران M باشد.*
آنگاه عملگرهای $A \in B(H, K)$ و $B \in B(K, H)$ وجود دارند به طوری که

$$u(h, k) = \langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle.$$

که در آن $h \in H$ و $k \in K$ همچنین $\|A\|, \|B\| \leq M$.

برهان. به [۴] مراجعه شود. □

[۱۰] Sesquilinear form

تعریف ۱-۱-۱۵. فرض کنید $A \in B(H,K)$، در این صورت عملگر یکتای B که در قضیه (۱-۲-۱۴) صدق می‌کند را الحاق[۱۱] A می‌نامیم و با نماد $B = A^*$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱-۱-۱۶. الحاق یک عملگر معمولاً برای عملگرهای در $B(H)$ به کار می‌رود.

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنید $A \in B(H)$، در این صورت

آ) عملگر A خودالحاق[۱۲] نامیده می‌شود هرگاه $A = A^*$؛

ب) عملگر A را نرمال[۱۳] می‌نامیم هرگاه $AA^* = A^*A$؛

پ) عملگر A را یکانی[۱۴] می‌نامیم هرگاه $AA^* = A^*A = I$؛

ت) عملگر A یک عملگر تصویری[۱۵] است هرگاه $A^۲ = A$.

گزاره ۱-۱-۱۸. *فرض کنید $A, B \in B(H)$ و α عضو میدان اسکالر $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه داریم*

آ) $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$؛

ب) $(AB)^* = B^*A^*$؛

پ) $A^{**} = (A^*)^* = A$؛

ت) *فرض کنید A عضو $B(H)$ وارون‌پذیر باشد و $A^{-۱}$ وارون آن باشد، در این صورت A^* نیز وارون‌پذیر است و* $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$.

برهان. به [۴] مراجعه کنید. □

Adjoint[۱۱]
Self Adjoint[۱۲]
Normal[۱۳]
Unitary[۱۴]
Projection[۱۵]

گزاره ۱-۱-۱۹. *فرض کنید $A \in B(H)$ در این صورت A را می‌توان به صورت $A = B + iC$ نوشت. که در آن B و C عملگرهای خودالحاق و کراندار روی فضای هیلبرت H می‌باشند.*

B و C به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی عملگر A نامیده می‌شود.

برهان. برای اثبات گزاره کافیست عملگرهای B و C را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$B = \frac{A + A^*}{۲} \qquad \text{و} \qquad C = i(\frac{A^* - A}{۲})$$

□

تعریف ۱-۱-۲۰. فرض کنید $A \in B(H)$ در این صورت عملگر A را مثبت $(A \geq ۰)$ گوییم، هرگاه داشته باشیم

۱- عملگر A خودالحاق باشد $(A = A^*)$؛

۲- به ازای هر $x \in H$ $\qquad ۰ \leq \langle Ax, x \rangle$.

تعریف ۱-۱-۲۱. اگر به ازای x و yی در H داشته باشیم $\langle x, y \rangle = ۰$، گوییم x عمود[۱۶] بر y است و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید M زیرفضای از H باشد. در این صورت $M^\perp$ مجموعه تمام $y \in H$هایی است که به هر $x \in M$ عمود است.

قضیه ۱-۱-۲۳. *فرض کنیم M زیر فضای بسته از H باشد. در این صورت*

آ) هر $x \in H$ تجزیه منحصر به فردی مانند

$$x = Px + Qx$$

به مجموعی از $Px \in M$ و $Qx \in M^\perp$ دارد؛

ب) Px و Qx به ترتیب نزدیکترین نقاط به x در M و در $M^\perp$اند؛

[۱۶] Orthogonal

پ) نگاشتهای $P : H \longrightarrow M$ و $Q : H \longrightarrow M^{\perp}$ خطی‌اند؛

ت) $\|x\|^{2} = \|Px\|^{2} + \|Qx\|^{2}$.

P و Q را تصاویر متعامد H روی M و $M^{\perp}$ می‌نامند.

نتیجه. *هرگاه $M \neq H$، آنگاه عنصری مانند $y \in H$ و $y \neq 0$ وجود دارد به طوری‌که $y \perp M$.*

برهان. به [۳] مراجعه شود. □

۱-۲ طیف

تعریف ۱-۲-۱. یک جبر،[۱۷] یک فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ با یک نگاشت $(a, b) \longrightarrow ab$ از $A \times A$ به توی A می‌باشد که در شرایط زیر صدق کند؛

۱- $(ab)c = a(bc)$؛

۲- $a(b + c) = ab + ac$؛

۳- $(b + c)a = ba + ca$؛

۴- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

که درآن $a, b, c \in A$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۲. فضای برداری A را یک «فضای خطی نرمدار»[۱۸] نامیم اگر به $a \in A$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|a\|$ به نام نرم a چنان مربوط شده باشد که

آ) به ازای هر a و b در A، $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$؛

ب) اگر $a \in A$ و λ اسکالر باشد، $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ ؛

پ) $\|a\| = 0$ تساوی $a = 0$ را ایجاب نماید.

---

[۱۷] Algebra

[۱۸] Normed linear space

تعریف ۱-۲-۳. یک جبر نرم‌دار[۱۹] A، یک جبر A روی میدان $\mathbb{F}$ است به طوری که

آ) A یک فضای خطی نرم‌دار با نرم $\|.\|$ باشد؛

ب) به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم، $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

تعریف ۱-۲-۴. جبر باناخ[۲۰] A ، یک جبر نرم‌دار A است که با نرمش کامل باشد(هر دنباله کوشی در آن با متر $d(a,b) = \|a-b\|$ برای $a, b \in A$ همگرا باشد).

تعریف ۱-۲-۵. عنصر $e \in A$ را یکه ضربی جبر باناخ A می‌گوییم هرگاه به ازای هر $a \in A$، $ae = ea = a$.

تعریف ۱-۲-۶. جبر باناخ A را یکدار گوییم هرگاه A دارای یکه ضربی باشد.

تعریف ۱-۲-۷. فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار با یکه ضربی e باشد و $a \in A$، در این صورت طیف[۲۱] a را با $\sigma_A(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ناباشد وارون‌پذیر} (\lambda e - a)\}.$$

تعریف ۱-۲-۸. مجموعه $P(a) = \mathbb{C} - \sigma_A(a)$ را «مجموعه حلال»[۲۲] a می‌نامند.

قضیه ۱-۲-۹. *فرض کنید A یک جبر باناخ و $a \in A$، دراین صورت $\sigma_A(a)$ در $\mathbb{C}$ فشرده است و همچنین مشمول در دیسک $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$ می‌باشد.*

برهان. به [۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۱-۲-۱۰. اگر A یک جبر باناخ و $a \in A$، شعاع طیفی a را با $r(a)$ نشان می‌دهیم، و به صورت زیر تعریف می‌شود؛

[۱۹] Algebra normed

[۲۰] Banach algebra

[۲۱] Spectrum

[۲۲] Resolvent set

$$r(a) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

با توجه به اینکه $\sigma_A(a)$ کران‌دار و همچنین $\sigma_A(a) \neq \emptyset$ است، لذا $r(a)$ خوش تعریف و متناهی است.

تعریف ۱-۲-۱۱. طیف عملگر خطی کراندار A را با نماد $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \text{واورن‌پذیر نباشد. } (A - zI)\}$$

تعریف ۱-۲-۱۲. طیف نقطه‌ای عملگر خطی کراندار A با نماد $\sigma_p(A)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_p(A) = \{z \in \mathbb{C} : \text{یک به یک نباشد. } (A - zI)\}$$

قضیه ۱-۲-۱۳. ***(فرمول شعاع طیفی)***
برای هر عضو x از جبر A داریم

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

برهان. به [۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۱-۲-۱۴. فرض کنید $A \in B(H)$، در این صورت اسکالر α مقدار ویژه عملگر A نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

$$ker(A - \alpha I) \neq \{0\}$$

نکته ۱-۲-۱۵. اگر $A \in B(H)$ ، آنگاه $\sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$.

تعریف ۱-۲-۱۶. زیر مجموعه C از یک فضای برداری را محدب[۲۳] گوییم هرگاه به ازای هر $a, b \in C$ و $t \in [0, 1]$ که $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

---
[۲۳] Convex

$$ta + (1 - t)b \in C$$

همچنین می‌توان ترکیب خطی محدب را به صورت زیر تعریف کرد.

Cترکیب خطی محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر زیر مجموعه متناهی $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ از C و اسکالرهای نامنفی $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$، ترکیب خطی $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ در C قرار داشته باشد.

تعریف ۱-۲-۱۷. «غلاف محدب»[۲۴] مجموعه C عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل C یا کوچکترین مجموعه محدب شامل C و یا مجموعه تمام ترکیبهای خطی C به عبارت دیگر

$$conv(C) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : a_i \in C, 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

قرارداد: غلاف محدب مجموعه C را با نماد $conv(C)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۱۸. فرض کنید X یک فضای برداری و $C \subseteq X$، در این صورت فضای تولید شده توسط C را با نماد $span(C)$ نشان می‌دهیم، و داریم

$$span(C) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in C, n \in \mathbb{N}\}$$

۱-۳ مروری بر جمع مستقیم فضاهای هیلبرت

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی باشد. $W_1, ..., W_k$ را زیر فضاهایی از V در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W = W_1 + ... + W_k$ در این صورت W «مجموع مستقیم»[۲۵] $W_1, ..., W_k$ می‌باشد، هرگاه حداقل در یکی از شرایط زیر صدق کند.

۱- $W_1, ..., W_k$ مستقل خطی باشند؛

۲- به ازای هر j، $(2 \leq j \leq k)$ داشته باشیم $W_j \cap \{W_1 + ... + W_{j-1}\} = \{0\}$؛

۳- اگر β_i پایه‌ی برای W_i، $(1 \leq i \leq k)$ باشد آنگاه دنباله‌ی $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)$ پایه‌ی برای W است.

---

[۲۴] Convex hull

[۲۵] Direct sum