بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

نامساوی هرمیت – هادامارد برای توابع چند متغیره

نگارش

فیروز خدابخشی

استاد راهنما

دکتر علی بارانی

استاد مشاور

دکتر مجتبی قاسمی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

بهمن ماه ۱۳۹۲

همه امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس ها یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تقدیم به:

روح پاک مادرم به زلالی چشمه...

و مهربان پدرم به استواری کوه...

و همسر عزیزم به صمیمیت باران...

فهرست مطالب

نام خانوادگی: خدابخشی	**نام:** فیروز
عنوان پایان نامه: نامساوی هرمیت- هادامارد برای توابع چند متغیره	
استاد راهنما: دکتر علی بارانی **استاد مشاور:** دکتر مجتبی قاسمی	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی محض
محل تحصیل: دانشگاه لرستان	**دانشکده:** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲	**تعداد صفحه:** ۷۰
کلیدواژه ها: نامساوی هرمیت- هادامارد،توابع محدب، توابع شبه محدب، میانگین های خاص، چند متغیره.	

چکیده :ابتدا در کنار مطالبی از آنالیز محدب و توپولوژی، به معرفی تابع هرمیت-هادامارد می پردازیم، سپس تعمیمی از نامساوی هرمیت— هادامارد برای توابع چند متغیره مانند گوی، دیسک و چندضلعی های منتظم ارائه گردید. و در آخر نامساوی هرمیت- هادامارد برای توابعی که قدرمطلق مشتق دوم آنها شبه محدب است اصلاح شده و کرانی بهتر و دقیق تر از کران نامساوی هادامارد بدست آورده و اثبات می گردد؛ هم چنین کاربردهایی از آن برای بعضی از میانگین های خاص ارائه می گردد.

پیش گفتار

توابع محدب و شبه محدب نقش مهمی را در شاخه های مختلف ریاضیات ایفا می کنند و به ویژه در مباحث بهینه سازی از اهمیت خاصی برخوردار هستند؛ به عنوان مثال یک تابع محدب(اکید) روی یک مجموعه باز بیش از یک مینیمم ندارد؛ هم چنین اگر f یک تابع محدب تعریف شده روی $I = [a, b]$ باشد، داریم:

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

یکی از مهمترین نامساوی هایی که توجه بسیاری از ریاضیدانان را در چند دهه اخیر به خود جلب کرده است، نامساوی معروف «هرمیت-هادامارد» [۲] است. فرض کنیم f یک تابع محدب انتگرال پذیر روی بازه $I = [a, b]$ باشد. در این صورت:

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

به عنوان نامساوی هرمیت-هادامارد شناخته شده است. این نامساوی که در سال ۱۸۸۳ توسط هرمیت ارائه شد و در سال ۱۸۹۳ توسط هادامارد ثابت شد، تاکنون مورد استفاده بسیاری از دانشمندان و علاقه مندان به علوم ریاضی و کاربردی بوده، به عنوان نمونه دراگومیر [۳] تعمیمی از این نامساوی را هنگامی که

[۲] Hermite-Hadamard

[۳] Dragomir

دامنه تابع محدب f یک گوی در فضای سه بعدی یا یک دیسک و یا یک مثلث در صفحه باشد، ارائه داده است .[۳] ساختار این پایان نامه به شرح زیر است:

فصل اول مطالبی را از توپولوژی و آنالیز محدب و تابعی را که برای ادامه کار به آنها نیاز است ارائه داده و ارتباط بین تحدب و پیوستگی یک تابع روی یک مجموعه محدب و زیر گرادیان یک تابع محدب بیان شده است. فصل دوم تعمیمی از نامساوی هرمیت- هادامارد برای توابع چند متغیره مانند گوی، دیسک و چند ضلعی های منتظم ارائه گردیده است.

در فصل سوم نیز نامساوی هرمیت- هادامارد برای توابعی که قدرمطلق مشتق دوم آنها شبه محدب است اصلاح شده و کرانی بهتر و دقیقتر از کران نامساوی هادامارد به دست آمده و ارائه گردیده است. همچنین کاربردهای آن برای بعضی از میانگین های خاص بیان شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایایی می باشد که در فصل های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می گیرند.

تعریف ۱.۰.۱. گردایه ی τ از زیر مجموعه های X را یک توپولوژی نامیم، هرگاه:

الف) X و ϕ متعلق به τ باشند.

ب) اجتماع هر خانواده ای از اعضای τ، نیز عضوی از τ باشد.

پ) مقطع هر خانواده ی متناهی از اعضای τ، نیز عضوی از τ باشد.

تعریف ۲.۰.۱. خانواده ناتهی $\sum$ از زیر مجموعه های یک مجموعه S را یک σ-جبر گویند، هرگاه $\sum$ شامل تهی، مکمل هر عضوش واجتماع شمارا از اعضایش باشد. هرگاه S یک فضای توپولوژیکی باشد، کوچکترین σ-جبر شامل تمام زیر مجموعه های باز در S را یک σ-جبر **بورل** [۱] می نامیم.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان اعداد مختلط باشد.در اینصورت منظوراز یک نرم روی X تابع حقیقی مقدار $x \to ||x||$ با خواص زیر است:

الف) برای هر $x \neq ۰$، داشته باشیم $||x|| > ۰$ ،

ب) برای هر $||cx|| = |c|.||x||, c \in C, x \in X$،

پ) برای هر $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, x, y \in X$

هرگاه نرمی روی X موجود باشد، X را یک فضای خطی نرمدار می نامیم.

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. تابع $P : X \longrightarrow R$ را یک نیم نرم گویند، هرگاه:

(i) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ ،

[۱] Borel

(ii) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α : $\qquad P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

با استفاده از (ii) واضح است که $P(0) = 0$ ؛ اگر علاوه بر این، از $P(x) = 0$ نتیجه شود که $x = 0$ ، آن گاه P را یک نرم روی X نامند.

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ ، قرار دهیم:

$$d(x,y) = \| x - y \|,$$

آن گاه به سادگی دیده می شود که d یک متر روی X است و لذا هر فضای نرم دار، یک فضای متریک است.

تعریف ۱.۰.۵. فضاهای خطی نرم دار کامل را **باناخ** [۲] گویند.

تعریف ۱.۰.۶. اگر $\sum$ یک σ-جبر باشد، تابع $\mu : \sum \to C$ ، $(\mu : \sum \to [0, \infty])$ را یک اندازه مختلط (نامنفی) بر $\sum$ می نامیم، هرگاه $\mu(\phi) = 0$ و μ جمعی شمارشی باشد. در این صورت $(S, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه گویند.

تعریف ۱.۰.۷. $(S, \sum, \mu)$ اگر یک فضای اندازه باشد. در این صورت تابع $\mu : \sum \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک اندازه احتمالی است، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\mu(A) \geqslant 0 \qquad \forall A \in \sum,$.

۲) $\mu(S) = 1$.

تعریف ۱.۰.۸. فرض کنیم S یک فضای توپولوژیکی باشد. اگر $\sum$ یک σ-جبر روی S و $A \in \sum$ باشد.

---
[۲] Banach

در این صورت تابع $\delta_x : X \longrightarrow \{۰,۱\}$ با تعریف:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} ۱ & ,x \in A, \\ ۰ & ,x \notin A, \end{cases}$$

را یک اندازه **دیراک** [۳] در x می نامیم. هر اندازه دیراک یک اندازه احتمالی است.

فرض کنیم $(S,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه باشد، در اینصورت اگر $\mu(S) = ۱$ ، آنگاه μ را یک اندازه نرمال شده گویند.

مثال ۱.۰.۱ (فضاهای L^p). فرض کنید (X,μ) یک فضای اندازه و $p \geq ۱$ باشد. مجموعه $L^p(X,d\mu)$ متشکل از همه توابع اندازه پذیر با نرم

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{۱/p} < \infty.$$

را درنظر می گیریم. این مجموعه با نرم بالا یک فضای باناخ است.

تعریف ۹.۰.۱. الف) فضای توپولوژیکی X یک فضای هاسدورف است، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد.

هرگاه $p,q \in X$ و $p \neq q$ ، آنگاه مجموعه های باز U و V به ترتیب شامل p و q وجود دارند، به طوری که $U \cap V = \phi$.

ب) فضای توپولوژیکی (X,τ) متریک پذیر است، اگر متر d روی X موجود باشد که با τ سازگار باشد.

تعریف ۱۰.۰.۱. یک زیر مجموعه ناتهی C از فضای باناخ X یک **مخروط** [۴] نامیده می شود، اگر C تحت مضارب اسکالر نامنفی بسته باشد، یعنی برای $x \in C$ و $\lambda \geq ۰$، $\lambda x \in C$.

[۳] Dirac

[۴] cone

مثال ۲.۰.۱. فضای $R^n_+ = \{(x_۱, ..., x_n) \in R^n | x_۱, ..., x_n \geq ۰\}$ یک مخروط می باشد.

تعریف ۱۱.۰.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم دار باشد. β را یک پایه موضعی برای X گویند هرگاه برای هر همسایگی صفر مانند V، یک عضو از β مانند B موجود باشد که $B \subset V$ باشد.

تعریف ۱۲.۰.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار روی C باشد، در اینصورت زیر مجموعه $C \subset X$ را محدب گوییم هرگاه برای $x, y \in C$ و $۰ \leq t \leq ۱$، داشته باشیم:

$$tx + (۱ - t)y \in C.$$

تعریف ۱۳.۰.۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. X محدب موضعی است، اگر یک پایه موضعی B داشته باشد که اعضای آن مجموعه های محدب باشند و همچنین فشرده موضعی است اگر صفر دارای یک همسایگی باشد که بستار آن فشرده است.

تعریف ۱۴.۰.۱. فرض کنید که S زیر مجموعه ای از R^n باشد. **غلاف محدب** [۵] مجموعه S را که با conv(S) نشان داده می شود، عبارتست از اشتراک تمام مجموعه های محدبی که مشتمل بر S هستند. به عبارت دیگر

$$conv(S) = \{\sum_{i=۱}^{m} \lambda_i x_i, \qquad x_۱, ..., x_m \in S, (\lambda_۱, ..., \lambda_m) \in \Delta_{m-۱}\},$$

که در آن

$$\Delta_{m-۱} := \{\lambda_۱, ..., \lambda_m \in [۰, ۱] : \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i = ۱\}.$$

مثال: اگر $x_۱, x_۲$دو نقطه باشند، غلاف محدب آن مجموعه نقاطی است که بر روی خط واصل بین دو

[۵] Convex hull

نقطه قرار می گیرد.

تعریف ۱۵.۰.۱. مجموعه بردارهای $x_0, ..., x_k \in R^n$ را مستقل آفینی گوییم، هرگاه $\{x_1 - x_0, ..., x_k - x_0\}$ مستقل خطی باشند.

توجه شود که هر مجموعه مستقل خطی، مستقل آفینی است ولی عکس آن درست نیست. مثل مجموعه $\{e_1, ..., e_n\}$ پایه $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی و مستقل آفینی است. ولی مجموعه $\{0, e_1, ..., e_n\}$ فقط مستقل آفینی است.

تعریف ۱۶.۰.۱. فرض کنیم $p_0, p_1, ..., p_n$ نقاط مستقل آفینی در R^n باشند، در اینصورت، $\Delta := conv(p_0, ..., p_n)$ را یک n سادک و $p_0, ..p_n$ را رئوس سادک گویند. اگر $p_0 = 0$، $p_1 = (1, 0, ..., 0)$ و $p_n = (0, 0, ..., 1)$ آنگاه Δ را یک سادک استاندارد گویند.

همچنین Δ' را یک زیر سادک Δ می نامیم در صورتی که رئوس آن زیر مجموعه ای از رئوس Δ باشند.

مثال ۳.۰.۱. فرض کنیم Δ یک مثلث با رئوس $p_0 = (0, 0)$ ، $p_1 = (1, 0)$ و $p_2 = (0, 1)$ در R^2 باشد. در این صورت Δ یک سادک دو بعدی در R^2 می باشد و $\Delta_1 = [p_0, p_1]$ و $\Delta_2 = [p_0, p_2]$ و $\Delta_3 = [p_1, p_2]$ زیر سادک های آن می باشند.

تعریف ۱۷.۰.۱. فرض کنیم $p_0, ..., p_n \in R^n$ مستقل آفینی باشند و S یک سادک با رئوس $p_0, ..., p_n$ باشد، آنگاه نقطه $\bar{p}$ مرکز جرم S می باشد با فرمول زیر

$$\bar{p} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} p_i.$$

مثال ۴.۰.۱. الف) $[p_0]$ یک سادک $0-$بعدی می باشد که شامل یک نقطه است و مرکز جرم آن نقطه p_0 است.

ب) $[p_0, p_1]$ یک سادک یک بعدی است که مرکز جرم آن نقطه $\frac{p_0+p_1}{2}$ می باشد.

پ) سادک دو بعدی $[p_0, p_1, p_2]$ یک مثلث با رئوس p_0، p_1 و p_2 است که مرکز جرم آن $\frac{p_0+p_1+p_2}{3}$ می باشد.

همچنین نامساوی هادامارد بر روی $n-$ سادکها تعمیم داده شده و دلاوری در پایان نامه کارشناسی ارشد خود به طور مبسوط این قضایا را شرح و اثبات نموده است.

تعریف ۱.۰.۱۸. فرض کنیم S یک مجموعه محدب غیر تهی در R^n باشد. تابع $f : S \longrightarrow R$ را روی S محدب گوییم، در صورتی که برای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم،

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

تابع f اکیدا محدب است، اگر نامساوی بالا برای هر دو نقطه مجزای S اکید باشد.

تابع f روی S مقعر است، اگر $-f$ روی S محدب باشد.

تابع f روی S **آفین** [6] است، اگر f روی S هم محدب و هم مقعر باشد، به عبارت دیگر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in (0, 1)$، داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

تعریف ۱.۰.۱۹. توابع شبه محدب، تعمیمی از توابع محدب هستند، به طور دقیق تر، تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ شبه محدب نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم:

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

[6] Affine

تعریف ۲۰.۰.۱. تابع f شبه محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $S(l, \lambda)$ محدب باشد.

$$S(l, \lambda) = \{x \in dom(f) | f(x) \leq \lambda\}.$$

تعریف ۲۱.۰.۱. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد، آنگاه نامساوی زیر را خواهیم داشت که نامساوی هرمیت هادامارد یا به طور ساده نامساوی هادامارد نامیده می شود.

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}. \quad (۱.۱)$$

در سالهای اخیر، خیلی از نویسندگان چندین نامساوی مرتبط با نامساوی هرمیت هادامارد منتشر کردند. نامساوی کلاسیک هادامارد تخمینی از مقدار میانگین توابع محدب پیوسته $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ارائه داده است. این نامساوی اصلاح شده و به یکی از آن روشهای تعمیم داده شده است.

تعریف ۲۲.۰.۱. فرض کنیم K یک زیر مجموعه محدب، فشرده و غیر تهی از فضای محدب موضعی و هاسدورف E باشد و μ یک اندازه بورل و احتمالی روی K باشد، در این صورت نقطه **مرکز جرم** [۷] به صورت زیر تعریف می شود:

$$b_\mu = \frac{۱}{\mu(K)} \int_K x d\mu(x).$$

نکته: برای یک سادک σ در $\mathbb{R}^n$ ، مرکز جرم تعریف شده در (۱۷.۰.۱) با مرکز جرم در تعریف فوق برای اندازه لبگ تحت شرایطی معادل اند. برای بحث کلی به منبع [] مراجعه شود.

تعریف ۲۳.۰.۱. برای یک زیر مجموعه ی غیر تهی $S \subset R^n$، تابع $f : S \longrightarrow R$ محدب باشد، آنگاه ξ،

[۷] Bary center

زیرگرادیان تابع f در نقطه $\bar{x} \in S$ نامیده می شود، اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \qquad \forall x \in S.$$

از تعریف بالا نتیجه می شود که مجموعه همه زیرگرادیان های f در $\bar{x}$ یک مجموعه محدب است.

مجموعه ی همه زیر گرادیان های f در x را زیر دیفرانسیل f در x گویند و با نماد $\partial f(x)$ نشان می دهند.

مثال ۱.۰.۵. فرض کنیم $f(x) = \min[f_1(x), f_2(x)]$، تابع f_1 و f_2 به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f_1(x) = 4 - |x| \qquad , x \in R,$$

$$f_2(x) = 4 - (x - 2)^2 \qquad , x \in R.$$

چون برای هر $1 \leq x \leq 4$، $f_2(x) \geq f_1(x)$، بنابراین f را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) := \begin{cases} 4 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 4 - (x - 2)^2, & x < 1, x > 4. \end{cases}$$

برای هر $x \in (1, 4)$، $\partial f(x) = \{-1\}$.

و $\partial f(x) = \{-2(x - 2) | x < 1, x > 4\}$.

در نقطه $x = 1$:

$$\xi = \lambda \bigtriangledown f_1(1) + (1 - \lambda) \bigtriangledown f_2(1) = \lambda(-1) + (1 - \lambda)(2) = 2 - 3\lambda.$$ برای هر $\lambda \in [0, 1]$

و در نقطه $x = 4$:

$$\xi = \lambda \bigtriangledown f_۱(۴) + (۱ - \lambda) \bigtriangledown f_۲(۴) = \lambda(-۱) + (۱ - \lambda)(-۴) = -۴ + ۳\lambda.$$

قضیه ۱.۰.۱. فرض کنیم S یک مجموعه محدب غیر تهی در R^n باشد و $f : S \longrightarrow R$ یک تابع محدب باشد، آنگاه f در درون پیوسته است.

اثبات. فرض کنیم $\bar{x} \in intS$، برای اینکه ثابت کنیم f در $\bar{x}$ پیوسته است، باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ به قسمی وجود داشته باشد به طوری که $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$، نتیجه دهد $\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \varepsilon$.

چون $\bar{x} \in intS$، یک δ' وجود دارد به طوری که$\|x - \bar{x}\| \leq \delta'$ نتیجه می دهد که $x \in S$.

θرا برای $۱ \leq i \leq n$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\theta = \max\{\max[f(\bar{x} + \delta' e_i) - f(\bar{x}), f(\bar{x} - \delta' e_i) - f(\bar{x})]\}. \qquad (۲.۱)$$

در اینجا e_i ها بردارهایی در R^n می باشد که همه مولفه های آن صفرند به جز مولفه i ام که مقدار آن یک است. توجه کنید که $۰ \leq \theta < x$، فرض کنیم :

$$\delta = \min(\frac{\delta'}{n}, \frac{\varepsilon\delta'}{n\theta}). \qquad (۳.۱)$$

یک x با $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$ انتخاب می کنیم. اگر $x_i - \bar{x_i} \geq ۰$، فرض کنیم $z_i = \delta' e_i$، در غیر این صورت $z_i = -\delta' e_i$ آنگاه $x - \bar{x} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i z_i$.

برای هر $i = ۱, ۲, ..., n$، $\alpha_i \geq ۰$، علاوه بر این

$$\|x - \bar{x}\| = \delta' (\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i^۲)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۴.۱)$$

با توجه به ۳.۱ و $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$ برای هر $i = ۱, ۲, ..., n$ داریم $\alpha_i \leq \frac{۱}{n}$، حال با توجه به اینکه f محدب