دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

پایداری معادلات تابعی آمیخته و ینسن روی فضاهای شبه باناخ و باناخ فازی

نگارنده

صادق عباس زاده

استاد راهنما

دکتر مجید اسحقی گرجی

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

بهمن ۱۳۸۸

به نام خداوند بخشنده مهربان

هر آنچه را که می توانید انجام دهید و یا در رویای خود می بینید که قادر به انجام هستید، شروع کنید. جسارت در بطن خود، نبوغ و قدرت جاودانه ای نهفته دارد. نیاسایید، زندگی در گذر است. بروید و دلیری کنید، پیش از آن که بمیرید چیزی نیرومند و متعالی از خود به جای گذارید تا بر زمان غالب شوید.

«گوته»

چکیده

ایده اثبات پایداری معادلات تابعی آمیخته برای نخستین بار توسط چانگ[۱] و جونگ[۲] در سال ۲۰۰۳ در مقاله

[Ick-Soon Chang, Yong-Soo Jung, *Stability of a functional equation driving from cubic and quadratid functions*, J. Math. Anal. 283 (2003) 491-500]

مطرح شد. در این مقاله، پایداری هایرز[۳] — اولام[۴] — راسیاس[۵] برای معادله تابعی آمیخته

$$6f(x+y)-6f(x-y)+4f(3y)=3f(x+2y)-3f(x-2y)+9f(2y)$$

که یک معادله تابعی درجه دو و سه است، اثبات شده است. در فصل دوم این پایان نامه، به بررسی حل عمومی و اثبات پایداری معادله تابعی بالا روی یک فضای حقیقی باناخ می پردازیم. در ادامه با استفاده از ایده فصل دو، در فصل سوم برای معادله تابعی

$$f(nx+y)+f(nx-y)=n^2f(x+y)+n^2f(x-y)+2(f(nx)-n^2f(x))-2(n^2-1)f(y)$$

که یک معادله تابعی درجه دو و چهار است، پس از به دست آوردن حل عمومی، به بررسی پایداری هایرز— اولام— راسیاس آن روی یک فضای شبه باناخ می پردازیم.

در فصل چهارم، پایداری هایرز— اولام معادله تابعی کوشی[۶]— ینسن[۷]

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

و حالت تعمیم یافته آن

$$f(a_1x_1+\ldots+a_px_p)=a_1f(x_1)+\ldots+a_pf(x_p)$$

[۱] Chang
[۲] Jung
[۳] Hyers
[۴] Ulam
[۵] Rassias
[۶] Cauchy
[۷] Jensen

را روی یک فضای باناخ فازی بررسی می کنیم و در نهایت در فصل پنجم، پایداری معادله تابعی کوشی— ینسن تعمیم یافته فصل قبل را روی یک فضای باناخ فازی شهودی[۸] اثبات می کنیم.

واژه‌های کلیدی : پایداری هایرز— اولام— راسیاس، معادله تابعی آمیخته، تابع درجه یک[۹]، تابع درجه دو[۱۰]، تابع درجه سه[۱۱]، تابع درجه چهار[۱۲]، فضای شبه باناخ، نگاشت کوشی — ینسن، فضای باناخ فازی.

---

[۸] intuitionistic fuzzy Banach
[۹] Additive function
[۱۰] Quadratic function
[۱۱] Cubic function
[۱۲] Quartic function

مقدمه

در سال ۱۹۴۰، اولام [۷۸] برای نخستین بار مسئله پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد: فرض کنیم $(G_1,*)$ یک گروه، $(G_2,\diamond,d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. آیا $\delta(\varepsilon) > 0$ موجود است به طوری که اگر نگاشت $h : G_1 \to G_2$ در رابطه

$$d(h(x*y),h(x)\diamond h(y)) < \delta \quad , \quad (x,y \in G_1)$$

صدق کند، آن گاه همریختی $H : G_1 \to G_2$ موجود باشد به قسمی که

$$d(h(x),H(x)) < \varepsilon \quad , \quad (x \in G_1).$$

یک سال بعد، هایرز [۳۰] در پاسخ به مساله اولام، نگاشت های تقریباً جمعی $f : E_1 \longrightarrow E_2$ را در قضیه‌ای به صورت زیر ارائه کرد:

اگر E_1 و E_2 فضاهای باناخ و f به ازای هر $x,y \in E_1$ در نامساوی هایرز

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon$$

صدق کند، آن گاه حد

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

به ازای هر $x \in E_1$ وجود دارد و $L : E_1 \longrightarrow E_2$ یک نگاشت جمعی منحصر به فرد است به طوری که

$$\|f(x)-L(x)\| \leq \varepsilon.$$

در سال ۱۹۷۸، دمیستوکلیس راسیاس[۱۳] [۶۷] حالت کلی قضیه هایرز را اثبات کرد. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع از فضای نرم دار X به فضای باناخ Y باشد به طوری که در

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

[۱۳] Themistocles M. Rassias

برای هر $x,y \in X$ صدق کند. همچنین ε و p ثابت هایی هستند که $\varepsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$، آن گاه حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$ برای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر به فرد می –باشد که در

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\varepsilon \|x\|^p$$

برای هر $x \in X$ صدق می کند که در آن $k = \frac{۲}{۲-۲^p}$. این مفهوم جدید، به پایداری هایرز– اولام– راسیاس معروف است.

به علاوه، جان راسیاس [٦٣] به جای تابع کنترل در پایداری هایرز– اولام– راسیاس یعنی $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$، تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p \|y\|^p)$ را جایگزین نمود که به پایداری اولام– گاورتا– راسیاس معروف شد.

گاورتا[۱۴] [٢٦] این نتایج را تعمیم داد. او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز– اولام– راسیاس، تابع کنترل $\phi(x,y)$ را جایگزین کرد.

معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y) \qquad (۱.۱.۰)$$

به یک تابع دو– جمعی[۱۵] متقارن ارتباط داده می‌شود ([۱]، [۴۲]). $f(x) = x^۲$ یک جواب برای معادله (۱.۱.۰) است. هر معادله به این شکل را معادله تابعی درجه دوم می نامیم. به ویژه به هر حل از معادله درجه دوم (۱.۱.۰)، یک تابع درجه دوم گفته می شود. مساله پایداری هایرز– اولام برای معادله تابعی درجه دوم توسط اسکوف[۱٦] [۷۵] برای تابع درجه دو $f : E_۱ \to E_۲$ اثبات شد که $E_۱$ یک فضای نرم دار و $E_۲$ یک فضای باناخ است.

تابع f بین فضاهای برداری حقیقی، درجه دوم است اگر و فقط اگر یک تابع دو– جمعی متقارن و منحصر به فرد B وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = B(x,x)$. تابع دو–

---

[۱۴] Gavruta
[۱۵] Bi-Additive
[۱٦] Skof

جمعی B با ضابطه زیر مشخص می‌شود:

$$B(x,y) = \frac{۱}{۴}[f(x+y) - f(x-y)].$$

چولوا [۱۷] [۱۳] نشان داد که قضیه اسکوف، زمانی که $E_۱$ یک گروه آبلی باشد نیز ثابت می شود. چرویک[۱۸] [۱۵] پایداری معادلات تابعی هایرز– اولام– راسیاس ازنوع درجه دوم را ثابت کرد. به علاوه گرابیس [۱۹] [۲۸] نتایج ذکر شده در بالا را تعمیم داد.

جان[۲۰] و کیم[۲۱] [۳۷]، معادله تابعی

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۲f(x+y) + ۲f(x-y) + ۱۲f(x)$$

را معرفی کردند و حل عمومی و پایداری هایرز– اولام– راسیاس معادله تابعی بالا را به دست آوردند. به وضوح $f(x) = x^۳$ در این معادله تابعی صدق می کند. پس به طبع، معادله بالا یک معادله تابعی درجه سوم است و به هر حل از این معادله، یک تابع درجه سوم گوییم. جان و کیم نشان دادند که تابع f بین دو فضای برداری حقیقی X و Y، یک حل از معادله تابعی درجه سوم است، اگر و فقط اگر تابع منحصر به فرد $C : X \times X \times X \to Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = C(x,x,x)$، که C متقارن است برای هر یک متغیر ثابت و جمعی است برای دو متغیر ثابت.

تابع $f(x) = x^۴$ در معادله تابعی

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۴f(x+y) + ۴f(x-y) + ۲۴f(x) - ۶f(y)$$

صدق می کند. معادله بالا یک معادله تابعی درجه چهارم نامیده می شود و به هر حل از این معادله، یک تابع درجه چهارم گوییم. معادله تابعی درجه چهارم بالا توسط لی[۲۲]، ایم[۲۳] و هانگ[۲۴] [۴۸] حل شد.

---

[۱۷] Cholewa
[۱۸] Czerwik
[۱۹] Grabiec
[۲۰] Jun
[۲۱] Kim
[۲۲] Lee
[۲۳] Im
[۲۴] Hwang

سازماندهی این پایان نامه به صورت زیر است:

فصل اول، نخست تعاریف لازم بیان می شود و سپس مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند، مورد بررسی قرار می گیرد.

فصل دوم، حل عمومی معادله تابعی آمیخته درجه دو و سه

$$6f(x+y)-6f(x-y)+4f(3y)=3f(x+2y)-3f(x-2y)+9f(2y)$$

ارائه می شود. سپس پایداری هایرز– اولام– راسیاس این معادله در یک فضای باناخ مورد بررسی قرار می گیرد.

فصل سوم، یک حل عمومی برای معادله تابعی آمیخته تعمیم یافته

$$f(nx+y)+f(nx-y)=n^2f(x+y)+n^2f(x-y)+2(f(nx)-n^2f(x))-2(n^2-1)f(y)$$

ارائه می شود. سپس پایداری هایرز– اولام– راسیاس این معادله در یک فضای شبه باناخ اثبات می –شود.

فصل چهارم، پایداری هایرز– اولام معادله تابعی کوشی – ینسن

$$f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

و حالت تعمیم یافته آن

$$f(a_1x_1+...+a_px_p)=a_1f(x_1)+...+a_pf(x_p)$$

روی یک فضای باناخ فازی بررسی می شود.

فصل پنجم ، پایداری معادله تابعی کوشی – ینسن تعمیم یافته روی یک فضای باناخ فازی شهودی اثبات می شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم بنیادی

۱.۱ فضای شبه باناخ

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. یک شبه نرم[1]، یک تابع به صورت $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$؛

۲) برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|$؛

۳) عدد ثابت $M \geq ۱$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq M(\|x\| + \|y\|)$.

زوج $(X, \|.\|)$ را فضای شبه نرم دار می‌نامیم، اگر $\|.\|$ یک شبه نرم روی X باشد.

تذکر ۲.۱.۱ فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای شبه نرم دار باشد. همچنین فرض کنیم M کوچک‌ـترین عددی باشد که برای هر مقدار $n \geq ۱$ و همه مقادیر $x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}, x_{۲n+۱}$ داشته‌باشیم:

$$\| \sum_{i=۱}^{۲n} x_i \| \leq M^n \sum_{i=۱}^{۲n} \|x_i\|$$

---

[1] Quasi-norm

و

$$\|\sum_{i=1}^{2n+1} x_i\| \leq M^{n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \|x_i\|.$$

در این صورت M را ضریب تقعر $\|.\|$ می‌نامیم.

تذکر ۳.۱.۱ فضای شبه نرم کامل را فضای شبه باناخ گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم $p \in (0, 1]$، در این صورت شبه نرم $\|.\|$ را یک $p-$نرم گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای $p-$باناخ یک فضای شبه باناخ است، اگر شبه نرم روی آن یک $p-$نرم نیز باشد.

تذکر ٦.۱.۱ هر شبه نرم با یک $p-$نرم معادل است. از آن جا که کار کردن با $p-$نرم ها آسان تر است، لذا بیشتر از $p-$نرم ها استفاده می کنیم [۹].

۲.۱ فضاهای باناخ فازی و باناخ فازی شهودی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای حقیقی باشد. تابع $N : X \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ را یک نرم فازی روی X می نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in X$ و $s, t \in \mathbb{R}$:

(N_1) برای $t \leq 0$، $N(x, t) = 0$؛

(N_2) به ازای هر $t > 0$، $x = 0$ اگر و تنها اگر $N(x, t) = 1$؛

(N_3) به ازای هر $t \neq 0$، $N(tx,s) = N(x, \frac{s}{|t|})$؛

(N_4) $N(x+y, t+s) \geq min\{N(x,t), N(y,s)\}$؛

(N_5) $N(x,.)$ یک تابع غیر نزولی روی $\mathbb{R}$ است و $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$؛

(N_6) برای هر $x \neq 0$، $N(x,.)$ روی $\mathbb{R}$ نیم پیوسته بالایی [۲] است؛

زوج (X,N) را یک فضای نرم دار فازی می نامیم. $N(x,t)$ را گاهی اوقات به عنوان مقدار درست عبارت « نرم x کوچکتر یا مساوی عدد حقیقی t » در نظر می گیرند.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار باشد. آن گاه

$$N(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{t+\|x\|}, & t > 0 \quad , x \in X \\ 0, & t \leq 0 \quad , x \in X \end{cases}$$

یک نرم فازی روی X است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم (X,N) یک فضای نرم دار فازی و $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد. $\{x_n\}$ را در X همگرا گوییم اگر $x \in X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $t > 0$ داشته باشیم: « به ازای هر $\varepsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq N$، $N(x_n - x, t) > 1 - \varepsilon$ ». در این حالت، x را حد دنباله $\{x_n\}$ می نامیم و به صورت $N\text{-}lim_{n\to\infty} x_n = x$ نمایش می دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ یک دنباله $\{x_n\}$ در X را کوشی می نامیم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و $t > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n, m \geq N$، $N(x_n - x_m, t) > 1 - \varepsilon$.

هر دنباله همگرا در فضای نرم دار فازی، کوشی است. اگر هر دنباله کوشی همگرا باشد، آن گاه فضای نرم دار فازی را یک فضای باناخ فازی می نامیم.

---

[۲] upper semi continuous

تعریف ۵.۲.۱ عملگر دوتایی $[\circ,1]\longrightarrow[\circ,1]\times[\circ,1]:*$ یک t—نرم پیوسته نامیده می شود، اگر ویژگی های زیر را دارا باشد:

(a) $*$ شرکت پذیر و جابجایی باشد؛

(b) $*$ پیوسته باشد؛

(c) برای هر $a\in[\circ,1]$، $a*1=a$؛

(d) به ازای هر $a,b,c,d\in[\circ,1]$، اگر $a\leq c$ و $b\leq d$، آن گاه $a*b\leq c*d$؛

تعریف ۶.۲.۱ عملگر دوتایی $[\circ,1]\longrightarrow[\circ,1]\times[\circ,1]:\star$ یک t—هم نرم پیوسته نامیده می شود، اگر در ویژگی های زیر صدق کند:

(a) $\star$ شرکت پذیر و جابجایی باشد؛

(b) $\star$ پیوسته باشد؛

(c) برای هر $a\in[\circ,1]$ ، $a\star\circ=a$؛

(d) به ازای هر $a,b,c,d\in[\circ,1]$، اگر $a\leq c$ و $b\leq d$، آن گاه $a\star b\leq c\star d$؛

با استفاده از تعریف t—نرم پیوسته و t—هم نرم پیوسته، سعادتی[۳] و پارک[۴] [۷۰] مفهوم فضای نرم دار فازی شهودی را تولید کردند.

تعریف ۷.۲.۱ ([۷۰] و [۵۵]) ۵—تایی $(X,\mu,\nu,*,\star)$، فضای نرم دار فازی شهودی نامیده می —شود، اگر X یک فضای برداری باشد، $*$ یک t—نرم پیوسته، $\star$ یک t—هم نرم پیوسته و μ و ν دو تابع نرم روی $X\times(\circ,\infty)$ باشند که به ازای هر $x,y\in X$ و $s,t>\circ$ در شرایط زیر صدق کنند:

(IF_1) $\mu(x,t)+\nu(x,t)\leq 1$؛

(IF_2) $\mu(x,t)>\circ$؛

(IF_3) $\mu(x,t)=1$، اگر و تنها اگر $x=\circ$؛

(IF_4) برای هر $\alpha\neq\circ$، $\mu(\alpha x,t)=\mu(x,\frac{t}{|\alpha|})$؛

---
[۳] Saadati
[۴] Park

(IF_5) $\mu(x,t) * \mu(y,s) \leq \mu(x+y, t+s)$؛

(IF_6) $\mu(x,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ پیوسته باشد؛

(IF_7) $\lim_{t\to\infty} \mu(x,t) = 1$ و $\lim_{t\to 0} \mu(x,t) = 0$؛

(IF_8) $\nu(x,t) < 1$؛

(IF_9) $\nu(x,t) = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(IF_{10}) برای هر $\alpha \neq 0$، $\nu(\alpha x, t) = \nu(x, \frac{t}{|\alpha|})$؛

(IF_{11}) $\nu(x,t) \star \nu(y,s) \geq \nu(x+y, t+s)$؛

(IF_{12}) $\nu(x,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ پیوسته باشد؛

(IF_{13}) $\lim_{t\to\infty} \nu(x,t) = 0$ و $\lim_{t\to 0} \nu(x,t) = 1$؛

ویژگی های فضای فازی شهودی، مثال از نرم های فازی شهودی و مفاهیم دنباله های کوشی و دنباله —های همگرا در این فضا، در [۷۰] آمده است.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنیم $(X,\mu,\nu,*,\star)$ یک فضای نرم دار فازی شهودی باشد. دنباله $\{x_n\}$ در X نسبت به نرم فازی شهودی (μ,ν) به $x \in X$ همگراست، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و $t > 0$، $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq k$، $\mu(x_n - x, t) > 1 - \varepsilon$ و $\nu(x_n - x, t) < \varepsilon$. در این حالت می —نویسیم $(\mu,\nu)\text{–}\lim x_n = x$.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم $(X,\mu,\nu,*,\star)$ یک فضای نرم دار فازی شهودی باشد. دنباله $\{x_n\}$ در X نسبت به نرم فازی شهودی (μ,ν) کوشی است ، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و $t > 0$ ، $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $m,n \geq k$، $\mu(x_n - x_m, t) > 1 - \varepsilon$ و $\nu(x_n - x_m, t) < \varepsilon$.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم $(X,\mu,\nu,*,\star)$ یک فضای نرم دار فازی شهودی باشد. آن گاه $(X,\mu,\nu,*,\star)$ کامل است اگر هر دنباله فازی شهودی کوشی در $(X,\mu,\nu,*,\star)$، فازی شهودی همگرا باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ تابع $f: X \to Y$ بین فضاهای فازی شهودی X و Y در نقطه $x_\circ \in X$ پیوسته نامیده می شود، اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به $x_\circ$، دنباله $\{f(x_n)\}$ به $f(x_o)$ همگرا باشد. اگر $f: X \to Y$ در هر نقطه $x \in X$ پیوسته باشد، آن گاه تابع f را روی X پیوسته گوییم.

۳.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی پایداری معادلات تابعی

با ذکر این سوال که « آیا یک معادله تابعی را می توان با یک نامعادله جایگزین کرد یا نه؟» مفهوم پایداری یک معادله تابعی معنا پیدا می کند و سوالی که مطرح می شود در مورد منحصر به فردی این نامعادله است. معروفترین معادله تابعی، معادله کوشی به صورت

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

می باشد و هر حل از آن به صورت $f(x) = ax$ است که در آن a عددی ثابت می باشد.

تذکر ۱.۳.۱ در این قسمت X ، X_1 و X_2 را فضای برداری نرم دار حقیقی و Y را فضای باناخ در نظر می گیریم.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم $\varepsilon > 0$ و تابع $f: X \to Y$ داده شده باشد. در این صورت:

الف) f برای هر $x, y \in X$، ε—جمعی است، هرگاه

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon$$

ب) f برای هر $x, y \in X$، ε—درجه دوم است، هرگاه

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \le \varepsilon$$

ج) f برای هر $x,y \in X$، ε—درجه سوم است، هرگاه

$$\|f(۲x+y)+f(۲x-y)-۲f(x+y)-۲f(x-y)-۱۲f(x)\| \leq \varepsilon$$

د) f برای هر $x,y \in X$، ε—درجه چهارم است، هرگاه

$$\|f(۲x+y)+f(۲x-y)-۴f(x+y)-۴f(x-y)-۲۴f(x)+۶f(y)\| \leq \varepsilon$$

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنیم تابع $f : X_۱ \to X_۲$ بین فضاهای برداری نرم دار حقیقی تعریف شده باشد.

۱) تابع f درجه دوم است یا به عبارتی در معادله تابعی

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)+۲f(y)$$

صدق می کند، اگر و فقط اگر یک تابع دو— جمعی متقارن و منحصر به فرد $B : X \times X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x)=B(x,x)$؛

۲) تابع f درجه سوم است یا به عبارتی در معادله تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x)$$

صدق می کند، اگر و فقط اگر تابع منحصر به فرد $C : X \times X \times X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x)=C(x,x,x)$، که C نسبت به هر یک متغیر ثابت، متقارن و برای دو متغیر ثابت، جمعی است؛

۳) تابع f درجه چهارم است یا به عبارتی در معادله تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)+۲۴f(x)-۶f(y)$$

صدق می کند، اگر و فقط اگر یک تابع دو— درجه دوم[۵] متقارن و منحصر به فرد $D : X \times X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x)=D(x,x)$.

[۵] Bi-Quadratic

برهان: ر.ک. [۱] برای اثبات (۱)، ر.ک. [۳۷] برای اثبات (۲) و ر.ک. [۴۸] برای اثبات (۳).

قضیه ۴.۳.۱ (هایرز– اولام) اگر تابع $f : X \to Y$، $\varepsilon-$ جمعی باشد، آن گاه تابع جمعی و منحصر به فرد $A : X \to Y$ که برای هر $x \in X$ به صورت

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$$

تعریف می شود، وجود دارد به طوری که

$$\|f(x) - A(x)\| \le \varepsilon.$$

برهان: بنا به فرض، برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon. \qquad (۱.۳.۱)$$

اگر در (۱.۳.۱) به جای y مقدار x قرار دهیم ، به ازای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|f(۲x) - ۲f(x)\| \le \varepsilon. \qquad (۲.۳.۱)$$

اگر (۲.۳.۱) را بر ۲ تقسیم کنیم، برای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{۲}. \qquad (۳.۳.۱)$$

اکنون در (۳.۳.۱) به جای x مقدار $۲x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - \frac{f(۲x)}{۲}\| \le \frac{\varepsilon}{۲^۲}. \qquad (۴.۳.۱)$$

با استفاده از (۳.۳.۱) و (۴.۳.۱) به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - f(x)\| \le \varepsilon(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}) = \varepsilon(۱ - ۲^{-۲}). \qquad (۵.۳.۱)$$

با ادامه روند بالا، به استقرا خواهیم داشت

$$\|۲^{-n} f(۲^n x) - f(x)\| \le \varepsilon(۱ - ۲^{-n}). \qquad (۶.۳.۱)$$