[ُاِ] [ُاِ] [ُاِ]
[ُاِ]

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

مدول‌های هم‌متناهی و کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر مریم ربیعی

استاد مشاور

دکتر ناهید هادیان دهکردی

دانشجو

هاجر روشن شکالگورابی

تیر ماه ۱۳۸۷

قدردانی و تشکر

حالا که کشتی افکارم به اقیانوس بیکران ریاضیات سفر کرده است، دلم به ستارگانی خوش است که در تاریکی مجهولات بهانه‌های کوچک و بزرگ هدایتم می‌شوند و مرزهای لطف خداوندی نمودی تازه می‌یابند.
از دست و زبان که بر آید...کز عهده‌ی شکرش به در آید و سپاس فراوان خداوندی را که سرچشمه‌ی انوار است.

در این‌جا لازم می‌بینم که از استاد راهنمای گرامیم، سر کار خانم دکتر ربیعی و استاد محترم و بزرگوارم، سرکار خانم دکتر هادیان که در طول کار پایان‌نامه صبورانه یاریم کردند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. همچنین، از اساتید ارجمندم، جناب آقای دکتر طوسی و سرکار خانم دکتر رجایی که هم از کلاس درس ایشان بهره جسته‌ام و هم این پایان‌نامه را به قضاوت نشسته‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان نیز از پدر و مادر مهربانم، که مشوق اصلی من در تمامی موفقیت‌هایم تا به امروز بوده‌اند و از دوست عزیزم خانم فاطمه اسماعیلی و همه‌ی عزیزانی که در طول این مسیر یاریم نمودند، قدردانی می‌نمایم.

چکیده

نشان می‌دهیم اگر M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه‌ی موضعی نوتری و جابجایی R و I ایده‌آلی از R باشد به طوری که $\dim R/I = 1$ ، آن‌گاه مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ ، I—هم‌متناهی است. این بدان معنی است که $Ext_R^j(R/I, H_I^i(M))$ برای هر i, j ، با تولید متناهی است. هم‌چنین، نشان می‌دهیم که اگر P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی موضعی و کامل R باشد به طوری که $\dim R/P = 1$، آن‌گاه مدول‌های P—هم‌متناهی تشکیل یک زیر رسته‌ی آبلی از رسته‌ی R—مدول‌ها می‌دهند. سرانجام، ثابت خواهیم کرد که اگر M یک مدول با تولید متناهی از بعد n روی حلقه‌ی موضعی و نوتری R و I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $H_I^n(M)$ ، I—هم‌متناهی است.

واژه های کلیدی: کوهمولوژی موضعی ، مدول هم‌متناهی ، مدول هم‌دوری

فهرست مندرجات

مقدمه

$H_I^i(-)$ یک تابع‌گون است که بر R—مدول‌هایی که R یک حلقه‌ی نوتری و جابجایی باشد، اثر می‌کند و i—اُمین تابع‌گون کوهمولوژی موضعی وابسته به I نام دارد. تا کنون مطالعات زیادی پیرامون خواص این تابع‌گون صورت گرفته که بخش عمده‌ی نتایج به دست آمده منسوب به گروتندیک[1] و هارتشون[2] می‌باشد و کاربردهای فراوانی در جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری دارد.

هم‌متناهی بودن یک مدول خاصیتی است که نخستین بار توسط هارتشون در سال ۱۹۷۰ مطرح شد و منشأ آن حدس زیر از گروتندیک بود:

اگر I ایده‌آلی از R و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $Hom_R(R/I, H_I^j(M))$ با تولید متناهی است.

مهم‌ترین انگیزه‌ی هارتشون برای معرفی مدول‌های هم‌متناهی پاسخ به سؤال زیر است:

اگر I ایده‌آلی از R و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، چه وقت $Ext_R^i(R/I, H_I^j(M))$ برای هر i, j ، با تولید متناهی است ؟

با استفاده از دوگان ماتلیس می‌توان نشان داد که مدول کوهمولوژی موضعی $H_m^i(M)$، برای هر مدول با تولید متناهی M روی حلقه‌ی موضعی و نوتری (R, m)، m—هم‌متناهی است. در پی پاسخ به سؤال فوق، هارتشون مثال نقضی آورد که نشان داد این خاصیت هرگاه m را با هر ایده‌آل دلخواه دیگری جایگزین کنیم، برقرار نمی‌باشد؛ حتی اگر R یک حلقه‌ی موضعی و منظم باشد. به علاوه، او ثابت کرد اگر

[1] Grothendieck

[2] Hartshorne

R یک حلقه‌ی موضعی منظم کامل و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $H_I^i(M)$ در دو حالت زیر I—هم‌متناهی است:
۱) I یک ایده‌آل اصلی ناصفر باشد.
۲) I ایده‌آل اولی از R باشد به طوری که $\dim R/I = 1$.

در سال ۱۹۹۱ هونیکه[3] و کُه[4] ثابت کردند که اگر R یک حوزه‌ی موضعی کامل گرنشتاین و I ایده آلی از آن باشد که $\dim R/I = 1$ ، آن‌گاه برای هر i و هر R—مدول با تولید متناهی M ، $H_I^i(M)$ ، I—هم‌متناهی است.

بالأخره، دلفینو[5] در سال ۱۹۹۴ ثابت کرد که فرض گرنشتاین[6] بودن قضیه‌ی هونیکه—کُه را می‌توان با یکی از شرایط زیر جایگزین نمود:
۱) R شامل یک میدان باشد.
۲) اگر q یک پارامتر یکنواخت برای یک حلقه‌ی ضرایب از R باشد، آن‌گاه $q \in \sqrt{I}$ یا q مشمول در هیچ ایده‌آل اول مینیمال روی I نباشد.
۳) R کوهن مکالی[7] باشد.

در این رساله سعی شده است که شرط حوزه‌ی کامل بودن به طور کامل از شرایط هم‌متناهی بودن حذف گردد.در فصل اول این رساله به صورت خلاصه به بیان مقدمات و مطالب پیش نیاز از جبر جابجایی و جبر همولوژیک می‌پردازیم. در فصل دوم به معرفی مدول کوهمولوژی موضعی پرداخته و برخی از خواص اساسی آن را مطرح می‌کنیم. فصل سوم را به معرفی مدول‌های هم‌متناهی و بررسی برخی از شرایط هم‌متناهی بودن مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ اختصاص داده‌ایم و در نهایت، در فصل چهارم هم متناهی بودن $H_I^n(M)$ را وقتی که M یک R—مدول با تولید متناهی از بعد n باشد، بررسی می‌نماییم. لازم به ذکر است که مقالات اصلی که در این رساله مورد استفاده قرار گرفته‌اند، مرجع‌های [۴] و [٦] می‌باشند.

---
[3] Huneke
[4] Koh
[5] Delfino
[6] Gorenstein
[7] Cohen-Macaulay

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ چند نکته مقدماتی

در سراسر این رساله R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است و تمام مدول‌ها $R-$مدول یکانی هستند.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و P و N زیر مدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱) $(N :_R P) = \{r \in R \mid \forall x \in P, rx \in N\}$

۲) $(N :_M I) = \{x \in M \mid \forall \ \ x \in I, rx \in N\}$

۳) $Ann_R M = \{r \in R \mid \forall x \in M, rx = 0\}$

۴) اگر $Ann_R M = 0$ باشد، گوییم M یک $R-$مدول وفادار است.

$Ann_R(M)$ را به اختصار با $AnnM$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R و I ایده‌آلی با تولید متناهی از R و N زیر مدولی از M باشد. در این صورت:

$$(S^{-1}N :_{S^{-1}M} S^{-1}I) = S^{-1}(N :_M I)$$

لم ۳.۱.۱ فرض کنیم I ایده‌آلی از R و M یک R—مدول باشد. در این صورت:

$$R/I \otimes_R M \cong M/IM$$

اثبات: رجوع شود به نتیجه ۱.۲.۲۶ از مرجع [۵] . □

تعریف ۴.۱.۱ مدول M را R—مدول یکدست نامیم هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها مانند

$$\varphi : \cdots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \cdots$$

رشته‌ی

$$\varphi \otimes_R M : \cdots \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N'' \otimes_R M \longrightarrow \cdots$$

نیز دقیق باشد.

M را یکدست وفادار نامیم هرگاه برای هر رشته‌ی φ مانند فوق داشته باشیم:

φ دقیق است $\iff$ $\varphi \otimes_R M$ دقیق باشد.

تعریف ۵.۱.۱ اگر R و S دو حلقه و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد به طوری که S یک R—مدول یکدست باشد، آن‌گاه f را یک همریختی یکدست نامیم و گوییم S یک R—جبر یکدست است.

گزاره ۶.۱.۱ اگر M یک R—مدول باشد، آن‌گاه

$$S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M$$

اثبات: به سادگی ملاحظه می‌شود که نگاشت $\varphi : S^{-1}R \otimes_R M \longrightarrow S^{-1}M$ با ضابطه‌ی $\varphi(a/s \otimes m) = am/s$ $(a \in R, s \in S, m \in M)$ یک $S^{-1}R$—یکریختی است. □

نتیجه ۷.۱.۱ حلقه‌ی $S^{-1}R$ یک R—مدول یکدست است.

گزاره ۸.۱.۱ برای هر R—مدول M شرایط زیر معادلند:

۱) M یک R—مدول یکدست وفادار است.

۲) M یکدست بوده و برای هر R—مدول N ، $N \otimes_R M = 0$ نتیجه دهد $N = 0$.

۳) M یکدست بوده و برای هر ایده‌آل ماکزیمال m از R ، $mM \neq M$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۲.۱.۱۲ از مرجع [۵] . □

نتیجه ۹.۱.۱ اگر (R, m) حلقه‌ای موضعی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی R_m یک R—مدول یکدست وفادار است.

اثبات: با توجه به این که برای تنها ایده‌آل ماکزیمال m از R داریم $mS^{-1}R \neq S^{-1}R$، بنا بر گزاره‌ی قبل و نتیجه ۷.۱.۱ ، حکم حاصل می‌گردد. □

تبصره۱ در سراسر این رساله، منظور از $E(M)$، پوشش انژکتیو از R—مدول M می‌باشد.

لم ۱۰.۱.۱ اگر S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد، آن‌گاه برای هر $P \in SpecR$ ،

$$S^{-1}E(R/P) = \begin{cases} 0 & if\ S \cap P \neq \emptyset \\ E_{S^{-1}R}(S^{-1}R/S^{-1}P) & if\ S \cap P = \emptyset \end{cases}$$

اثبات: حکم با توجه به قضایای ۳.۳.۳ و ۳.۳.۸ از مرجع [۵] به‌دست می‌آید. □

تعریف۱۱.۱.۱ فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل اول P از R را ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم هرگاه اگر ایده‌آل اول دیگری مانند P' وجود داشته باشد که $I \subseteq P' \subseteq P$ ، آن گاه $P' = P$.

گزاره۱۲.۱.۱

۱) اگر ایده‌آل I از R مشمول در ایده‌آل اول P از R باشد، آن‌گاه P شامل یک ایده‌آل اول مینیمال از I می‌باشد.

۲) هر ایده‌آل واقعی حداقل یک ایده‌آل اول مینیمال دارد.

اثبات: ۱) فرض کنیم

$$\Sigma = \{P' \mid P \in SpecR\ ,\ I \subseteq P' \subseteq P\}$$

چون $P \in \Sigma$ ، لذا $\Sigma \neq \emptyset$. رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ را روی Σ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$P' \leq P'' \quad \Longleftrightarrow \quad P' \supseteq P''$$

فرض کنیم $\{P_i\}_{i\in I}$ زنجیری ناتهی از اعضای Σ باشد. قرار می‌دهیم $Q=\bigcap\limits_{i\in I}P_i$. به وضوح، به ازای هر $i\in I$ ، $P_i\leq Q$. به علاوه، داریم $I\subseteq Q\subseteq P$. حال نشان می‌دهیم Q ایده‌آل اولی از R می‌باشد.
اگر $rr'\in Q$ و $r\notin Q$ ، آن‌گاه به ازای هر $i\in I$ ، $rr'\in P_i$ و $k\in I$ وجود دارد به طوری که $r\notin P_k$. از آن‌جا که P_k اول است، لذا $r'\in P_k$. فرض کنیم P_j عضو دلخواهی از زنجیر باشد. در این صورت، $P_k\subseteq P_j$ یا $P_j\subseteq P_k$. اگر $P_k\subseteq P_j$ ، آن‌گاه $r'\in P_j$. اگر $P_j\subseteq P_k$ ، آن‌گاه $r\notin P_j$. در نتیجه، چون P_j اول است، $r'\in P_j$. چون P_j عضو دلخواهی از زنجیر می‌باشد، لذا $r'\in\bigcap\limits_{j\in I}P_j=Q$. درنتیجه، Q ایده‌آل اولی از R است. بنا بر این، هر زنجیر ناتهی از Σ دارای کران بالایی در Σ می‌باشد. لذا، بنا بر لم زورن Σ دارای عضو ماکزیمالی چون P^* می‌باشد.
حال اگر Q ایده‌آل اول دیگری باشد که $I\subseteq Q\subsetneqq P^*$ ، آن‌گاه چون $P^*\subseteq P$ ، داریم $I\subseteq Q\subseteq P$. از این رو، $Q\in\Sigma$. اما از آن‌جا که $Q\subsetneqq P^*$ ، داریم $P^*\lneqq Q$ و این با ماکزیمال بودن P^* تناقض دارد. در نتیجه، P^* ایده‌آل اول مینیمال I است.

۲) اگر I ایده‌آل واقعی R باشد، آن‌گاه حلقه‌ی غیر بدیهی و یکدار R/I حداقل یک ایده‌آل اول دارد و حکم بنا بر قسمت قبل نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱۳.۱.۱ (اجتناب از ایده‌آل‌های اول)

۱) فرض کنیم $P_1,\cdots,P_n$ ایده‌آل‌های اولی از حلقه‌ی R باشند. اگر I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد به طوری که $I\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i$ ، آن‌گاه $1\leq i\leq n$ موجود است که $I\subseteq P_i$.

۲) فرض کنیم P ایده‌آلی اول و $a_1,\cdots,a_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند. اگر $\bigcap\limits_{i=1}^{n}a_i\subseteq P$ ، آن‌گاه $1\leq i\leq n$ موجود است به طوری که $a_i\subseteq P$. به ویژه، اگر $\bigcap\limits_{i=1}^{n}a_i=P$ ، آن‌گاه برای iای ، $a_i=P$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۱۱.۱ از مرجع [۱] . □

گزاره ۱۴.۱.۱ عضو a از حلقه‌ی R یکه است اگر و تنها اگر متعلق به هیچ ایده‌آل ماکزیمال R نباشد و لذا مجموعه‌ی نایکه‌های حلقه‌ی موضعی (R,m) مساوی m است.

اثبات: عنصر a نایکه است اگر و تنها اگر ایده‌آل aR واقعی باشد. پس، a نایکه است اگر و تنها اگر ایده‌آل aR مشمول در ایده‌آل ماکزیمالی از R باشد. □

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنیم (R,m) حلقه‌ای موضعی باشد. در این صورت، همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow R_m$ با ضابطه‌ی $f(r) = r/1$ یک یکریختی می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $r \in R$ ، به طوری که $f(r) = 0$. در این صورت، $s \in R - m$ موجود است به طوری که $sr = 0$. بنا بر گزاره‌ی قبل، s یکه می‌باشد. لذا، $r = 0$. از این رو، f یک به یک می‌باشد.
حال فرض می‌کنیم r/s عضو دلخواهی از R_m باشد. در این صورت،

$$f(rs^{-1}) = (rs^{-1})/1 = r/s$$

لذا، f پوشا بوده و حکم ثابت می گردد. □

نتیجه ۱٦.۱.۱ اگر (R,m) حلقه‌ای موضعی باشد، آن‌گاه برای هر R—مدول M داریم $M \cong M_m$.

اثبات: حکم با توجه به گزاره ٦.۱.۱ و گزاره‌ی فوق واضح است. □

قضیه ۱۷.۱.۱ (گروسون [1]) : اگر M یک R—مدول با تولید متناهی وفادار باشد، آن‌گاه هر R—مدول دارای فیلتری متناهی از زیر مدول‌های خود است که هر عامل آن تصویر همریخت جمع مستقیم تعداد متناهی کپی‌هایی از M است.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۴.۱ از مرجع [۱۴] . □

---

[1] Gruson

تعریف ۱.۱.۱۸ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. $Supp_R(M)$ و $Ass_R(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Supp_R(M) = \{P \in SpecR \mid \exists \quad 0 \neq x \in M \quad s.t. \quad (0 :_R x) \subseteq P\}$$
$$Ass_R(M) = \{P \in SpecR \mid \exists \quad 0 \neq x \in M \quad s.t. \quad (0 :_R x) = P\}$$

$Supp_R(M)$ را تکیه‌گاه M و $Ass_R(M)$ را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۹ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. بعد کرول $M \neq 0$ که با $\dim_R M$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\dim_R M := sup\{n \geq 0 \mid \exists \quad P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n \quad s.t. \quad P_i \in Supp_R(M)\}$$

لم ۱.۱.۲۰ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) $Supp_R(M) = \{P \in SpecR \mid M_P \neq 0\}$.

۲) اگر $0 \to N \to M \to L \to 0$ رشته‌ای دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها باشد، آن‌گاه:

i) $Supp_R(M) = Supp_R(N) \cup Supp_R(L)$.

ii) $Ass_R(M) \subseteq Ass_R(N) \cup Ass_R(L)$.

۳) اگر M یک R—مدول آرتینی باشد، آن‌گاه $Ass_R(M) = Supp_R(M)$. هم‌چنین، این مجموعه شامل تعداد متناهی ایده‌آل ماکزیمال R است.

۴) اگر M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه:

$$Supp_R(M) = \{P \in SpecR \mid AnnM \subseteq P\}$$

به ویژه، در این حالت $\dim M = \dim(R/AnnM)$.

اثبات: ۱) بنا بر تعریف به راحتی نتیجه می‌شود.
۲) (i) از دقیق بودن تابع‌گون $(.)_P$ ، رشته‌ی دقیق $0 \to N_P \to M_P \to L_P \to 0$ حاصل می‌گردد. لذا، بنا بر قسمت اول، حکم به سادگی نتیجه می‌شود.
(ii) رجوع شود به لم ۲.۴.۸ از مرجع [۵].
۳) بنا بر تعریف، همواره داریم $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$. با استفاده از تمرین ۸.۴۸ از مرجع [۱۳] می‌توان ثابت نمود که $Supp_R(M) \subseteq Ass_R(M)$ و نیز اعضای این مجموعه، ایده‌آل‌های ماکزیمالی از حلقه R می‌باشند. حال با استفاده از تمرین ۸.۴۹ از مرجع [۱۳] و آرتینی بودن M نتیجه می‌گردد که این مجموعه متناهی است.
۴) فرض کنیم $m_1, \cdots, m_n \in M$ چنان باشند که $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$. در این صورت:

$$P \in Supp_R(M) \iff M_P \neq 0 \iff \exists \ i \quad s.t. \quad 0 \neq m_i/1 \ \in M_P$$

$$\iff \exists \ i \quad s.t. \quad Ann(m_i) \subseteq P \iff AnnM = \bigcap_{i=1}^{n} Ann(m_i) \subset P$$

بنابراین،

$$Supp_R(M) = \{P \in SpecR \mid AnnM \subseteq P\}$$

$\dim_R(M)$ را به اختصار با $\dim M$ نشان می دهیم. □

گزاره ۲۱.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت:

۱) $Ass_R(M) = \emptyset \iff M = 0$

۲) به ازای هر ایده آل اول P از حلقه‌ی R ، $Ass_R(R/P) = \{P\}$.

۳) اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه:
i) $Ass_R(M)$ متناهی است.
ii) مجموعه عناصر مینیمال دو مجموعه‌ی $Supp_R(M)$ و $Ass_R(M)$ یکسانند.

اثبات: ۱) رجوع شود به گزاره ۲.۴.۳ از مرجع [۵] .
۳) رجوع شود به قضیه ٦.۵ از مرجع [۱۰] . □

قضیه ۲۲.۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد.در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) $\dim M = 0$.

۲) $R/AnnM$ آرتینی است.

۳) M طول متناهی دارد.

۴) هر $P \in Ass_R(M)$ یک ایده آل ماکزیمال از R است.

۵) هر $P \in Supp_R(M)$ یک ایده آل ماکزیمال از R است.

اثبات: بدیهی است. □

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم P ایده آل اولی از حلقه‌ی R باشد. ارتفاع P که آن را با htP نشان می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$htP := sup\{n \geq 0 \mid \exists \quad P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n = P \quad s.t. \quad P_i \in SpecR\}$$

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده آل دلخواه از حلقه‌ی R باشد. ارتفاع I به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$htI := min\{htP \mid I \subseteq P \in SpecR\}$$

به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود که

$$htI + \dim R/I \leq \dim R$$

تعریف ۱.۱.۲۵ فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، پوش I چنین تعریف می‌شود:

$$V(I) = \{P \in SpecR \mid I \subseteq P\}$$

تعریف ۱.۱.۲۶ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. عنصر $r \in R$ را یک مقسوم علیه صفر روی M نامیم هرگاه عنصر ناصفر $x \in M$ موجود باشد به طوری که $rx = 0$. مجموعه عناصری از R را که روی M مقسوم علیه صفر هستند، با نماد $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۲۷ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک $R-$مدول ناصفر باشد.

۱) هر عضو ماکزیمال از خانواده‌ی ایده‌آل‌های $F = \{Ann(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ یک ایده‌آل اول وابسته به M می‌باشد.

۲) $Z_R(M) = \bigcup\limits_{P \in Ass_R(M)} P$

اثبات: رجوع شود به قضیه ۶.۱ از مرجع [۱۰] . $\square$

تعریف ۱.۱.۲۸ فرض کنیم R یک حلقه و S یک $R-$جبر باشد.

۱) گوییم $x \in S$ روی R صحیح است هرگاه x در یک معادله به شکل

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $a_1, \cdots, a_n \in R$ صدق کند.

۲) گوییم S روی R صحیح است هرگاه هر عنصر از S روی R صحیح باشد.

۳) گوییم S روی R متناهی است در صورتی که به عنوان R—مدول با تولید متناهی باشد.

گزاره ۲۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و S یک R—جبر باشد. در این صورت، $x \in S$ روی R صحیح است اگر و تنها اگر $R[x]$ مشمول در زیرجبری از S مانند S' باشد که S' به عنوان R—مدول با تولید متناهی باشد.

نتیجه ۳۰.۱.۱ هر R—جبر متناهی، صحیح است.

تعریف ۳۱.۱.۱ مجموعه‌ی جزئی مرتب $(I, \leq)$ را جهت دار یا مستقیم نامیم هرگاه برای هر $i, j \in I$ ، $k \in I$ یافت شود به طوری که $i \leq k$ و $j \leq k$.

تعریف ۳۲.۱.۱ فرض کنیم $(I, \leq)$ یک مجموعه‌ی مستقیم باشد. گردایه‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از R—مدول‌ها به همراه خانواده‌ی R—همریختی‌های $\{\mu_{ij} : M_i \to M_j\}_{i\leq j}$ یک دستگاه مستقیم نامیده می‌شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) به ازای هر $i \in I$ ، μ_{ii} نگاشت همانی روی M_i باشد.

۲) برای هر $i, j, k \in I$ با شرط $i \leq j \leq k$ داشته باشیم $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$.

دستگاه مستقیم فوق را با $M = \{M_i, \mu_{ij}\}_{i,j\in I}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنیم $M = \{M_i, \mu_{ij}\}_{i\leq j}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه‌ی مستقیم I باشد. حد مستقیم این دستگاه که با $\varinjlim_{i\in I} M_i$ نشان داده می‌شود

برابر است با R—مدول M به همراه خانواده‌ی R—همریختی‌های $\{\mu_i : M_i \to M\}_{i\in I}$ به طوری که برای هر $i,j \in I$ که $i \leq j$ ،

$$\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$$

و برای هر خانواده‌ی دیگری مانند $\{N, \{h_i\}_{i\in I}\}$ که دارای خاصیت فوق باشد، R—همریختی یکتای $f : M \to N$ موجود است به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $f \circ \mu_i = h_i$.
به آسانی ثابت می‌شود که f یک یکریختی است. در واقع، حد مستقیم تحت یکریختی یکتاست .

شایان ذکر است دستگاه معکوس از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها و حد معکوس آن نیز به طور مشابه تعریف می‌گردد.

تعریف ۳۴.۱.۱ (کامل‌سازی)

فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R و M یک R—مدول باشد. در این صورت، $M \supseteq IM \supseteq I^2M \supseteq \cdots$. به ازای هر $i,j \in \mathbb{N}_0$ که $i \leq j$، R—همریختی‌های طبیعی $f_{ji} : M/I^jM \to M/I^iM$ را با ضابطه‌ی $f_{ji}(x+I^jM) = x+I^iM$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که $\{M/I^iM, f_{ji}\}_{i\leq j}$ یک دستگاه معکوس روی $\mathbb{N}$ می‌باشد. لذا، حد معکوس آن یعنی $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM$ موجود است. در واقع،

$$\begin{aligned}\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM &= \left\{(x_i+I^iM)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM \mid f_{ji}(x_j+I^jM) = x_i+I^iM\right\} \\ &= \left\{(x_i+I^iM)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M/I^iM \mid \forall \;\; i\leq j \;,\; x_j - x_i \in I^iM\right\}\end{aligned}$$

از طرف دیگر، خانواده‌ی $\{I^iM\}_{i\geq 0}$ از زیر مدول‌های M را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای یک توپولوژی روی M در نظر گرفت. این توپولوژی را I—ادیک توپولوژی روی M نامیم.
دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعضای R—مدول M را در توپولوژی I—ادیک، کوشی نامیم