دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده‌ی علوم

رساله‌ی دکتری

ریاضی محض - آنالیز ریاضی

موضوع:

تعمیم برخی از قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای یکنواخت

نگارش:

کمال فلاحی

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

بهمن ۱۳۹۱

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: تعمیم برخی از قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای یکنواخت

استاد راهنما: دکتر کوروش نوروزی[۱]

نام دانشجو: کمال فلاحی

شماره دانشجویی: ۸۷۰۰۶۸۶

اینجانب کمال فلاحی دانشجوی دکترای ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

[۱] Kourosh Nourouzi

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که هرچه دارم از اوست و بزرگترین امید و یاورم در لحظه لحظه زندگیست، به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

برخود لازم می‌دانم از کلیه زحمات و تلاش‌های جناب آقای دکتر کوروش نوروزی در طول تحصیل خود سپاسگذاری و قدردانی کنم. بدون تردید ارزنده‌ترین نکات علمی و اخلاقی را در این مدت از ایشان آموخته و دست‌یابی به نتایج این تحقیق، بدون همفکری‌ها و نقطه نظرات ایشان امکان‌پذیر نبوده است. آرزو می‌کنم بزرگواری و بزرگ منشی ایشان همواره سرلوحه‌ی کار من و دیگران باشد.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از زحمات اساتید داور خارجی جناب آقای دکتر آبکار و جناب آقای دکتر آقاجانی و نیز اساتید داور داخلی جناب آقای دکتر مسیحا و سرکار خانم دکتر حسینی به خاطر قبول زحمت داوری پایان‌نامه تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

در این رساله، ابتدا برخی از نتایج نقطه‌ی ثابت را با استفاده از نوع جدیدی انقباض، با به کارگیری یک خانواده از توابع صعودی از فضاهای متریک به فضاهای یکنواخت مجهز به یک E-فاصله و یک گراف تعمیم می‌دهیم. سپس، نقاط ثابت انقباض‌های مجانبی و انقباض‌های نوع بوید و وانگ را در فضاهای یکنواخت مجهز به یک E-فاصله بررسی می‌کنیم. به‌علاوه، یک نسخه‌ی جدید از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کِرک را برای انقباض‌های مجانبی به دست آورده و به بررسی انقباض‌های نوع بوید و وانگ در فضاهای یکنواخت می‌پردازیم. در پایان، برخی نگاشت‌های انقباضی و ناگسترشی را در فضاهای فرامتریک برداری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: فضاهای یکنواخت جداشده، نقطه‌ی ثابت، گراف همبند ضعیف، انقباض‌های مجانبی، فضای فرامتریک، تابع ثابت موضعی.

فهرست مطالب

مقدمه

در دهه‌ی ۱۹۳۰، مفاهیم مربوط به ساختارهای یکنواخت توسط ریاضیدانان متعددی مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۱۹۳۶، آندره وِی[۱] [۶۸]، ریاضیدان فرانسوی، نتایج خود را درباره‌ی فضاهای یکنواخت با استفاده از یک مفهوم متفاوت یکنواختی که بر حسب خانواده‌ای از پوشش‌ها تعریف می‌شد، منتشر کرد. پس از وِی، ژورو کورِپا[۲] [۴۴] در سال ۱۹۳۶، و لِنارد کوهِن[۳] [۲۴] و لارِنس گِرِیوز[۴] [۳۰] در سال ۱۹۳۷، به مطالعه‌ی مفهوم یکنواختی پرداختند اما هیچ‌یک از آن‌ها به یک نظریه‌ی رضایت‌بخش دست پیدا نکردند. سرانجام در سال ۱۹۳۸، وِی [۶۹] تعریف صریح و جامعی از یکنواختی که منطبق بر تعریف کنونی می‌باشد، ارائه داد و در سال ۱۹۴۰ انتشار یافت. نیکُلاس بورباکی[۵] [۱۵] نیز کمک شایانی به توسعه‌ی این مفهوم نمود. اما یکنواختی چیست و فضای یکنواخت چه فضایی است؟

رسته‌ی فضاهای یکنواخت بین رسته‌ی فضاهای متریک و توپولوژیک قرار دارد. به عبارت دیگر، هر فضای متریک یک فضای یکنواخت و هر فضای یکنواخت یک فضای توپولوژیک است. در واقع، با تعمیم مفهوم فاصله در فضاهای متریک و رسیدن به مفهوم پیرامون در فضاهای یکنواخت، به خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک دست می‌یابیم که در آن‌ها مفاهیم یکنواختی از جمله پیوستگی یکنواخت و همگرایی یکنواخت و خاصیت کوشی قابل تعریف می‌باشند. این خانواده همه‌ی گروه‌های توپولوژیک و فضاهای برداری توپولوژیک را نیز شامل می‌شود. بحث‌های مفصل به همراه مثال‌های ملموس در مورد فضاهای یکنواخت را می‌توان در [۳۵، ۳۶، ۴۱، ۵۷، ۶۶، ۷۰]

[۱] André Weil (1906-1998)

[۲] Djuro Kurepa

[۳] Leonard Cohen

[۴] Lawrence Graves

[۵] Nicolas Bourbaki

دید.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول، به معرفی فضاهای یکنواخت، توپولوژی و خواص آن پرداخته و پیرامون‌های پایه‌ای و شبه‌مترهای مینکوفسکی را در این فضاها معرفی می‌کنیم. به علاوه، تاریخچه‌ای کوتاه از قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای یکنواخت را ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم، ابتدا به ارائه‌ی تعاریف A و E–فاصله‌ها در فضاهای یکنواخت و بیان خواص این تابع‌ها می‌پردازیم. در هر یک از بخش‌های ۳.۲ و ۴.۲ نتایج گفته‌شده در سال ۲۰۰۸ توسط یاکیمسکی[1] [۳۴] را از دو منظر، یکی جایگزینی فضاهای متریک با فضاهای یکنواخت مجهز به یک گراف و دیگری در نظر گرفتن یک شرط انقباضی ضعیف‌تر نسبت به شرط انقباضی یاکیمسکی تعمیم می‌دهیم و با ارائه‌ی مثال‌هایی نابدیهی نشان می‌دهیم که این تعمیم‌ها واقعی و جالب هستند. به‌علاوه، در بخش ۴.۲ با تعریف نگاشت‌های مدارگون p–پیوسته و مدارگون p–پیوسته‌ی گرافی برخی از قضایای گفته شده [۳۴] را از فضاهای متریک به فضاهای یکنواخت تعمیم می‌دهیم. نتایج اصلی این فصل همچنین در [۴] قابل مشاهده می‌باشند.

در فصل سوم، نقاط ثابت انقباض‌های E–مجانبی و E–انقباض‌های نوع بوید–وانگ را در فضاهای یکنواخت مجهز به یک E–فاصله بررسی کرده و نسخه‌ی جدیدی از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت کِرک[2] درباره‌ی انقباض‌های مجانبی و قضیه‌ی بوید[3] و وانگ[4] را ثابت می‌کنیم. این نتایج همچنین در [۳] آمده شده‌اند.

در فصل چهارم، برخی نگاشت‌های انقباضی و ناگسترشی را در فضاهای فرامتریک برداری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. به بیان دقیق‌تر، نشان می‌دهیم هر نگاشت انقباضی یا ناگسترشی، نقطه‌ی ثابت دارد یا زیر مجموعه‌ای از فضای فرامتریک وجود دارد که تحت این نوع نگاشت پایا است. نتایج ارئه شده در این فصل همچنین در [۲۷] به چاپ رسیده است.

[1] Jachymski

[2] Kirk

[3] Boyd

[4] Wong

مقالات زیر مستخرج از این رساله می‌باشند:

1. A. Aghanians, K. Fallahi, K. Nourouzi, *Fixed points for E-asymptotic contractions and Boyd-Wong type E-contractions in uniform spaces*, Bull. Iranian Math. Soc., (Accepted).
2. A. Aghanians, K. Fallahi, K. Nourouzi, *Fixed points for G-contractions on uniform spaces endowed with a graph*, Fixed Point Theory Appl. **2012**:**182**, 15 pages, 2012.
3. K. Fallahi, K. Nourouzi, *Modular locally constant mapping in vector ultrametric spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2011**, Art. ID 574756, 8pp.

مقالات ارائه شده در کنفرانس‌ها و سمینارها توسط نگارنده در زیر لیست شده‌اند:

1. *Common fixed point of maps in uniform spaces*, 42$^{\text{nd}}$ Annual Iranian Mathematics Conference, September 5-8, 2011, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran.

2. *Best proximity points for ψ-ϕ-cyclic contractive mappings*, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, September 9-12, 2010, Royal Paradise Hotel & Spa, Palong beach, Phuket, Thailand.

3. *On the best proximity points of cyclic contractive mappings*, The First Workshop in Fixed Point Theory and Applications, June 9-10, 2010, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

کمال فلاحی

دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تهران ۱۳۹۱

فصل ۱

فضاهای یکنواخت

در این فصل، ابتدا به معرفی یکنواختی و توپولوژی یکنواخت القاشده از آن پرداخته و سپس پیرامون‌های پایه‌ای یک فضای یکنواخت و شبه‌مترهای مینکوفسکی وابسته به آن‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش پایانی این فصل، برخی قضایای اثبات‌شده از نقطه‌ی ثابت را در فضاهای یکنواخت با استفاده از پیرامون‌های پایه‌ای ذکر می‌کنیم. برای مطالعات بیشتر در این زمینه خواننده را به [۷، ۸، ۲۳، ۶۳] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ فضای یکنواخت

برای یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه مانند X، قطر X که با نماد $\Delta(X)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ی $\{(x,x)\ :\ x\in X\}$. فرض کنید U و V زیرمجموعه‌های دلخواه از $X\times X$ باشند. مجموعه‌های U^{-1} و $U\circ V$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U^{-1}=\Big\{(x,y)\in X\times X:\ (y,x)\in U\Big\};$$

$$U\circ V=\Big\{(x,y)\in X\times X\mid \exists\, z\in X:(x,z)\in V,\ (z,y)\in U\Big\}.$$

اکنون تعریف فضای یکنواخت را بر یک مجموعه‌ی ناتهی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ ([۷۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. خانواده‌ی ناتهی $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های $X\times X$

را یک یکنواختی[۱] روی X گویند هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

(U۱) هر عضو $\mathcal{U}$ شامل $\Delta(X)$ است؛

(U۲) اگر $U, V \in \mathcal{U}$، آن‌گاه $U \cap V \in \mathcal{U}$؛

(U۳) اگر $U \in \mathcal{U}$، آن‌گاه $U^{-1} \in \mathcal{U}$؛

(U۴) به ازای هر $U \in \mathcal{U}$، عضو V در $\mathcal{U}$ وجود دارد به طوری که $V \circ V \subseteq U$؛

(U۵) اگر $U \in \mathcal{U}$ و V زیرمجموعه‌ای از $X \times X$ شامل U باشد، آن‌گاه $V \in \mathcal{U}$.

اگر $\mathcal{U}$ یک یکنواختی روی X باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{U})$ (یا به اختصار X) یک فضای یکنواخت و اعضای $\mathcal{U}$ پیرامون‌های[۲] X نامیده می‌شوند.

پیرامون‌ها به نوبه‌ی خود مفهوم فاصله را در فضاهای متریک تعمیم می‌دهند. در واقع، اگر U یک پیرامون X و $(x, y) \in U$، آن‌گاه x و y را U-نزدیک می‌گویند.

منظور از یک پایه برای یک یکنواختی روی X، خانواده‌ی ناتهی $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های $X \times X$ است که در ویژگی‌های (U۱)، (U۳)، (U۴) و صورت تعدیل‌شده‌ی زیر از (U۲) صدق می‌کند:

(U۲$'$) اگر $U, V \in \mathcal{B}$، آن‌گاه $W \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $W \subseteq U \cap V$.

حال اگر $\mathcal{B}$ در این چهار ویژگی صدق کند، آن‌گاه یکنواختی تولیدشده توسط $\mathcal{B}$ که با نماد $\langle \mathcal{B} \rangle$ نشان داده می‌شود، خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $X \times X$ است که عضوی از $\mathcal{B}$ را شامل می‌شوند، یعنی،

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \Big\{ U \subseteq X \times X \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subseteq U \Big\}.$$

شایان ذکر است که $\mathcal{B} \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$.

[۱] uniformity

[۲] entourages

مثال ۲.۱.۱ ([۷۰]). فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است. به ازای هر $\varepsilon > 0$ قرار دهید:

$$U_\varepsilon = \Big\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\Big\}.$$

در این صورت خانواده‌ی $\{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ یک پایه برای یک یکنواختی روی X می‌باشد که آن را یکنواختی حاصل از متر می‌نامند. بنابراین، هر فضای متریک یک فضای یکنواخت است.

مثال ۳.۱.۱ ([۳۵، ۷۰]). فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و $\mathcal{N}_e$ دستگاه همسایگی‌های عضو همانی G است. به ازای هر $U \in \mathcal{N}_e$ تعریف کنید:

$$L_U = \Big\{(x, y) \in G \times G :\ x^{-1}y \in U\Big\}, \quad \Big(R_U = \Big\{(x, y) \in G \times G :\ xy^{-1} \in U\Big\}\Big).$$

در این صورت خانواده‌ی $\{L_U \mid U \in \mathcal{N}_e\}$ ($\{R_U \mid U \in \mathcal{N}_e\}$) یک پایه برای یک یکنواختی روی G می‌باشد که آن را یکنواختی چپ (راست) G می‌نامند. روشن است که اگر گروه G آبلی باشد، آنگاه یکنواختی‌های چپ و راست یکسان می‌باشند.

مشابه مثال ۳.۱.۱، یکنواختی‌هایی روی فضاهای برداری توپولوژیک تعریف می‌شود. در مثال زیر، یک یکنواختی روی شبکه‌ها تعریف می‌کنیم.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $(X, \preceq)$ یک شبکه است. به ازای هر $a \in X$ تعریف کنید:

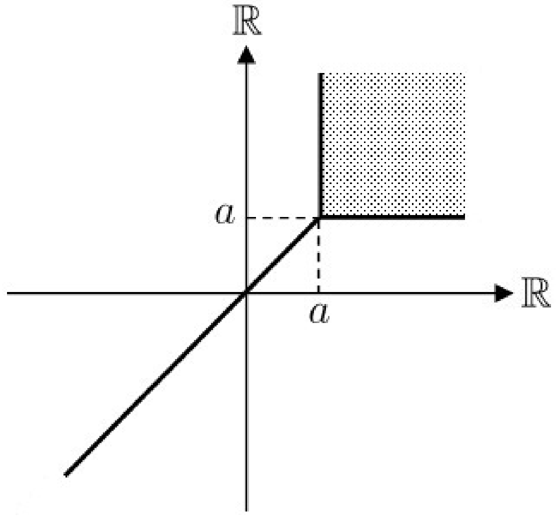
$$D_a = \Delta(X) \cup \Big\{(x, y) \in X \times X :\ a \preceq x,\ a \preceq y\Big\}.$$

در این صورت خانواده‌ی $\{D_a \mid a \in X\}$ یک پایه برای یک یکنواختی روی X می‌باشد. (شکل ۱.۱)

مثال ۵.۱.۱ ([۷۰]). هر مجموعه‌ی ناتهی مانند X به طور طبیعی به دو یکنواختی زیر مجهز می‌شود:

$$\mathcal{U}_T = \{X \times X\}, \quad \mathcal{U}_D = \langle\{\Delta(X)\}\rangle = \Big\{U \subseteq X \times X :\ \Delta(X) \subseteq U\Big\}.$$

$\mathcal{U}_T$ را یکنواختی بدیهی و $\mathcal{U}_D$ را یکنواختی گسسته روی X می‌نامند. واضح است که به ازای هر یکنواختی $\mathcal{U}$ روی X، شمول‌های $\mathcal{U}_T \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_D$ برقرارند.



شکل ۱.۱: شکل پیرامون D_a در $\mathbb{R}$.

تعریف ۶.۱.۱ ([۷۰]). یکنواختی $\mathcal{U}$ را روی مجموعه‌ی ناتهی X جداساز[۱] گویند هرگاه اشتراک همه‌ی پیرامون‌های X برابر $\Delta(X)$ باشد. در این حالت، X یک فضای یکنواخت جداشده نامیده می‌شود.

با توجه به مفهوم پایه، بدیهی است که برای بررسی جداساز بودن یک یکنواختی، کافی است فقط اشتراک اعضای پایه‌ی آن یکنواختی را محاسبه کنیم. بنابراین، یکنواختی حاصل از متر، یکنواختی مثال ۴.۱.۱ و یکنواختی گسسته جداساز می‌باشند. اگر X یک فضای یکنواخت باشد، آن‌گاه به ازای هر عضو x و هر پیرامون U از X

$$U[x] = \Big\{y \in X : \ (x,y) \in U\Big\}$$

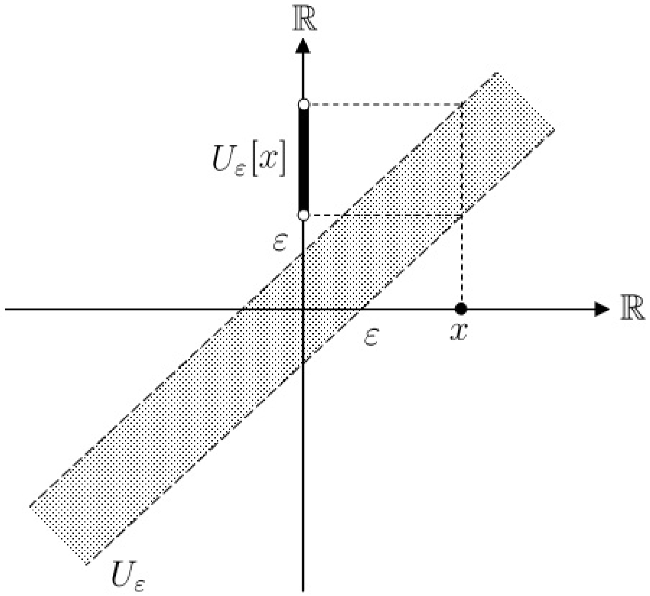
یک همسایگی یکنواخت x نامیده می‌شود. به علاوه، گردآیه‌ی (ناتهی)

$$\tau_{\mathcal{U}} = \Big\{A \subseteq X \mid \forall\, x \in A \ \exists\, U \in \mathcal{U} : U[x] \subseteq A\Big\}$$

یک توپولوژی روی X تعریف می‌کند که آن را توپولوژی یکنواخت می‌نامند. خانواده‌ی $\{U[x] \ : \ U \in \mathcal{U}\}$ به ازای هر $x \in X$، یک پایه‌ی همسایگی در نقطه‌ی x برای توپولوژی $\tau_{\mathcal{U}}$ است. اکنون چند مثال در این راستا بیان می‌کنیم.

مثال ۷.۱.۱. توپولوژی حاصل از یکنواختی روی فضاهای متریک، گروه توپولوژیک و $\mathcal{U}_D$ به صورت زیر است:

[۱] separating



شکل ۲.۱: شکل پیرامون U_ε و همسایگی یکنواخت $U_\varepsilon[x]$ در $\mathbb{R}$.

الف) اگر یکنواختی حاصل از متر را در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه‌های باز $\tau_{\mathcal{U}}$ و فضای متریک (X, d) دقیقاً یکی هستند؛

ب) اگر یکنواختی راست به دست آمده از یک گروه توپولوژیک G را در نظر بگیریم، آنگاه $\tau_{\mathcal{U}}$ همان توپولوژی روی G است؛

ج) یکنواختی‌های $\mathcal{U}_D$ و $\mathcal{U}_T$ به ترتیب توپولوژی‌های گسسته و بدیهی را روی X القا می‌کنند.

با استفاده از گزاره‌ی زیر می‌توان از روی توپولوژی $\tau_{\mathcal{U}}$ جداساز بودن فضای یکنواخت را تشخیص داد.

گزاره ۸.۱.۱ ([۶۶، ۷۰]). فرض کنید X یک فضای یکنواخت است. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادل‌اند:

۱) X جداشده است؛

۲) $\tau_{\mathcal{U}}$ یک توپولوژی هاسدورف است.

هر فضای یکنواخت را می‌توان یک فضای توپولوژیک دانست چون هر یکنواختی روی X یک توپولوژی القا

می‌کند. بنابراین با استفاده از توپولوژی یکنواخت بیان مفاهیم توپولوژیکی همچون پیوستگی و همگرایی ساده است.

گزاره ۹.۱.۱ ([۷۰]). فرض کنید X یک فضای یکنوخت است. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

۱) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای یکنواخت X همگرا به نقطه‌ی $x \in X$ است اگر و فقط اگر به ازای هر پیرامون U از X، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد به طوری که اگر $n \geq N$، آن‌گاه $(x_n, x) \in U$؛

۲) نگاشت $f : X \to X$ در نقطه‌ی $x_\circ \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر پیرامون V از X، پیرامون U از X وجود داشته باشد به طوری که اگر $(x, x_\circ) \in U$، آن‌گاه $(fx, fx_\circ) \in V$.

اما خاصیتی که فضاهای یکنواخت را از فضاهای توپولوژیک متمایز می‌سازد آن است که بر خلاف فضاهای توپولوژیک، مفاهیم یکنواختی مانند دنباله‌ی کوشی، پیوستگی و همگرایی یکنواخت در آن‌ها تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۰.۱.۱ ([۵، ۷۰]). فرض کنید X یک فضای یکنواخت است.

۱) دنباله‌ی $\{x_n\}$ را در X کوشی گویند هرگاه به ازای هر پیرامون U از X، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد به طوری که اگر $m, n \geq N$، آن‌گاه $(x_m, x_n) \in U$؛

۲) فضای یکنواخت X را کامل دنباله‌ای گویند هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن به نقطه‌ای از X همگرا باشد.

به‌وضوح با توجه به تعریف ارائه شده، هر دنباله‌ی همگرا در یک فضای یکنواخت یک دنباله‌ی کوشی است و اگر یکنواختی حاصل از متر باشد، آن‌گاه دنباله‌ی کوشی تعریف شده همان دنباله‌ی کوشی در فضای متریک است. اکنون در زیر مفهوم پیوسته‌ی یکنواخت در فضاهای یکنواخت بیان می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ ([۵، ۷۰]). فرض کنید X یک فضای یکنواخت است.

۱) نگاشت $f : X \to X$ را بر X پیوسته‌ی یکنواخت گویند هرگاه به ازای هر پیرامون V از X، پیرامون U از X وجود داشته باشد به طوری که اگر $(x, y) \in U$، آن‌گاه $(fx, fy) \in V$؛

۲) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از خودنگاشت‌های روی X است. دنباله‌ی $\{f_n\}$ را همگرای یکنواخت به f گویند هرگاه برای هر پیرامون U از X، عدد صحیح و مثبت N وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ و $x \in X$، $(f_n x, fx) \in U$.

شایان ذکر است که با توجه به تعریف ۱۱.۱.۱، هر نگاشت پیوسته‌ی یکنواخت، پیوسته و هر دنباله‌ی همگرا، کوشی‌است. همچنین، اگر یک فضای متریک به یکنواختی حاصل از متر مجهز شود، آنگاه مفاهیم بیان شده در تعریف ۱۱.۱.۱ به همان مفاهیم متناظر در فضاهای متریک تبدیل می‌شوند.

۲.۱ پیرامون‌های پایه‌ای و قضایای نقطه‌ی ثابت با استفاده از پیرامون‌ها

شاید یکی از اولین و مهم‌ترین قضایای نقطه‌ی ثابت منسوب به ریاضیدان هلندی، لیوتزِن اِبِرتِس یان براوئِر[۱] [۱۸] باشد. اما بدون شک، نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت متری، توسعه و پیشرفت خود را مدیون اِستِفان باناخ[۲]، ریاضیدان نامی لهستانی می‌باشد که در سال ۱۹۲۲، در رساله‌ی دکترای خود، به منظور یافتن جواب یک معادله‌ی انتگرال، یکی از ساده‌ترین قضایای نقطه‌ی ثابت را در فضاهای متریک بیان نمود. این قضیه که به «اصل انقباض باناخ» شهرت دارد، به صورت زیر است:

قضیه ۱.۲.۱ ([۱۲]). فرض کنید X یک فضای متریک کامل است و نگاشت $f : X \to X$ در شرط انقباضی

$$d(fx, fy) \leq kd(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

که $k \in [0, 1)$ عددی ثابت است، صدق کند. در این صورت f یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد مانند x^* دارد و به ازای هر $x \in X$، دنباله‌ی $\{f^n x\}$ به x^* همگرا است.

به دلیل کاربردهای متعددی که این قضیه پیدا کرد، بسیاری از محققین و ریاضیدانان به مطالعه در نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت متری روی آورده و تعمیمهایی از اصل انقباض باناخ را در فضاهای متریک ارائه دادند. در سال ۱۹۷۴، آچاریا[۳] [۶] اصل انقباض باناخ را به کمک پیرامون‌ها از فضاهای متریک به فضاهای یکنواخت تعمیم داد و پایه و بنیان نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت را در فضاهای یکنواخت بنا نهاد، گرچه قبل از او، در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰، تعداد معدودی از نویسندگان از جمله مَراوای کَسِس‌نُوِس[۴] [۴۶]، نیژکی[۵] [۵۲]، گئورگیو[۶] و روتارو[۷] [۲۸]

[۱] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

[۲] Stefan Banach (1892-1945)

[۳] Acharya

[۴] Maravall Casesnoves

[۵] Niczky

و ریِ[1] [۶۲] قضایایی از نقطه‌ی ثابت را در فضاهای یکنواخت اثبات کرده بودند. برای ارائه‌ی روند طی‌شده توسط آچاریا، به مفهوم اندازه‌ی[2] (پیمانه) یک فضای یکنواخت نیازمندیم.

قضیه ۲.۲.۱. ([۴۱]) هر یکنواختی $\mathcal{U}$ بر X توسط خانواده‌ی تمام شبه‌متریک‌هایی که روی $X \times X$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند تولید می‌شود.

فرض کنید X یک فضای یکنواخت و $\mathcal{F}$ خانواده‌ی (ناتهی) همه‌ی شبه‌مترهایی روی X است که بر $X \times X$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند. به ازای هر $\rho \in \mathcal{F}$ و هر عدد حقیقی مثبت r قرار دهید:

$$V(\rho, r) = \Big\{(x, y) \in X \times X : \ \rho(x, y) < r\Big\}.$$

در این صورت، بنابر قضیه‌ی ۲.۲.۱، خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌های به شکل $V(\rho, r)$ که $\rho \in \mathcal{F}$ و $r > 0$، یک زیرپایه برای یکنواختی $\mathcal{U}$ روی X است، یعنی،

$$\mathcal{V} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} V(\rho_i, r_i) : \ n \geq 1, \ \rho_i \in \mathcal{F}, \ r_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

یک پایه برای $\mathcal{U}$ می‌باشد. خانواده‌ی $\mathcal{F}$ را اندازه‌ی یکنواختی $\mathcal{U}$ می‌نامند.

در سال ۱۹۷۴، آچاریا [۶] نشان داد که لازم نیست تمامی شبه‌مترهایی روی X را که بر $X \times X$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند به کار گرفت، یعنی، حتی به کمک زیرمجموعه‌ای مناسب از $\mathcal{F}$ نیز می‌توان یکنواختی $\mathcal{U}$ را تولید کرد. برای بیان این قضیه ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۳.۲.۱ ([۴۱]). فرض کنید $\{U_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های $X \times X$ است به طوری که $U_0 = X \times X$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، U_n شامل قطر و $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$. در این صورت، تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ وجود دارد طوری که

الف) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$؛

[6] Gheorghiu

[7] Rotaru

[1] Ray

[2] gage

ب) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$U_n \subseteq \{(x,y) : d(x,y) < ۲^{-n}\} \subseteq U_{n-۱}.$$

به‌علاوه، اگر تمامی U_nها تقارنی باشند، آن‌گاه تابع d یک شبه‌متر بر X است.

قضیه ۴.۲.۱ ([۶]). هر یکنواختی روی مجموعه‌ی ناتهی X را می‌توان به کمک خانواده‌ای از شبه‌مترهای روی X تولید کرد که همه‌ی شبه‌مترها بر $X \times X$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{U}$ یک یکنواختی برای مجموعه‌ی X است. همچنین فرض کنید زیر خانواده‌ی $\mathcal{B}$ از $\mathcal{U}$ یک پایه برای $\mathcal{U}$ است که هر عنصر $\mathcal{B}$ تقارنی و هیچ یک از عناصر آن مجموعه‌ی $X \times X$ نیست. به ازای هر $V \in \mathcal{B}$ دنباله‌ی $\{U_n^{(V)}\}_{n=۰}^{\infty}$ از اعضای متقارن $\mathcal{U}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$U_{n+۱}^{(V)} \circ U_{n+۱}^{(V)} \circ U_{n+۱}^{(V)} \subseteq U_n^{(V)},$$

که در آن $U_۰^{(V)} = X \times X$ و $U_۱^{(V)} = V$. با استفاده از لم ۳.۲.۱، شبه‌متر d_V روی X وجود دارد به طوری که

$$U_n^{(V)} \subseteq \{(x,y) : d_V(x,y) < ۲^{-n+۲}\} \subseteq U_{n-۱}^{(V)}. \tag{۱.۲.۱}$$

فرض کنید $\mathcal{P} = \{d_V \,:\, V \in \mathcal{B}\}$. یکنواختی تولید شده توسط خانواده $\mathcal{P}$ از شبه‌مترهای روی X را با $\mathcal{V}$ نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم:

$$W_{(V,r)} = \{(x,y) :\; d_V(x,y) < r\}.$$

فرض کنید U یک پیرامون دلخواه است. در این صورت $V \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $V \subseteq U$. از رابطه‌ی (۱.۲.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$W_{(V,۱)} \subseteq U_۱^{(V)} = V.$$

بنابراین $W_{(V,۱)} \subseteq U$، یعنی، $U \in \mathcal{V}$، پس $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

حال فرض کنید $W \in \mathcal{V}$. در این صورت اعضای $V_۱$، $V_۲$، $\cdots$، V_m در $\mathcal{B}$ و $r_i > ۰$ ، $i = ۱,۲,\cdots,m$