بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار ریاضی

معیارهایی برای تبادل‌ناپذیری بر اساس توابع مفصل

استاد راهنما: دکتر علی دولتی

استاد مشاور: دکتر حجت‌الله ذاکرزاده

پژوهش و نگارش: اعظم دهقانی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم.

و برادرم مهدی، که مرا بر این داشت که بیاموزم.

و آنان که مرا آموختن، آموختند.

اول سپاس از آن خداست، که بهانه ی بودن و ماندنم داد.

و پس از او ارج می نهم دو گوهر یکدانه هستی ام، پدر و مادر را.

و سپاسگزارم از

استاد راهنمای گرانقدرم، دکتر علی دولتی که بسیار مرا راهنمایی نمودند.

استاد مشاور بزرگوارم، دکتر حجت الله ذاکرزاده از آن رو که یاری، بی دریغ داشتند.

و دیگر اساتید گرانمایه، دکتر حمزه ترابی، دکتر عیسی محمودی و دکتر محسن میرحسینی که از آن ها بسیار آموختم.

و دکتر سید محمد مشتاقیون که داوری این پایان نامه را پذیرفتند و با راهنمایی های ارزنده خود دقت ریاضی پایان نامه را ارتقا بخشیدند.

و برادرم مهدی، که یاری ام نمود در به انجام رسیدن این پایان نامه.

و دوستان عزیزم فریبا آسایش، فاطمه باقری، فاطمه سخایی، نرگس منظری و دیگر دوستان که از آن ها تلاش را وام گرفتم.

چکیده

مفهوم تقارن برای متغیرهای تصادفی یک بعدی، تعمیم‌های متعددی در حالت دو بعدی دارد. دو مفهوم عمده تقارن دو بعدی، تبادل‌پذیری و تقارن شعاعی است. موضوع آزمون کردن این گونه از تقارن‌ها، به طور گسترده‌ای در آمار مطالعه شده است. اما به این مسئله که چگونه متغیرهای تصادفی هم توزیع می‌توانند تبادل ناپذیر باشند و یا متغیرهای تصادفی متقارن یک بعدی می‌توانند نامتقارن شعاعی باشند، کمتر توجه شده است. در این پایان‌نامه با استفاده از یک راهبرد اصل موضوعی، معیارهایی برای اندازه‌گیری میزان تبادل ناپذیری و عدم تقارن شعاعی بر اساس توابع مفصل معرفی و مطالعه می‌شوند. همچنین بردارهای تصادفی که بیشترین مقدار ممکن این معیارها را به خود اختصاص می‌دهند مشخص می‌گردند. در پایان برآوردگرهایی برای برخی از این معیارها معرفی خواهد شد.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

نمادها

$\min(x,y)$	$x \wedge y$
$\max(x,y)$	$x \vee y$
$\max(x,۰)$	x^{+}
مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$	$\bar{\mathbb{R}}$
بازه‌ی $[۰,۱]$	I
مربع یکه‌ی $[۰,۱]\times[۰,۱]$	$I^{۲}, [۰,۱]^{۲}$
برد تابع F	$RangF$
تابع نشانگر	$\mathbb{I}_A$
معکوس f	$f^{-۱}$
شبه معکوس f	$f^{[-۱]}$
ترانهاده‌ی f	f^{T}
بردار مشتقات جزئی f	∇f
فضای سوبولف	$W^{۱,p}$
ضرب داخلی	$\prec .,. \succ$
نرم L_p	$\|.\|_p$
نرم سوبولف	$\|.\|_{۱,p}$
نرم تعدیل شده‌ی سوبولف	$\|.\|_s$
کلاس توابع مفصل	$\mathfrak{C}$
قطر $\mathfrak{C}$	$Diam(\mathfrak{C})$

اندازه (حجم) $\mathcal{S}$ تحت C	$V_C(\mathcal{S})$
تابع مفصل X و Y	$C_{X,Y}$
کران پایین فرشیت - هافدینگ	W
کران بالای فرشیت - هافدینگ	M
تابع مفصل ضربی	Π
همگرایی یکنواخت	$f_n \xrightarrow{u} f$
همگرایی در احتمال	$X_n \xrightarrow{P} X$
همگرایی در توزیع	$X_n \xrightarrow{d} X$
هم‌توزیعی	$\overset{d}{=}$
کواریانس X و Y	$Cov(X,Y)$
واریانس X	$Var(X)$
توزیع تجربی H	H_n
تابع مفصل تجربی C	C_n

مقدمه

مفهوم تقارن، به معنی تعادل، متناسب بودن و هماهنگی جزئیات یک ساختار، همواره به عنوان یک عنصر پایه‌ای در ساختارهای هندسی، از دوران باستان مورد توجه انسان بوده است. هرمان وایل[۱] [۶۶] درکتاب خود مفهوم تقارن را از فلسفه و هنر گرفته تا متافیزیک و ریاضیات مدرن مورد مطالعه قرار داده است. آن‌چه که مسلم است مفهوم تقارن در علوم گوناگون، تعاریف مختلفی دارد. در آمار و احتمال نیز تقارن به عنوان یک مفهوم پایه‌ای همواره مورد توجه بوده است.

متغیر تصادفی X را حول صفر متقارن می‌گوییم، اگر توزیع احتمالی X و $-X$ یکسان باشد. بسیاری از توزیع‌های یک متغیره ازجمله توزیع نرمال که درکانون بحث‌های آماری قرار دارد، دارای این ویژگی هستند. در ارتباط با مفهوم تقارن همواره دو مسئله مورد توجه بوده است: نخست اندازه‌گیری میزان عدم تقارن با استفاده از معیارهایی مناسب و دیگری معرفی آزمون‌هایی که با آن بتوان متقارن بودن داده‌های جمع آوری‌شده را بررسی نمود. این موضوع از این جهت دارای اهمیت است که با اطلاع از متقارن بودن توزیع احتمالی‌ای که داده‌ها از آن پیروی می‌کنند، کار برازش یک مدل مناسب آسان‌تر می‌شود. درحالت یک‌متغیره مسئله‌ی تقارن به‌طور گسترده‌ای مطالعه شده است و معیارها و آزمون‌های پارامتری و ناپارامتری متعددی برای آن معرفی شده است، که از آن جمله می‌توان به مراجع [۴، ۸، ۱۴، ۱۶، ۲۶، ۳۳، ۴۲، ۴۰، ۵۵، ۶۲] اشاره کرد. برای متغیرهای تصادفی‌ای که روی نیمه‌ی مثبت خط اعداد حقیقی تعریف می‌شوند، نیز اخیراً مفهوم تقارن وارون در [۴۵] مورد مطالعه قرارگرفته است. این نوع تقارن برخلاف تقارن حول یک نقطه (که براساس هم‌توزیعی تعریف می‌شود)، تعریفی براساس تابع چگالی دارد. برای مطالعه‌ی این ارتباط بین تعریف‌های مختلف تقارن متغیرهای تصادفی مثبت می‌توان به مرجع [۳۷] مراجعه نمود.

در حالت دومتغیره و در حالت کلی چند متغیره، نیز برای تقارن تعریف‌های مختلفی ارائه شده

[۱] Herman Weyl

است. برخی از این تعریف‌ها را می‌توان در [۲] و [۴۶] دید. طبیعی‌ترین تعریف تقارن برای یک بردار تصادفی دوبعدی مفهوم تبادل‌پذیری است که با هم‌توزیعی دو بردار (X,Y) و (Y,X) تعریف می‌شود. این مفهوم توسط برونو دفنیتی[۲] [۲۹] در سال ۱۹۳۰ ارائه و از آن به بعد کاربردهای زیادی از جمله در مطالعه‌ی توزیع‌های حدی، آمار بیز و فرآیندهای تصادفی پیدا نمود.

مطالعه‌ی جامعی در مورد ویژگی‌ها و کاربردهای متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر در [۲۹] صورت گرفته است. در بسیاری از آزمایش‌هایی که با مشاهداتی از جفت‌های جورشده مانند متغیرهای مربوط به دو چشم، کلیه‌ها و دوقلوها روبرو هستیم، بحث تبادل‌پذیری مطرح می‌شود. در مورد تبادل‌پذیری که بسیاری از پژوهشگران به آن تقارن دو متغیری نیز می‌گویند، آزمون‌های زیادی معرفی شده است. از جمله می‌توان به مراجع [۸، ۱۰، ۲۷، ۳۴، ۴۴، ۶۲، ۶۷] اشاره نمود.

متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر لزوماً هم‌توزیع هستند، اما هم‌توزیعی متغیرهای تصادفی در حالتی که مستقل نیستند تبادل‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد. راجر نلسون[۳] [۴۸] با در نظر گرفتن این موضوع، ایده‌ی اندازه‌گیری میزان تبادل‌ناپذیری متغیرهای تصادفی هم‌توزیع را مطرح نمود. ایده‌ی نلسون، نظر بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب نمود و اخیراً مقالات زیادی در این زمینه نوشته شده است که از آن جمله می‌توان به مراجع [۵، ۲۳، ۲۵، ۳۸، ۵۹] اشاره کرد. دورانته[۴] و دیگران [۲۳] اصولی را که یک معیار اندازه‌گیری تبادل‌ناپذیری باید داشته باشد، تعریف نمودند. نکته‌ای کلیدی که نلسون در فرمول‌بندی خود از تبادل‌پذیری از آن بهره برده، این است که برای متغیرهای تصادفی هم‌توزیع، تبادل‌پذیری معادل با تقارن تابع مفصل متناظر با متغیرهاست.

مفهوم تقارن در حالت دوبعدی، همان‌گونه که اشاره شد به تبادل‌پذیری ختم نمی‌شود. نلسون [۴۶] تعریف‌های دیگری را که می‌توان برای تقارن یک بردار تصادفی بیان کرد، مورد بررسی قرار داده و استدلال می‌کند که در حالت دو متغیره، تقارن شعاعی تعمیم مناسبی برای تقارن حول یک نقطه است. این تقارن به صورت هم‌توزیعی (X,Y) با $(-X,-Y)$ تعریف می‌شود. این تعریف به‌سادگی برای یک بردار p بعدی از متغیرهای تصادفی قابل تعمیم است. برای این نوع از تقارن نیز آزمون‌هایی معرفی شده است که از جمله می‌توان به [۳، ۳۱، ۳۲، ۴۳، ۵۱، ۵۲] اشاره کرد. مانند تبادل‌پذیری، تاکنون معیاری برای اندازه‌گیری عدم تقارن شعاعی در مجموعه‌ای از داده‌ها ارائه نشده است. نلسون

---

[۲] Borono De Finetti

[۳] Roger B. Nelsen

[۴] Durante