بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بررسی قضیه همپیوستگی و اصل‌کرانداری یکنواخت برای نگاشت های نیم‌خطی

استاد راهنما

دکتر محمدرضا مطلبی

استاد مشاور

دکتر داریوش لطیفی

پژوهشگر

سید غلامرضا مدنی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضامطلبی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر داریوش لطیفی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیدغلامرضامدنی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: مدنی نام: سیدغلامرضا

عنوان پایان‌نامه:
بررسی قضیه همپیوستگی واصل کرانداری یکنواخت برای نگاشت های نیم‌خطی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا مطلبی
استاد مشاور: دکتر داریوش لطیفی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۰۶/۲۰ تعداد صفحه: ۸۲

کلیدواژه‌ها: نگاشت نیم‌خطی، توپولوژی ضعیف، همپیوستگی، فضای برداری توپولوژیک مرتب شده

چکیده

در این پایان نامه مفهوم نگاشت نیم خطی و نیم خطی ضعیف بین دو فضای برداری توپولوژیک X و Y را تعریف نموده و ارتباط بین نگاشت های نیم خطی و نیم خطی ضعیف را بررسی می کنیم ، در واقع مجموعه نگاشت های نیم خطی بین فضاهای برداری توپولوژیک توسیعی مهم از مجموعه عملگرهای خطی می باشد. قضیه همپیوستگی و اصل کرانداری یکنواخت را با لحاظ کردن نگاشت های نیم خطی بیان و ثابت می کنیم . در ادامه، اصل کرانداری یکنواخت برای رده جدیدی از گردایه نگاشتها از فضای برداری توپولوژیک به فضای برداری توپولوژیک مرتب شده بررسی می شود.

فهرست مطالب

مقدمه

قضیه اصل کرانداری یکنواخت یا قضیه باناخ -اشتاین هاوس یکی از قضایای اصلی آنالیز تابعی می باشد. این قضیه اولین بار در سال ۱۹۲۷ توسط استیفان باناخ [۱] و هاکو اشتاین هاوس [۲] در مرجع [3] اثبات شد. امروز ما می توانیم صورتهای مختلفی از آن را در مراجع [2]، [4] ، [18]، [23]، و [27] در زمینه های مختلف ریاضی پیدا کنیم.

مفهوم نگاشت های نیم خطی اولین بار در سال ۲۰۰۹ توسط رانگلو [۳] ، شوهای [۴] و لینسونگ [۵] در مرجع [13] تعریف شد. در واقع، نگاشت های نیم خطی توسیعی از نگاشت های خطی بوده و تعاریف و قضایای مربوط به نگاشت های خطی برای نگاشت های نیم خطی و نیم خطی ضعیف نیز می تواند برقرار باشد. بطوریکه توسیع قضایای موجود برای توابع خطی در نگاشتهای نیم خطی جالب و پیچیده می باشد.

در این پایان نامه که عمدتاً مطالب آن از مراجع [13] و [31] می باشد هدف بررسی قضیه همپیوستگی و اصل کراندار یکنواخت و قضیه باناخ اشتاین هاوس برای نگاشت های نیم خطی می باشد، در مرجع [11] با استفاده از تعریف نگاشت های نیم خطی ، دوگان نیم خطی تعریف می شود بطوریکه دوگان نیم خطی توسیعی از دوگان معمولی می باشد و همچنین توپولوژی ضعیف * و فشرده ضعیف * و به طور نسبی فشرده ضعیف * برای زوج دوگان نیم خطی تعریف می شود و با استفاده از این تعاریف قضایای آلاغلو- بور باکی [۶] و باناخ-آلاغلو اثبات می‌شود.

[۱] Stefan Banach
[۲] Huago Steinhause
[۳] Ronglu
[۴] Shuhui
[۵] Linsong
[۶] Alaoglu-Bourbaki

همچنین تحقیق اولیه روی نگاشتهای UB اولین بار در سال ۲۰۱۱ توسط رانگلو و شوهای در مرجع [31] صورت گرفت. بطوریکه نگاشت های نیم خطی حالت خاصی از نگاشت های می باشد.

کلمه $cone$ که در زبان فارسی به مخروط ترجمه می شود. همان فضای برداری است که ضرایب عددی به کار رفته درآن اعداد حقیقی نامنفی (اسکالرهای نامنفی) می باشند. بنابر این هر فضای برداری یک مخروط است اما نمی توان گفت که مخروط حتماً یک فضای برداری است زیرا قرینه جمعی هر عضو مخروط همواره در آن قرار ندارد یعنی عمل حذف همیشه امکان پذیر نیست لذا این اساسی ترین فرق بین مخروط و فضای برداری توپولوژیک است. مخروط ها توسیع فضاهای برداری هستند لذا هر نتیجه به دست آمده در مخروط ها در فضای برداری توپولوژیک نیز برقرار است. در مرجع [31] اصل کرانداری یکنواخت از یک فضای برداری توپولوژیک به فضای برداری توپولوژیک مرتب شده با گوی ترتیبی e وهمچنین مخروط مثبت با درون غیر خالی اثبات می شود.

فصل اول شامل تعاریف، قضایا و مجموعه مثال هایی می باشد که در ادامه از آنها استفاده می شود.

در فصل دوم نگاشت های نیم خطی و زیر خانواده نگاشتهای نیم خطی را در $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ تعریف کرده و نشان می دهیم مجموعه نگاشت های خطی زیر مجموعه ای از زیر خانواده نگاشتهای نیم خطی و نگاشت های خطی می باشد و در ادامه قضایای مربوط به آن را اثبات خواهیم کرد. همچنین نگاشت های نیم خطی و نیم خطی ضعیف را از یک فضای برداری توپولوژیک به فضای برداری توپولوژیک تعریف کرده و نشان می دهیم نگاشت های نیم خطی زیر مجموعه محض نگاشت های نیم خطی ضعیف است و هر عملگر خطی T تعداد زیادی از توابع غیر خطی در خانواده نگاشت های نیم خطی تولید می کند.

در فصل سوم قضیه همپیوستگی و اصل کرانداری یکنواخت و قضیه باناخ اشتاین هاوس را برای نگاشت های نیم خطی و نیم خطی ضعیف اثبات خواهیم کرد. همچنین نشان می دهیم

هرگاه f پیوسته بوده و به گردایه نگاشت های نیم خطی متعلق باشد، آنگاه کراندار است. ولی عکس آن در صورتی که فضا متر پذیر باشد برقرار است.

در فصل چهارم نگاشتهای UB را معرفی کرده و نشان می دهیم تعداد بی شمار نگاشت UB وجود دارد بطوریکه غیر خطی می باشند. همچنین فضای برداری توپولوژیک مرتب شده و گردایه کراندار ترتیبی نقطه به نقطه و گردایه به طور یکنواخت کراندار ترتیبی را تعریف نموده و در نهایت قضیه اصل کرانداری یکنواخت را برای فضای برداری توپولوژیک مرتب شده با گوی ترتیبی e و مخروط مثبت با درون غیر خالی اثبات خواهیم کرد.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۰.۱. مجموعه A را **شمارا** گویند درصورتی که با $\mathbb{N}$ همعدد باشد. هر مجموعه نامتناهی را که شمارا نباشد **ناشمارا** گویند. هرگاه مجموعه‌ای متناهی یا شمارا باشد منتها شمارا گفته می شود.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید A زیر مجموعه $\mathbb{R}$ بوده و از بالا کراندار باشد عدد حقیقی α را سوپریمم A می‌نامند در صورتی که در خواص زیر صدق کند

۱) α یک کران بالا برای مجموعه A باشد،

۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$، $x \in A$ وجود داشته باشدبطوریکه $\alpha - \varepsilon < x$.

سوپریمم مجموعه A را در صورت وجود با $\sup A$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید A زیر مجموعه $\mathbb{R}$ بوده و از پایین کراندار باشد عدد حقیقی β را اینفیموم A می‌نامند در صورتی که در خواص زیر صدق کند

۱) β یک کران پایین برای مجموعه A باشد،

۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$، $x \in A$ وجود داشته باشدبطوریکه $x < \beta + \varepsilon$.

اینفیموم مجموعه A را در صورت وجود با $\inf A$ نشان می‌دهند.

اصل ۴.۰.۱. ***اصل موضوع تمامیت***

هر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالا ست.

گزاره ۱.۰.۵. $M = \sup A$ اگر و تنها اگر

a) M یک کران بالای A باشد.

b) دنباله $\{x_n\}$ در A وجود داشته باشد بطوریکه $\lim_{n\to+\infty} x_n = M$.

اثبات. رجوع شود به [21, 1.1]. □

قضیه ۱.۰.۶. **(مقدار میانی)** *فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر زیر مجموعه همبند A از فضای متری X باشد. در این صورت اگر نقاط $\alpha, \beta \in A$ وجود داشته باشند بطوریکه $f(\alpha) \neq f(\beta)$ آنگاه به ازای هر عدد حقیقی c بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$، عضوی مانند $x \in A$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = c$.*

اثبات. رجوع شود به [21, 5.1]. □

نتیجه ۱.۰.۷. *فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته بوده و $f(a) < c < f(b)$. در این صورت عددی مانند $x \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = c$.*

اثبات. رجوع شود به [21, 5.1]. □

قضیه ۱.۰.۸. **(مقدار میانگین)** *فرض کنید f در بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

اثبات. رجوع شود به [21, 5.1]. □

قضیه ۱.۰.۹. *هرگاه $\{p_n\}$ دنباله ای در فضای متری فشرده X باشد، آنگاه*

الف) زیر دنباله ای از $\{p_n\}$ به نقطه ای از X همگرا می باشد،

ب) هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}^n$ شامل زیر دنباله ای همگرا می باشد.

اثبات. رجوع شود به [21, 3.2]. □

تعریف ۱.۰.۰.۱۰. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر مجموعه A باشد دنباله $\{f_n\}$ را بر A نقطه به نقطه کراندار گویند هرگاه به ازای هر $x \in A$ دنباله $\{f_n(x)\}$ کراندار باشد؛ به عبارت دیگر تابعی با مقادیر متناهی مانند ϕ بر A تعریف شود بطوریکه

$$|f_n(x)| < \phi(x), \qquad (x \in E, n = ۱, ۲, ۳, ...).$$

دنباله $\{f_n\}$ را بر A به طور یکنواخت کراندار گویند هرگاه عددی مانند M وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f_n(x)| < M, \qquad (x \in E, n = ۱, ۲, ۳, ...).$$

۱.۱ فضای برداری توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه X را یک فضای برداری بر میدان $\Bbbk$ گویند، هرگاه X دارای دو عمل جمع و ضرب اسکالر بوده، $(X, +)$ یک گروه آبلی باشد و عمل ضرب اسکالر نیز دارای خواص زیر باشد

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $۱x = x$،

۲) به ازای هر $\beta \in \Bbbk$ و α و هر $x \in X$، $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$،

۳) به ازای هر $\beta \in \Bbbk$ و α و هر $x, y \in X$، $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ و $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

هرگاه X یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{K}$ بوده و $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$، آنگاه X را به ترتیب، فضای برداری حقیقی یامختلط گویند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید XوY فضاهای برداری باشند. در این صورت نگاشت $T : X \to Y$ را عملگر خطی گویند هرگاه $x, x_۱, x_۲ \in X$ و به ازای هر اسکالر $\alpha \in \Bbbk$ داشته باشیم

(الف) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$،

(ب) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $A \subset X$. A رامحدب گویند هرگاه به ازای هر اسکالر t با شرط $0 \leq t \leq 1$ و $s + t = 1$ داشته باشیم

$$sA + tA \subset A.$$

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه A را متوازن گویند هرگاه به ازای هر اسکالر t با شرط $|t| \leq 1$ داشته باشیم

$$tA \subset A.$$

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه A را جاذب گویند هرگاه به ازای هر $x \in A$ اسکالر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر اسکالر t با شرط $|t| < \varepsilon$ داشته باشیم $tx \in A$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $A \subset X$. A را مطلقاً محدب گویند هرگاه متوازن و محدب باشد؛ به عبارت دیگر به ازای هر $s, t \in \mathbb{K}$ با شرط $|s| + |t| \leq 1$ داشته باشیم

$$sA + tA \subset A.$$

مثالهایی از فضای برداری خطی و عملگر خطی

فرض کنید X فضای برداری بوده و τ توپولوژی بر X باشد. در این صورت

۱. مجموعه s^* مجموعه دنباله هایی با تکیه‌گاه متناهی می باشد؛ یعنی دنباله هایی که تمام جملات آنها مگر تعداد متناهی صفر می باشند؛ به عبارت دیگر یک دنباله مانند $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ در s^* است اگروفقطاگر عددی مانند $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $i > N$، $a_i = 0$. این مجموعه یک فضای خطی نسبت به جمع دنباله‌ها و ضرب اعداد حقیقی(مختلط) تشکیل می‌دهد.

۲. مجموعه c_0 از تمام دنباله‌های همگرا به‌صفر تشکیل می شود.

۳. مجموعه c از تمام دنباله‌های همگرا تشکیل می شود.

۴. مجموعه l_∞ از تمام دنباله‌های کراندار تشکیل می شود.

۵. مجموعه s از تمام دنباله‌ها تشکیل می شود.

تمام مجموعه‌های فوق فضای‌برداری تشکیل می‌دهند و به صورت زیر در ارتباطند

$$s^* \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l_\infty \subseteq s.$$

۱. مجموعه ماتریس های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی یک‌عملگر خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ می باشد؛ یعنی

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \quad \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

۲. ماتریس نامتناهی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

هرگاه T بر $l^2 = l^2(\mathbb{N})$ به صورت زیر تعریف شود

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots),$$

آنگاه T عملگر خطی است.

۳. هرگاه $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ با ضابطه

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 0)$$

تعریف شود، آنگاه T عملگر خطی است.

۴. هرگاه $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$Tf = \int_{0}^{1} f(t)dt$$

تعریف شود، آنگاه T عملگر خطی می باشد.

توپولوژی

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ راشبه‌متریک گویند هرگاه دارای خواص زیر باشد

(۱) $d(x,y) \geq 0$،

(۲) به ازای هر $x \in X$، $d(x,x) = 0$،

(۳) $d(x,y) = d(y,x)$،

(۴) به ازای هر $x,y,z \in X$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$،

هرگاه در تعریف فوق از $d(x,y) = 0$ نتیجه شود $x = y$، آنگاه آنرا متریک گویند.

تعریف ۸.۱.۱. منظور از یک **توپولوژی** بر مجموعه X گردایه ای مانند τ از زیر مجموعه های X می باشد بطوریکه در خواص زیر صدق می کند

۱) $X \in \tau$ و $\emptyset$ ،

۲) هرگاه به ازای هر $i = 1, 2, 3, ..., n$ ، $V_i \in \tau$، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$،

۳) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه ای دلخواه از اعضای τ باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

مجموعه X را که در آن یک توپولوژی مانند τ تعریف شده باشد **فضای توپولوژیک** می نامند و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X گویند و فضای توپولوژیک را با زوج (X, τ) نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X مجموعه غیر خالی باشد. در این صورت توپولوژی τ را بر X **توپولوژی بسته-متناهی** یا **توپولوژی هم‌متناهی** گویند هرگاه زیر مجموعه های بسته X شامل X و همه زیرمجموعه های متناهی باشد؛ به عبارت دیگر مجموعه های باز عبارتند از $\emptyset$ و تمام زیر مجموعه های X که متمم آنها متناهی می باشد.

تور

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه **مرتب‌شده**، عبارت است ازمجموعه غیر تهی I با رابطه $\preceq$ بطوریکه در خواص زیر صدق می کند

۱) به‌ازای‌هر $\alpha \in I$، $\alpha \preceq \alpha$ ،

۲) هرگاه $\alpha \preceq \beta$ و $\beta \preceq \gamma$ آنگاه $\alpha \preceq \gamma$،

۳) به‌ازای‌هر $\alpha, \beta \in I$ عضو $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ وجودداشته‌باشدبطوریکه $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}, \quad \beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

تعریف ۱۱.۱.۱. منظور از **تور** در فضای توپولوژیکی (X, τ)، تابعی مانند

$$f : I \to X, \quad f(\alpha) = x_\alpha$$

می باشد که در آن I، یک مجموعه مرتب شده می باشد تور را با $\{x_\alpha\}$ نشان می‌دهند مجموعه I، **مجموعه اندیس‌گذار** تور نامیده می‌شود. به عنوان مثال هر دنباله یک تور است.

گزاره ۱۲.۱.۱. *فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ یک تور در مجموعه X باشد. در این صورت*

الف) *هر تور $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ زیر تور خودش می باشد،*

ب) *هر زیر تور از $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ یک تور در X می باشد،*

پ) *هر زیر تور از زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ زیر توری از $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ می باشد،*

ج) *هرگاه X فضای برداری توپولوژیک بوده و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به عضوی از X مانند x همگرا باشد، آنگاه هر زیر تور از $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به x همگرا می باشد،*

د) *هرگاه X فضای برداری توپولوژیک بوده وعضوی مانند x از X وجود داشته باشد بطوریکه هر زیر تور از $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ زیر تور همگرا به x داشته باشد، آنگاه $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به x همگرا می باشد.*

اثبات. رجوع شود به [16, 2.1]. □

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید (X, d) فضای متری باشد . در این صورت

۱. مجموعه $A \subset X$ را در M چگال گویند هرگاه $\overline{A} = M$،

۲. مجموعه $A \subset X$ را هیچ جا چگال گویند هرگاه $(\overline{A})^\circ = \emptyset$،

۳. مجموعه $E \subset X$ را از رسته اول گویند هرگاه اجتماع شمارا از مجموعه های هیچ جا چگال باشد،

۴. هرگاه یک مجموعه از رسته اول نباشد گویند از رسته دوم است.

قضیه ۱۴.۱.۱. **(بئر)** *هرگاه X فضای متری تام باشد، آنگاه اشتراک هر گردایه شمارش‌پذیر از زیر مجموعه های باز چگال X در X چگال است.*

اثبات. رجوع شود به [20, 5.2]. □

نتیجه ۱۵.۱.۱. *هرگاه X فضای متری تام باشد، آنگاه از رسته دوم است.*

اثبات. رجوع شود به [20, 5.2]. □

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضای توپولوژیک بوده و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت f در $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X، از $x_\alpha \to x$ نتیجه‌شود $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

اثبات. رجوع شود به [28, 1.6]. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنید X مجموعه بوده و F گردایه ای از توابع $f : X \longrightarrow Y_f$ بطوریکه به ازای هر f، Y_f فضای توپولوژیک باشد. در این صورت توپولوژی منحصر به فردی بر X وجود دارد آنرا wF (توپولوژی‌ضعیف‌برای F) گویند بطوریکه به ازای هر تور x_α در X، $x_\alpha \to x$ بر (X, wF) اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in F$، $f(x_\alpha) \to f(x)$ بر Y_f. و همچنین به ازای هر فضای توپولوژیک Z نگاشت $g : Z \to (X, wF)$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in F$، fog پیوسته باشد.*

اثبات. رجوع شود به [28, 1.6]. □

مثال هایی از فضای توپولوژیک

۱. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و

$$\tau_۱ = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}\{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

در این صورت $\tau_۱$ توپولوژی بر X می باشد.

۲. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\tau_۲ = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}\{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$ در این صورت $\tau_۲$ توپولوژی بر X نمی باشد؛ زیرا $\{c, d\} \cup \{a, c, e\} \notin \tau_۲$.

۳. هرگاه $\mathbb{N}$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه مجموعه های $\{۱\}$، $\{۵, ۶, ۷\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ متناهی بوده لذا در توپولوژی بسته -متناهی بسته می باشند، بنابر این متمم آنها

$$\{۲, ۳, ...\}, \{۱, ۲, ۳, ۴, ۸, ۹, ...\}, \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ...\}$$

درتوپولوژی بسته- متناهی مجموعه های باز می باشند. از طرف دیگرمجموعه اعدادصحیح مثبت زوج بسته نمی باشد چون متناهی نیست در نتیجه متمم آن(مجموعه اعدادصحیح مثبت فرد)در توپولوژی بسته- متناهی باز نمی باشد.

پارانرم

تعریف ۱.۱.۱۸. مفهوم پارانرم تعمیمی از قدر مطلق است که آنرا با نماد $\|x\|$ نشان می‌دهند و به ازای هر عضو x درفضای‌برداری X عدد حقیقی می باشد. و به ازای هر $x, y \in X$ در خواص زیر صدق می‌کند

۱) $\|0\| = 0$،

۲) $\|x\| \geq 0$،

۳) $\|-x\| = \|x\|$،

۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۵) هرگاه $\{t_n\}$ دنباله‌ای از اسکالرها با شرط $t_n \to t$ و $\{x_n\} \subset X$ با شرط $\|x_n - x\| \to 0$، آنگاه $\|t_n x_n - tx\| \to 0$.

پارانرم را کلی گویند هرگاه علاوه بر خواص گفته شده داشته باشیم

۶) هرگاه $\|x\| = 0$، آنگاه $x = 0$.

مثال ۱.۱.۱۹. *فرض کنید P پارانرم باشد. در این صورت*

$$\|x\| = p(x)/[1 + p(x)]$$

پارانرم می باشد. برای مثال

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= p(x+y)/[1 + p(x+y)] \\
&\leq p(x) + p(y)/[1 + p(x) + p(y)] \\
&\leq p(x)/[1 + p(x)] + p(y)/[1 + p(y)] \\
&= \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$