[ExternalLocation،BoldFont=lmroman۱۰-bold،BoldItalicFont=lmroman۱۰-bolditalic،ItalicFont=lmroman۱۰-italic]lmroman۱۰-regular

$\prod fasl$۱

دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت

استاد راهنما

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

پژوهشگر

فهیمه امیری دلوئی

شهریور ۹۰

نام خانوادگی دانشجو: امیری دلوئی   نام: فهیمه

عنوان: ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت

استاد راهنما: دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور: دکتر مسعود امان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بیرجند   دانشگاه بیرجند

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۹۰   تعداد صفحات: ۸۲

واژگان کلیدی: مقدار ویژه، ماتریس متقارن، MC-ماتریس، MC'-ماتریس

چکیده

-abstract

هوالطیف

امروز من مدیون عشق خداست

که آفریدم

و حیاتم داد.

وامروز من

مدیون نگاه های پر محبت و سرشار از مهر و لطف بزرگانی است

که برخی چراغ های راهنمای زندگی ام شدند

که برخی موجب افتخار و عزت امروزم شدند

که برخی در تمامی سال های زندگی ام پشتوانه و یارم بودند و هستند

این پایان نامه تقدیم به آنانی که امروزم مدیون تابش پرتو پر نور عشق آن ها بر زندگی ام است

تقدیم به بهترین موهبت های خداوند در زندگیم

پدر و مادر عزیزم

و تقدیم به برادرانم

که درخشش نگاه پر امیدشان روشنی بخش راهم بود، بهترین ها را برایشان آرزو می کنم.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری

این آغاز راهی بی پایان است . . .

این پایان نامه بی شک، بدون الطاف پروردگار و کسانی که در این راه به اینجانب یاری رساندند، خلعت وجود نمی یافت. لذا در این جا بر خود لازم می دانم از ایشان قدردانی نمایم:

کمال سپاس تقدیم به محضر استاد محترم جناب آقای دکتر مهدی پناهی، راهنمای گران قدر که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از مشاور فرهیخته جناب آقای دکتر مسعود امان کمال امتنان را دارم.

قدردان دقت نظر و راهنمایی های مشفقانه ی داوران ارجمند آقایان دکتر اسدا... محمودزاده وزیری و دکتر محمّد خنجری صادق، هستم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسن حسن پور نماینده ی تحصیلات تکمیلی نیز متشکرم.

از خانم الهام حسین زاده به خاطر هم فکری و مساعدت صمیمانه شان سپاس بی دریغ دارم.

همچنین از آقای محسن کرمانی نژاد به خاطر پاسخ گویی به سؤالاتم در مورد LaTeX، سپاس گزارم.

از دوستان خوبم، خانم ها آذر محمدی و سحر مسگران که در مسیر تدوین این پایان نامه با کمک های بی شائبه خود مرا مدیون خویش نموده اند، سپاس گزاری می کنم.

پس از آن، بوسه می زنم بر دستان مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فهیمه امیری دلوئی

شهریور ۹۰

۱۱۱

جدول نمادها

مجموعه‌ی اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ .... $\mathbb{R}^{m\times n}$

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n .... $\mathbb{R}^{n\times n}$

مجموعه‌ی بردارهای n-تایی حقیقی .... $\mathbb{R}^n$

بردار سطری با مؤلفه‌های ۱، ۲، ...، k .... $\nu_k = (۱, ۲, \ldots, k)$

اثر ماتریس A .... $\mathrm{trace}(A)$

برد (یا فضای ستونی) ماتریس A .... $R(A)$

فضای پوچ ماتریس A .... $\mathcal{N}(A)$

رتبه‌ی ماتریس A .... $\mathrm{rank}(A)$

پوچی ماتریس A .... $\mathrm{nullity}(A)$

زیر ماتریس اصلی مرتبه‌ی k از A .... A_k

زیر ماتریس اصلی پیشرو مرتبه‌ی k از A .... $A[\nu_k]$

ترانهاده‌ی ماتریس A .... A^T

معکوس ماتریس A .... $A^{-۱}$

دترمینان ماتریس A .... $\det(A)$

ماتریس جایگشت .... P

ماتریس قطری .... $D = \mathrm{diag}(d_۱, d_۲, \ldots, d_n) = \mathrm{diag}(d_i)$

ماتریس واحد از مرتبه‌ی n .... I_n

ریشه‌ی kام ماتریس معین مثبت متقارن A .... $A^{\frac{۱}{k}}$

قسمت حقیقی مقدار ویژه‌ی $\lambda(A)$ .... $\mathrm{Re}\lambda(A)$

مرتبه‌ی تکرار جبری مقدار ویژه‌ی λ .... $\sigma(\lambda)$

مرتبه‌ی تکرار هندسی مقدار ویژه‌ی λ .... $\rho(\lambda)$

طیف ماتریس A .... $\sigma(A)$

شعاع طیفی ماتریس A .... $\rho(A)$

رده‌ی ماتریس‌های مثبت متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت .... $\mathscr{A}$

رده‌ی ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت .... $\mathscr{B}$

پایان برهان .... $\square$

فهرست مطالب

پیشگفتار

رده‌ی ماتریس‌های حقیقی متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت با $\mathscr{B}$ و رده‌ی ماتریس‌های مثبت متعلق به $\mathscr{B}$ با $\mathscr{A}$ نشان داده می‌شود. واضح است که، $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$. این دو رده از ماتریس‌ها نقش مهمی در شاخه‌های مختلف علوم از قبیل جبر خطی، تئوری ماتریس‌ها، آنالیز عددی و آمار دارند.
در این تحقیق ویژگی‌ها و مشخص‌سازی‌هایی برای قرار گرفتن یک ماتریس در $\mathscr{A}$ ارائه می‌شود. همچنین MC-ماتریس‌ها و MC'-ماتریس‌ها معرفی می‌شوند و برخی خصوصیات آن‌ها تجزیه و تحلیل می‌گردد. بعلاوه نشان داده می‌شود که رده‌ی MC-ماتریس‌های متقارن و رده‌ی MC'-ماتریس‌های متقارن هر دو زیر مجموعه‌ای از رده‌ی ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت می‌باشند. بیش از این، شرایط کافی برای این که یک ماتریس در $\mathscr{B}$ قرار گیرد، نتیجه می‌شود.
آنچه در این تحقیق خواهد آمد، به قرار زیر است:

در فصل اول، به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه که در روند تحقیق به کار گرفته شده است، پرداخته و توضیحاتی برای آشنایی بهتر با این مفاهیم ارائه می‌شود.

چندین خصوصیت از یک ماتریس متقارن مثبت با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت در فصل ۲، ارائه شده است. به ویژه یک شرط معادل برای قرار گرفتن A در $\mathscr{A}$ بدست می‌آید، به این معنی که یک ماتریس متقارن مثبت A متعلق به $\mathscr{A}$ است اگر و تنها اگر A دارای تجزیه‌ی LDL^T باشد، که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی واحد و $D = \mathrm{diag}(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ یک ماتریس قطری با اولین درایه‌ی قطری مثبت و سایر درایه‌های قطری منفی می‌باشد. همچنین شرایط خاص دیگری برای این که یک

ماتریس متقارن مثبت متعلق به $\mathscr{A}$ باشد، بیان می‌گردد.

M-ماتریس‌ها، که رابطه‌ی نزدیکی با ماتریس‌های نامنفی دارند، در فصل ۳ معرفی و برخی ویژگی‌های آن‌ها بیان می‌شود. این ماتریس‌ها کاربردهای زیادی در ریاضیات و اقتصاد دارند. در ادامه‌ی این فصل مشخص‌سازی‌هایی برای یک رده از ماتریس‌های نامنفرد،به نام C-ماتریس‌ها، به همراه برخی از خواص آن‌ها ارائه می‌گردد.

در فصل ۴، دو زیر مجموعه از رده‌ی ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت، MC-ماتریس‌ها و MC'-ماتریس‌ها، معرفی می‌شوند و برخی از ویژگی‌های آن‌ها تجزیه و تحلیل می‌گردد. همچنین نشان داده می‌شود که رده‌ی MC-ماتریس‌های متقارن و رده‌ی MC'-ماتریس‌های متقارن زیر مجموعه‌ای از رده‌ی ماتریس‌های متقارن با تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت می‌باشند.

تعدادی شرایط کافی دیگر برای این که یک ماتریس متقارن دارای تنها یک مقدار ویژه‌ی مثبت باشد، در فصل ۵ ارائه شده است.

فصل ۱

تعاریف و نتایج اولیه

در این فصل بعد از معرفی تعدادی از نمادها و بیان مقدمات و تعاریف اولیه، مفاهیم و قضایایی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه بیان می‌شود، سپس قضایا و نتایج مربوط به همنهشتی ارائه می‌گردد.

۱.۱ پیش نیازها

این بخش با معرفی برخی نمادها، ارائه‌ی تعاریف، لم‌ها و قضایای مرتبط با ماتریس‌ها که در فصول بعدی بر حسب نیاز مورد استفاده قرار خواهند گرفت، آغاز می‌شود.

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n را با $\mathbb{R}^{n\times n}$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای حقیقی n مؤلفه‌ای را با $\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری باشد. در این صورت:

۱. ترکیب خطی بردارهای x_1، x_2، ...، x_n متعلق به V برداری به صورت

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

است، که در آن c_1، c_2، ...، c_n اسکالرهای دلخواه هستند.

۲. اگر $S \subset V$، آن گاه مجموعه‌ی همه‌ی ترکیب‌های خطی بردارهای متعلق به S با $\mathrm{span}\{S\}$ نشان داده می‌شود.

۳. مجموعه‌ی $S \subset V$ مستقل خطی است، هرگاه بردار $x \in S$ متعلق به $\mathrm{span}\{S \setminus \{x\}\}$ نباشد، یعنی نتوان هیچ برداری از S را بر حسب ترکیب خطی از سایر بردارهای S نوشت. در غیر این صورت S وابسته خطی است.

۴. $S \subset V$ برای V یک پایه است، هرگاه S مستقل خطی و $\text{span}\{S\} = V$.

۵. اگر دو مجموعه‌ی متناهی $S_۱$ و $S_۲$ پایه‌های V باشند، آن گاه تعداد عناصر $S_۱$ و $S_۲$ یکسان است و این تعداد بُعد V نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت:

۱. ترانهاده‌ی x_i با x_i^T نمایش داده می‌شود.

۲. x_i را یکه گویند، هرگاه $x_i^T x_i = ۱$.

۳. $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ متعامد است، هرگاه

$$x_i^T x_j = ۰, \qquad i \neq j.$$

۴. فرض کنید $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ متعامد باشد. این مجموعه از بردارها یکا متعامد (متعامد یکه) نامیده می‌شوند، هرگاه

$$x_i^T x_i = ۱, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و k یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت:

۱. ترانهاده‌ی A را با A^T نشان داده و به صورت

$$A^T = (a_{ji}),$$

تعریف می‌شود.

۲. قدرمطلق A را با $|A|$ نشان داده و به صورت

$$|A| = (|a_{ij}|),$$

تعریف می‌شود.

۳. اگر $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ ($a_{ij} > b_{ij}$)، $i, j = ۱, ۲, \dots, n$، آن گاه $A \geqslant B$ ($A > B$) (تعاریف ۲ و ۳ برای بردارها نیز برقرار می‌باشند.).

۴. A مثبت (منفی، نامثبت، نامنفی) است، هرگاه همه‌ی درایه‌های آن مثبت (منفی، نامثبت، نامنفی) باشد و می‌نویسیم $A > \mathbf{0}$ ($A < \mathbf{0}$، $A \leqslant \mathbf{0}$، $A \geqslant \mathbf{0}$).

۵. A بالا مثلثی (پایین مثلثی) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $i > j$ ($j > i$)، $a_{ij} = ۰$.

۶. A متقارن نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = ۱, ۲, \dots, n.$$

۷. اثر A را با $\mathrm{trace}(A)$ نشان داده و به صورت

$$\mathrm{trace}(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn},$$

تعریف می‌شود.

۸. اگر ماتریسی مانند B موجود باشد به طوری که $AB = BA = I_n$، که I_n ماتریس همانی $n \times n$ است، آن‌گاه B را معکوس A گویند و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند.

۹. A قطر غالب[۱] (سطری) است، هرگاه برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$،

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

[۱] Diagonally Dominant

و اکیداً قطر غالب[۲] (سطری) نامیده می‌شود، هرگاه نامساوی فوق به صورت اکید برقرار باشد (تعریفی مشابه برای ماتریس‌های (اکیداً) قطر غالب ستونی نیز داریم).

۱۰. A متعامد است، هرگاه $A^TA = I$. به عبارت دیگر A متعامد است، هرگاه ستون‌های آن متعامد یکه باشند، یعنی

$$a_i^T a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} ۱, & i = j, \\ ۰, & i \neq j, \end{cases}$$

که در آن a_k، $k = ۱, ۲, \dots, n$، ستون kام A می‌باشد.

۱۱. ماتریسی که از حذف سطرها و ستون‌های یکسان از A بدست می‌آید، یک زیر ماتریس اصلی A نامیده می‌شود. فرض کنید ν_k بردار سطری $(۱, ۲, \dots, k)$ باشد، در این صورت

$$A[\nu_k] = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k۱} & a_{k۲} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

زیر ماتریس اصلی پیشرو مرتبه‌ی k از A است.

مثال ۴.۱.۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۷ & -۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۵ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۴ & -۲ \\ ۱ & -۲ & ۱ & -۴ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. زیر ماتریس‌های اصلی پیشرو مرتبه‌ی ۲ و مرتبه‌ی ۳ از A به ترتیب به صورت

[۲] Stricly Diagonally Dominant (SDD)

$$A[\nu_۲] = \begin{pmatrix} ۷ & -۳ \\ ۳ & -۵ \end{pmatrix}, \quad A[\nu_۳] = \begin{pmatrix} ۷ & -۳ & ۲ \\ ۳ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{pmatrix},$$

هستند. همچنین A قطر غالب و $A[\nu_۲]$ و $A[\nu_۳]$ اکیداً قطر غالب هستند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. برد A را با $R(A)$ و فضای پوچ A را با $\mathcal{N}(A)$ نمایش داده و به صورت

$$R(A) = \{\, b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax \text{ ،} x \in \mathbb{R}^n \text{ به ازای برداری مانند } \},$$

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = ۰\},$$

تعریف می‌شوند.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت زیر فضای به وجود آمده توسط سطرهای A، فضای سطری آن و زیر فضای به وجود آمده توسط ستون‌های A، فضای ستونی آن نامیده می‌شود. برد A همان فضای ستونی A می‌باشد. رتبه‌ی A بُعد فضای ستونی آن می‌باشد و با $\operatorname{rank}(A)$ نمایش داده می‌شود. همچنین بُعد $\mathcal{N}(A)$، پوچی A می‌باشد و با $\operatorname{nullity}(A)$ نمایش داده می‌شود. همچنین $\operatorname{nullity}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$ [۴].

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد است، هرگاه $\operatorname{rank}(A) = n$. در غیر این صورت منفرد می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی بدست می آید، ماتریس جایگشت[۳] نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون‌های) آن می‌شود. اگر P یک ماتریس جایگشت باشد، آن گاه $P^T P = I$.

[۳] Permutation Matrix