دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز تهران

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی(گرایش آنالیز عددی)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

روش شبکه‌های مرکب انطباقی سریع در حل معادلات دیفرانسیل جزیی خطی

فروزان ادب آور

استاد راهنما

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور

دکتر محمد حسن بیژن زاده

آذر ۱۳۸۹

اینجانب **فروزان ادب آور** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸٦** مقطع **کارشناسی ارشد** رشته **ریاضی کاربردی** گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

فروزان ادب آور

اینجانب **فروزان ادب آور** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸٦** مقطع **کارشناسی ارشد** رشته **ریاضی کاربردی** گواهی می نمایم چنانچه براساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

فروزان ادب آور

کلیه حقوق مادی مرتبط به نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

آذر ۱۳۸۹

تقدیم به

روح پدرم و دست‌های مهربان مادرم.

هر لطفی را سپاسی است...

عالی‌ترین سپاس‌ها تقدیم به ***خالق یکتا*** *که قدرت اندیشیدن به ما عطا فرمود.*

پس از حمد و سپاس خدای مهربان بر خود واجب می‌دانم که در برابر استاد گرانقدر و فرزانه ***آقای دکتر علی ذاکری*** *که در طی نگارش این پایان نامه مشوق و راهنمای من بوده‌اند سر تکریم و تواضع فرود آورم و از ایشان کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.*

و صمیمانه تشکر می‌کنم از:

- *استادان ارجمند* ***آقای دکتر محمدحسن بیژن‌زاده*** *که سمت استاد مشاور و* ***آقای دکتر عبدالساده نیسی*** *که با دقت نظر علمی زحمت داوری پایان نامه را به عهده داشته‌اند.*

- ***خانواده عزیز و مهربانم*** *به پاس حمایت‌های بی‌دریغشان که در موفقیت من نقش بسزایی دارند و همواره بزرگ‌ترین حامی من بوده‌اند.*

- *خانم* ***سپیده تقی‌پور*** *و آقای* ***قادر براتی*** *به پاس مهربانی خالصانه که در طی نگارش این پایان-نامه همواره از آن بهره‌مند بوده‌ام.*

و هر سپاس را معرفتی است...

چکیده

این پایان‌نامه ابتدا به معرفی روش اجزای محدود (عناصر متناهی) و تفاضلات متناهی برای گسسته-سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی(PDE) می‌پردازد. همچنین روش شبکه چندگانه را برای حل دستگاه معادلات بزرگ حاصل از گسسته‌سازی با استفاده از مفهوم روش‌های چندسطحی ارائه می‌دهد. سپس یک مسأله پواسن با دامنه کران‌دار در صفحه که بخشی از آن نیاز به تظریف مش بیشتری نسبت به سایر نقاط دامنه محاسباتی دارد را در نظر گرفته و با استفاده از روش اجزای محدود یک جواب تقریبی برای آن محاسبه شده است. به‌دلیل بزرگ بودن ابعاد ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی حاصل از گسسته‌سازی و تنک بودن آن، برای حل روش تکراری گاس‌سایدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما محدود بودن تعداد تکرارهای این روش به‌دلیل محدود بودن توان محاسباتی رایانه‌ها در اغلب موارد سبب ایجاد خطای فراوان در جواب‌ها می‌شود. به منظور حل این مشکل و ایجاد دقت مضاعف و بهبود بخشیدن به جواب حاصل در ناحیه تظریف شده، روش شبکه‌های مرکب انطباقی سریع (FAC) به‌کار گرفته شده است. همچنین کران خطا و شرایط همگرایی جواب نیز مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در آخر یک نمونه عددی به‌همراه برنامه رایانه‌ای آن ارائه می-گردد.

واژگان کلیدی

پردازش‌های چندسطحی، شبکه مرکب، شبکه ظریف، شبکه بزرگ، تظریف مش انطباقی، روش عناصر متناهی، روش تفاضلات متناهی، روش شبکه‌های چندگانه، معادلات پواسن، چرخه V، روش شبکه مرکب انطباقی سریع.

پیشگفتار

مسأله‌های مختلف در علوم مهندسی و ریاضیات کاربردی که به‌صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی(PDE) مدل‌سازی می‌شوند، صورت‌های واقعی بسیار پیچیده‌ای دارند. نقاط تکین، شکاف‌های نوک‌تیز و ناپیوستگی‌های دامنه محاسباتی مواردی از این قبیل‌اند که نیاز مبرم به دقت مضاعف و حل مجدد این صورت‌های بی‌قاعده دارند. هنگامی‌که از روش‌های تجزیه دامنه و گسسته-سازی برای حل استفاده می‌کنیم، نیاز به تظریف شبکه در زیردامنه‌های دارای مشکل داریم. روش تظریف شبکه انطباقی (AMR) یک فرآیند عددی پویاست که در طی حل مسأله با تظریف شبکه در ناحیه دارای مشکل و ایجاد نقاط شبکه‌ای بیشتر به حل مجدد مسأله در آن ناحیه می‌پردازد. روش (AMR) به‌دلیل بهبود مؤثر جواب و پرهیز از انجام محاسبات غیرضروری در نواحی فاقد مشکل (که از نظر ذخیره‌سازی یارانه‌ای بسیار سودمند است) دارای محبوبیت ویژه‌ای می‌باشد. روش شبکه-های مرکب انطباقی سریع (FAC) رده‌ای از الگوریتم‌ها است که از ساختار چندسطحی (AMR) بهره برده و از ابتدا دامنه محاسباتی را به‌صورت یک شبکه مرکب افراز می‌کند، به‌طوری‌که در نواحی دارای مشکل طول گام ظریف‌تر باشد و پس از گسسته‌سازی مسأله، به حل دستگاه معادلات ناشی از آن با استفاده از ایده روش شبکه چندگانه می‌پردازد.

فهرست مندرجات

فهرست شکل‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه

این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصول بعدی اختصاص می‌یابد.

۱-۱ تعاریف

تعریف ۱-۱-۱ فضای L^p

اگر $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، آنگاه نرم $\|.\|_p$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left\{\int_X |f|^p \ d\mu\right\}^{1/p}.$$

در این صورت فضای $L^p(\mu)$ عبارت است از مجموعه همه توابعی که در آن‌ها داریم:

$$\|f\|_p < \infty.$$

$\|f\|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم.

در حالت خاص، اگر $p = ۲$، آنگاه نرم $L^۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_۲ = \left(\int_X |f|^۲ \, d\mu\right)^{۱/۲}.$$

تعریف ۱-۱-۲ نرم برداری

فرض کنید $X = \mathrm{R}^n$ و $\vec{x} = (x_۱, \dots x_n)$ باشد. در این صورت به‌ازای هر عددحقیقی مثبت p، نرم p بردار $\vec{x}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}.$$

نرم بی‌نهایت بردار $\vec{x}$ را با رابطه زیر بیان می‌نماییم:

$$\|x\|_\infty = max|x_i|. \qquad (i = ۱, \dots, n)$$

تعریف ۱-۱-۳ نرم ماتریسی

فرض $A = (a_{i,j})_{m\times n} \epsilon M_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد. نرم p $(p \geq ۱)$ ماتریس A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_p = max \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} \;, \vec{x} \epsilon R^n \;\;, \vec{x} \neq ۰ \,.$$

به‌ازای $p = ۱, \infty$ نرم‌های رایج زیر به‌دست می‌آیند:

$$\|x\|_۱ = max \sum_{i=۱}^{m} |a_{i,j}|, \qquad \|x\|_\infty = max \sum_{i=۱}^{n} |a_{i,j}|.$$

نرم دو ماتریس از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\|A\|_۲ = \left(\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m} |a_{i,j}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

تعریف ۱-۱-٤ فرض کنید $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند. شعاع طیفی ماتریس A به-صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = max|\lambda_i|.$$

قضیه ۱.۱. اگر $A = (a_{i,j})_{m\times n} \epsilon\, M_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد، آنگاه

$$\|A\|_۲ = \sqrt[۲]{\rho(A^t A)}$$

برهان ر.ک.[۱]

تعریف ۱-۱-۵ ماتریس‌های خاص

ماتریس متقارن[۱]. ماتریس مربعی A را متقارن گویند هرگاه $A^t = A$.

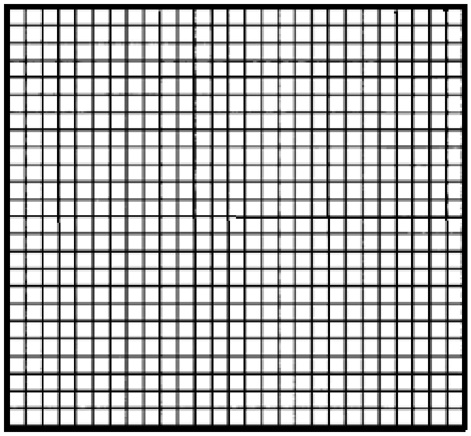
ماتریس معین مثبت[۲]. ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند هرگاه برای هر بردار ناصفر X داشته باشیم $X^tAX > ۰$. در صورتی‌که $X^tAX \geq ۰$، A را معین نیمه مثبت می‌گویند.

ماتریس قطری غالب. ماتریس مربعی A از مرتبه n را قطری غالب گویند، هرگاه

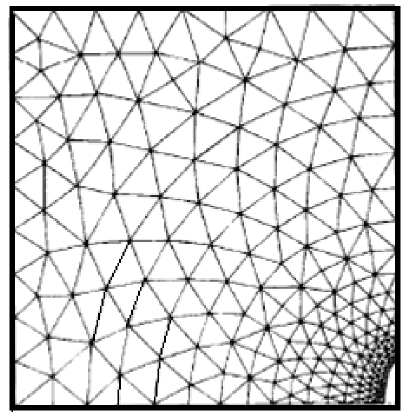
$$|a_{i,j}| \geq \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad , \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

اگر در رابطه فوق علامت $<$ جایگزین شود، آنگاه ماتریس A اکیداً قطری غالب نامیده می‌شود.

---
۱ Symmetric matrix
۲ Positive definite matrix



شکل ۱-۱ شبکه منظم



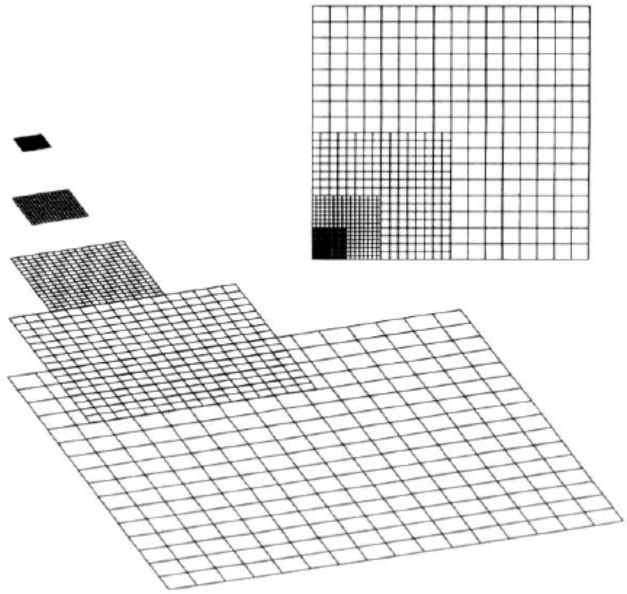
شکل ۱-۲ شبکه نامنظم

تعریف ۱-۱-۶ شبکه منظم[۱](ساخت‌یافته[۲]): شبکه منظم از بخش‌بندی صفحه اقلیدسی با چهارگوش‌های همسان یا فضای اقلیدسی با متوازی‌السطوح‌های مستقیم‌الخط همسان به‌دست می‌آید. (شکل ۱-۱ را ببینید.) شبکه‌هایی از این نوع در کاغذ شطرنجی قابل مشاهده‌اند. شبکه‌های منظم در آنالیز عناصر متناهی، یا روش‌های حجم متناهی و تفاضلات متناهی کاربرد فراوانی دارند. البته این نوع شبکه‌ها به شبکه‌های همسان نیز معروف‌اند.

تعریف ۱-۱-۷ شبکه نامنظم[۳] (فاقد ساختار[۴]): هرگاه صفحه یا فضای اقلیدسی با اشکال ساده مانند مثلث یا چهار وجهی بدون قاعده‌ای منظم افراز گردد، شبکه‌ای نامنظم به‌دست خواهد آمد. (شکل ۱-۲ را ببینید.) شبکه‌هایی از این نوع در روش عناصر متناهی در حالتی‌که دامنه محاسباتی مورد نظر خود شکلی نامنظم دارد، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

---

[۱] Regular grid
[۲] Structured grid
[۳] Irregular grid
[۴] Unstructured grid



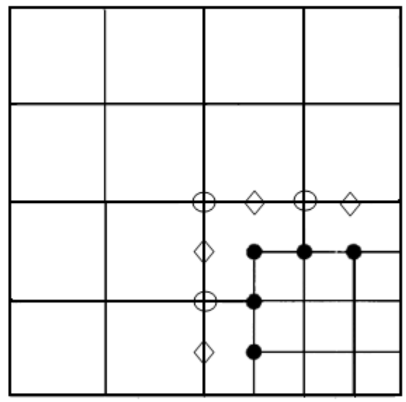
شکل۱-۱ شبکه مرکب، پنج تکه، یک تکه برای هر سطح با ضریب تظریف ۲

تعریف ۱-۱-۸ شبکه مرکب[۱]: شبکه مرکب اجتماعی از شبکه‌های همسان تودرتو است. در یک شبکه مرکب دو مفهوم **تکه**[۲] و **سطح**[۳] مورد استفاده قرار می‌گیرد، به هر زیرشبکه همسان یک تکه گویند. هر سطح شامل مجموعه‌ای از تکه‌های همسان با طول گام مشابه می‌باشد. هنگامی‌که به‌طور موضعی به تظریف شبکه‌ای می‌پردازیم، در حد فاصل بین شبکه بزرگ و زیر شبکه تظریف شده با نقاط جدیدی مواجه شده که محاسبه در آنها تابع شرایط خاصی است. این نقاط همان‌طور که در شکل(۱-۳) نشان داده شده است به سه گروه عمده زیر تقسیم می‌شوند:

- نقاط شبکه ظریف[٤] که در شکل (۱-٤) با نماد ● نمایش داده شده‌اند.
- نقاط شبکه بزرگ[٥] که در شکل (۱-٤) با نماد ○ نمایش داده شده‌اند.
- نقاط وابسته[٦] که در شکل (۱-٤) با نماد نمایش ◊ داده شده‌اند.

---

[۱]Composite grid
[۲]Patch
[۳]Level
[٤] Fine point grid
[٥] Coarse point grid
[٦] Slave point



شکل۱-٤ شبکه مرکب دوسطحی، نقاط حدفاصل

تعریف ۱-۱-۹ با استفاده از بسط سری تیلور در روش‌های عددی طرح‌های تفاضلی تولید می‌شوند که به‌طور گسترده‌ای در روش تفاضلات متناهی به کار برده می‌شوند. در اینجا به معرفی چند طرح تفاضلی مهم و متداول می‌پردازیم:

تفاضلات متناهی پیشرو[1] مرتبه اول:

$$\begin{cases} u_x^n = \dfrac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ u_t^n = \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ u_y^n = \dfrac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} + O(\Delta y) \end{cases}$$

تفاضلات متناهی پسرو[2] مرتبه اول:

$$u_x^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

تفاضلات متناهی مرکزی[3] مرتبه اول:

$$u_x^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم:

$$u_{xx}^n = \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

---

[1] Forward difference
[2] Backward difference
[1]Central difference

همان‌طور که در روابط فوق مشاهده می‌کنید تفاضلات پیشرو وپسرو دارای دقت مرتبه اول و تفاضلات مرکزی هم برای تقریب مشتق اول و هم مشتق دوم دارای دقت مرتبه دوم می‌باشند.

۱-۲ روش‌های حل دستگاه معادلات جبری

روش‌های گسسته‌سازی که برای حل عددی مسائل PDE به‌کار می‌روند، دستگاه‌های معادلات جبری با مراتب بالا و ماتریس ضرایب تنک[۱] ایجاد می‌کنند. در واقع با حل این دستگاه معادلات می‌توان جواب مسأله PDE را فراهم آورد. بنابراین استفاده از یک روش مؤثر برای حل این دستگاه معادلات حائز اهمیت فراوانی است. روش‌های حل دستگاه معادلات جبری به دو شاخه کلی **روش‌های مستقیم**[۲] و **روش‌های تکراری**[۳] تقسیم می‌شوند.

۱-۲-۱ روش‌های مستقیم: روش‌هایی مانند روش حذفی گاوس[٤]، روش گاوس جردن[٥] و تجزیه[٦] LU از انواع این روش‌ها می‌باشند. در گام اول این روش‌ها ماتریس ضرایب را به‌صورت ماتریس‌های بالا مثلثی، پایین مثلثی یا قطری تبدیل نموده و سپس به حل مستقیم دستگاه معادلات با ماتریس ضرایب جدید می‌پردازند. این روش‌ها برای حل دستگاه معادلات تنک ناشی از گسسته‌سازی کارایی قابل قبولی ندارند زیرا عملیات سطری مقدماتی که برای مثلثی یا قطری کردن ماتریس‌ها به‌کار می-رود، باعث مقدار گرفتن مؤلفه‌های صفر ماتریس شده و این از نظر صرف زمان و ذخیره‌سازی رایانه-ای کاملاً بی‌فایده است. علاوه بر این روش‌های فوق قابلیت اجرای مؤثر بر روی رایانه‌های موازی را ندارند.

۱-۲-۲ روش‌های تکراری: روش‌هایی مانند ژاکوبی[۷]، گاوس‌سایدل[۸](GS) در این رده‌بندی قرار می-گیرند. این روش‌ها در ابتدا یک فرض اولیه $\tilde{x}^{(\cdot)}$ را به‌عنوان تقریبی از جواب معادله $Ax = b$ در نظر

[۱] Sparse
[۲] Direct method
[۳] Iterative method
[٤] Gauss elimination
[٥] Gauss-Jordan elimination method
[٦] LU factorization
[۷] Jacobi method
[۸] Gauss-seidel method(GS)

گرفته و دنباله‌ای از بردارها $\left\{\tilde{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{k=\infty}$ را تولید می‌کند، به‌طوری‌که به سمت جواب x همگرا باشد. به این ترتیب جواب تقریبی در هر مرحله بهبود می‌یابد. مزیت دیگر روش‌های فوق امکان اجرای برخی از آنها بر روی رایانه‌های موازی است. فرآیند یک روش تکراری را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^{(k-1)} + \mathbf{P}^{-1}(b - A\tilde{x}^{(k-1)}) \qquad (۱-٤)$$

که در آن $\mathbf{P}$ ماتریسی است که معکوس آن به‌آسانی محاسبه شده و تقریب مناسبی از ماتریس Aاست. با ساده‌تر نمودن معادله فوق خواهیم داشت

$$\tilde{x}^{(k)} = \left(I - \mathbf{P}^{-1}A\right)\tilde{x}^{(k-1)} + \mathbf{P}^{-1}b$$

$$\tilde{x}^{(k)} = M\tilde{x}^{(k-1)} + N$$

که در آن $N = \mathbf{P}^{-1}b$ و I ماتریس همانی هم رتبه با ماتریس A است. همچنین $M = I - \mathbf{P}^{-1}A$ ماتریس تکرار نامیده می‌شود. در روش‌های تکراری محاسبه خطا $\tilde{x} - x$ در هر مرحله از اهمیت فراوانی برخوردار است. ماتریس تکرار تنزل خطا را در هر مرحله تکرار کنترل می‌کند. در حقیقت از (۱-٤) خواهیم داشت

$$\tilde{x}^{(k)} - x = M\left(\tilde{x}^{(k-1)} - x\right)$$

بنابراین نرم l_2 ماتریس تکرار معیار مناسبی از سرعت همگرایی روش تأمین می‌کند. هنگامی‌که تعداد تکرارها زیاد است، سرعت همگرایی با استفاده از شعاع طیفی[۱] $\rho(M)$ ماتریس تکرار قابل تخمین زدن است. روش‌های فوق به روش‌های **تخفیفی**[۲] نیز معروف‌اند. روش شبکه چندگانه نیز روشی تکراری که برای حل مؤثر دستگاه معادلات جبری با مراتب بالاست که از روش‌های تخفیفی بهره می‌برد.

---

[۳] Spectral radius
[٤] Relaxation method