دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان

قضیه باناخ- استون

استاد راهنما
دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور
دکتر رجبعلی کامیابی گل

نگارنده
صفورا ظفر جعفرزاده

شهریور ۱۳۸۷

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: قضیه باناخ- استون

نام نویسنده: صفورا ظفر جعفرزاده

نام استاد(ان) راهنما: دکتر محمد صال مصلحیان

نام استاد(ان) مشاور: دکتر رجبعلی کامیابی گل

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه:** ریاضی محض	**رشته تحصیلی:** ریاضی محض
تاریخ تصویب: ۱۳۸۶/۸/۲۷		**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۷/۶/۹
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ● دکتری ○		**تعداد صفحات:** ۱۲۱

چکیده رساله/پایان نامه : یکی از مسائل اساسی در تمام حوزه های ریاضیات به دست دادن نمایشی کلی از نگاشت هایی است که ساختمان اشیاء مورد مطالعه را حفظ می کنند. قضیه باناخ- استون نمونه ای کلاسیک از چنان نتایجی است که تعمیم ها و نتایج بسیاری در حوزه های دیگر دارد.

در این پایان نامه به مطالعه قضیه کلاسیک باناخ- استون و تعمیم ها و توسیع های کلاسیک آن می پردازیم. همچنین برهان آرنز و کیلی برای این قضیه را که برهان استانداردی است که امروزه برای آن ارائه می شود، ذکر می کنیم.

در ادامه از میان تعمیم های ارائه شده، توسیع هایی از نتایج استون و گلفاند- کلموگوروف را بیان می کنیم و مسائلی باز یا حوزه هایی فعال برای مطالعه را معرفی می کنیم. به علاوه، به بیان مطالعه انجام شده در زمینه وضعیت قضیه باناخ- استون در آنالیز غیر ارشمیدسی می پردازیم.

کلید واژه: قضیه باناخ- استون، یکمتری یکریختی، یکمتری های خطی غیرپوشا، یکریختی های با کران کوچک، برداری مقدار، یکریختی های جبری، حقیقی فشرده، غیرارشمیدسی	**امضای استاد راهنما:** **تاریخ:**

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنیم X و Y فضاهایی هاسدورف و فشرده باشند. فضاهای باناخ $\mathcal{C}(X)$ و $\mathcal{C}(Y)$ از توابع پیوسته همراه با نرم سوپرموم را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت اگر X و Y همسانریخت باشند و $\varphi : Y \longrightarrow X$ یک همسانریختی بین X و Y باشد، به‌سادگی بررسی می‌شود نگاشت $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ با ضابطه $Tf = f \circ \varphi$ یک یکمتری یکریختی است؛ به بیان دیگر اگر فضاهای هاسدورف فشرده X و Y تا حد یک تغییر متغیر مثل هم باشند، فضاهای باناخ $\mathcal{C}(X)$ و $\mathcal{C}(Y)$ همراه با نرم سوپرموم نیز تا حد یک تغییر متغیر مانند هم هستند. سئوالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که آیا عکس این مطلب نیز برقرار است، یعنی اگر فضاهای باناخ $\mathcal{C}(X)$ و $\mathcal{C}(Y)$، برای X و Y هاسدورف فشرده، یکمتر یکریخت باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت X و Y همسانریختند؟

همچنین می‌توان نشان داد نگاشت $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ با ضابطه $Tf = -(f \circ \varphi)$ نیز یک یکریختی یکمتری است. در واقع اگر $h \in \mathcal{C}(Y)$ نگاشتی باشد که برای هر y در Y، $\mid h(y) \mid = ۱$، آن‌گاه $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ با ضابطه

$$(Tf)(y) = h(y).f(\varphi(y)) \qquad (f \in \mathcal{C}(X), y \in Y$$

یک یکمتری یکریختی است(این‌که $h \in \mathcal{C}(Y)$ و $\mid h(y) \mid = ۱$ به این معنی است که h روی مؤلفه‌های همبند Y، یا مقدار ۱ را و یامقدار ۱− را اختیار می‌کند). سئوالی که

در این‌جا مطرح می‌شود این است که آیا این‌ها تمام یکمتری‌های یکریختی از $\mathcal{C}(X)$ به‌روی $\mathcal{C}(Y)$ (بانرم سوپرموم) را به ما می‌دهند؟ یعنی اگر $T:\mathcal{C}(X)\longrightarrow\mathcal{C}(Y)$ یک یکمتری یکریختی باشد، آن‌گاه آیا می‌توان نتیجه گرفت که همسانریختی $\varphi:Y\longrightarrow X$ و نگاشت $h\in\mathcal{C}(Y)$ که برای هر y در Y، $\mid h(y)\mid=۱$ موجودند که

$$(Tf)(y)=h(y).(f(\varphi(y)) \qquad (f\in\mathcal{C}(X),y\in Y)?$$

قضیه باناخ— استون پاسخ مثبت این سئوال‌هاست.
این قضیه ابتدا توسط باناخ(۱۹۳۲) برای فضاهای متریک فشرده مطرح شد و سپس توسط استون(۱۹۳۷) به فضاهای توپولوژیک هاسدورف فشرده تعمیم داده شد.

در این پایان‌نامه در فصل اول به بیان قضیه باناخ و تعمیم‌های کلاسیک آن: استون، آیلنبرگ، گلفاند و کلموگوروف، کاپلانسکی و کادیسون می‌پردازیم. همچنین برهان آرنز و کیلی برای قضیه باناخ— استون را که برهان استانداردی است که امروزه برای این قضیه ارائه می‌شود، ذکر می‌کنیم. مطالب این فصل از منابع زیر اقتباس شده است:

- N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, part I: General Topology*, Interscience, New York, 1958.
- S. Eilenberg, *Banach space methods in topology*, Ann. of Math. **43** (1942), 568-579.
- R. J. Feleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach Spaces: Vector Valued Functions and Operator Spaces*, vol. **2**, Chapman & Hall/CRC,

2007.

- L. Gilman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, Princton, 1960.
- R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. **54** (1947), no. 2, 325-337.
- I. Kaplansky, *Lattice of continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 617-623.
- M. S. Moslehian, *Characterization of some closed ideals of* $\mathcal{C}(X)$, Inter. Math. Journal **2** (2002), no. 11, 1055-1059.
- M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 374-481.

در فصل دوم از میان تعمیم‌های فصل اول تعمیم استون و تعمیم گلفاند و کلموگوروف را انتخاب می‌کنیم که پیشرفت‌ها و توسیع‌ها در این زمینه‌ها را تا مسئله‌هایی باز در این حوزه‌ها دنبال کنیم. به‌علاوه، به بیان مطالعه انجام شده در زمینه وضعیت قضیه باناخ– استون در آنالیز غیرارشمیدسی می‌پردازیم. مطالب این فصل از منابع زیر اقتباس شده است:

- D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel J. Math., **3** (1966), 205-210.
- J. Araujo, *The noncompact Banach-Stone theorem*, J. Operator Theory **55** (2006), no. 2, 285-294.

- J. Araujo, E. Beckenstein and L. Narici, *Biseparating maps and homomorphic realcompactifications*, J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), 258-265.

- J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **394** (1997), 413-428.

- E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone theorem*, Lecture Notes in Mathematics **736**, Springer, Berlin-Hiedelberg-New York, 1979.

- E. Beckenstein and L. Narici, *A non-Archimedean Banach-Stone theorem*, Proc. Amer. Math. **100** (1987), 242-246.

- Beckenstein and L. Narici, *Strang terrian-nonarchimedean spaces*, Amer. Math. Monthly. **88** (1981), no. 9, 667-676.

- M. Cambern, *Isomorphisms of $\mathcal{C}_\circ(Y)$ onto $\mathcal{C}_\circ(X)$*, Pacific J. Math. **35** (1970), 307-312.

- M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 1062-1066.

- M. Cambern, *A generalized Banach-Stone theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 396-400.

- N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, part I: General Topology*, Interscience, New York, 1958

- M. I. Garrido and J. A. Jaramilo, *Variations on the Banach-Stone theorem*, Extracta Math. **17** (2002), no. 3, 351-383.
- L. Gilman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, Princton, 1960.
- W. Holsztynski, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia Math. **26** (1966), 133-136.
- J. Jeang and N. Wong, *On the Banach-Stone problem*, Studia Math. **155** (2003), 95-105.
- M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **25** (1950), 309-327.
- K. Lau, *A representation theorem for isometries of* $\mathcal{C}(X, E)$, Pacific J. Math. **60** (1975), 229-233.
- S. B. Myers, *Banach spaces of continuous functions*, Ann. of Math. **49** (1948), 132-140.
- W. H. Schikhof, *Banach spaces over nonarchimedean valued fields*, Report no.9937 (1999), Department of Math. Univ. of Nijmegen.

لازم به ذکر است در این پایان‌نامه مسیر مرجع زیر را مورد توجه قرار داده‌ایم:

- M. I. Garrido and J. A. Jaramilo, *Variations on the Banach-Stone theorem*, Extracta Math. **17** (2002), no. 3, 351-383.

فصل ۰

پیشنیازها

۱.۰ مفاهیم و قضایایی در هندسه فضاهای باناخ

برای برهان لم‌ها و قضایای این بخش می‌توانید به [۱٦] فصل ۵ بخش‌های ۱، ۲ و ۳ مراجعه کنید.
منظور از K میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است که فضای برداری مورد بحث روی آن تعریف شده است.

تعریف ۱.۱.۰ فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. زیرمجموعه C از V را محدب[1] می‌نامیم هرگاه C شامل هر پاره‌خط با نقاط انتهایی در C باشد، به بیان دیگر

$$tC + (1 - t)C \subseteq C \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

لم ۲.۱.۰ فرض کنیم V فضایی برداری باشد و C_1 و C_2 زیرمجموعه‌هایی محدب از V باشند. دراین‌صورت برای هر اسکالر α در K، αC_1 و نیز $C_1 + C_2$ محدب هستند.

تعریف ۳.۱.۰ در فضای برداری V قرار می‌دهیم

$$x + A := \{x + a : a \in A\},$$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

[1] $Convex$

$$\alpha A := \{\alpha a : a \in A\},$$

که در آن A و B زیرمجموعه‌هایی از V، x عنصری داده شده در V و α اسکالری در K است.

تعریف ۴.۱.۰ فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V باشد. غشای محدب[۲] A، $co(A)$ عبارت است از کوچکترین مجموعه محدب شامل A.

تعریف ۵.۱.۰ فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد. دراین‌صورت (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک[۳] می‌نامیم هرگاه

(i) هر زیرمجموعه تک‌عضوی X بسته باشد.

(ii) اعمال فضای برداری X پیوسته باشند.

تعریف ۶.۱.۰ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک روی میدان K باشد. متناظر با هر a در X و هر $\alpha \neq 0$ در K، عملگر انتقال T_a و عملگر ضرب M_α را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_a(x) = a + x \qquad , \qquad M_\alpha(x) = \alpha x \qquad (x \in X).$$

---

[۲] *Convex hull*

[۳] *Topological vector space*

لم ۷.۱.۰ در هر فضای برداری توپولوژیک T_a و M_α همسانریختی هستند.

برهان. واضح است که T_a و M_α یک‌به‌یک هستند و X را به‌روی X نقش می‌کنند. همچنین واضح است که T_{-a} و $M_{\alpha^{-1}}$ معکوس این عملگرها هستند. بنا به پیوستگی جمع و ضرب اسکالری T_a، M_α، T_{-a} و $M_{\alpha^{-1}}$ پیوسته‌اند. بنابراین T_a و M_α همسانریختی هستند.

■

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، هر مجموعه باز در هر فضای برداری توپولوژیک X تحت انتقال پایا است؛ یعنی مجموعه G در X باز است اگر و فقط اگر $x + G$ باز باشد که در آن x عنصری داده شده در X است. به‌این‌ترتیب توپولوژی X توسط پایه‌ای موضعی از هر نقطه به ویژه نقطه صفر مشخص می‌شود. همچنین برای هر همسایگی باز G از نقطه x در X، همسایگی باز N از صفر موجود است که $G = x + N$.

لم ۸.۱.۰ بستار یک مجموعه محدب در یک فضای برداری توپولوژیک، محدب است.

تعریف ۹.۱.۰ فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای برداری توپولوژیک X باشد. غشای محدب بسته A[۴]، $\overline{co}(A)$ کوچکترین مجموعه‌ی محدب بسته شامل Aست.

[۴] *Closed convex hull*

قضیه ۱۰.۱.۰ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. دراین‌صورت $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$.

تعریف ۱۱.۱.۰ فرض کنیم V فضایی برداری باشد و M و N زیرمجموعه‌هایی از V باشند. می‌گوییم تابعک خطی f روی V، M و N را جدا می‌کند هرگاه ثابت حقیقی d موجود باشد که

$$Ref(M) \geq d \qquad , \qquad Ref(N) \leq d.$$

تعریف ۱۲.۱.۰ فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً محدب[۵] می‌نامیم هرگاه حول صفر پایه‌ای موضعی از مجموعه‌های محدب داشته باشد.

قضیه ۱۳.۱.۰ فرض کنیم $K_۱$ و $K_۲$ مجموعه‌های محدب بسته مجزا از فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب X باشند. اگر $K_۱$ فشرده نیز باشد، آن‌گاه ثابت c، $\epsilon > ۰$ و تابعک خطی پیوسته f روی X چنان موجودند که

$$Ref(K_۲) \leq c - \epsilon < c \leq Ref(K_۱).$$

---

[۵] *Locally convex*

تعریف ۱۴.۱.۰ خانواده $\mathcal{F}$ از توابع روی فضای توپولوژیک X را جداکننده می‌نامیم هرگاه برای هر x و y متمایز در X، fی در $\mathcal{F}$ موجود باشد که $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۱۵.۱.۰ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $\mathcal{F}$ زیرفضایی جدا کننده[۶] از تابعک‌های خطی روی X باشد. دراین‌صورت توپولوژی ضعیف القا شده روی X توسط این زیرفضا، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر یک از تابعک‌های در $\mathcal{F}$ پیوسته باشند. به‌سادگی بررسی می‌شود مجموعه‌های به‌صورت

$$N(p; A, \epsilon) = \{q :\mid f(p) - f(q) \mid < \epsilon, f \in A\}$$

که در آن $p \in X$، A زیرمجموعه‌ای با متناهی عضو از $\mathcal{F}$ و $\epsilon > 0$ داده شده‌اند، تشکیل پایه‌ای برای این توپولوژی می‌دهند.

برای تعریف توپولوژی ضعیف القا شده توسط خانواده‌ای از توابع که برد آن‌ها فضایی توپولوژیک است به [۳۶] مراجعه کنید.

تعریف ۱۶.۱.۰ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. دراین‌صورت X^*، دوگان (توپولوژیک) X عبارت است از گردایه تمام تابعک‌های خطی روی X که تحت توپولوژی X پیوسته‌اند.

تعریف ۱۷.۱.۰ فرض کنیم X فضایی نرم‌دار باشد. دراین‌صورت X همراه با توپولوژی القا شده توسط نرم خود یک فضای برداری توپولوژیک است. منظور از توپولوژی $*$—ضعیف روی X^* توپولوژی ضعیف القا شده توسط خانواده $\{\hat{x} : x \in X\}$ است که در آن $\hat{x} : X^* \longrightarrow K$ ؛ $f \mapsto f(x)$.

[۶] *Separating subspace*

به‌سادگی بررسی می‌شود در فضای نرم‌دار X تور (f_α) در X^* $*$—ضعیف به f میل می‌کند اگر و فقط اگر برای هر x در X، $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha(x) = f(x)$.

قضیه ۱۸.۱.۰ فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از تابعک‌های خطی جداکننده روی فضای برداری V باشند. دراین‌صورت توپولوژی القا شده روی V توسط این خانواده هاسدورف است (دقت کنیم در این‌جا $\mathcal{F}$ نیازی نیست لزوماً زیرفضا باشد.).

برهان. با توجه به هاسدورف بودن برد تابعک‌های خطی حکم به‌سادگی به‌دست می‌آید. ■

لم ۱۹.۱.۰ اگر $g, f_۱, ..., f_n$، $n + ۱$ تابعک خطی روی فضای برداری V باشند به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر x در V که $f_i(x) = ۰$ نتیجه شود $g(x) = ۰$، آن‌گاه g ترکیبی خطی از f_iهاست.

قضیه ۲۰.۱.۰ فرض کنیم V فضایی برداری باشد و V' فضایی برداری و جداکننده از تابعک‌های خطی روی V باشد. دراین‌صورت دوگان (V, τ_w) که در آن τ_w توپولوژی ضعیف القا شده توسط V' روی V است، V' می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱.۰ فرض کنیم V فضایی برداری باشد. نقطه x در V را یک نقطه فرین (انتهایی)[۷] زیرمجموعه K از V می‌نامیم، هرگاه از $x = ty + (۱ - t)z$ برای $۰ < t < ۱$ و y و z در K نتیجه شود $y = x = z$.

[۷] *Extreme point*

لم ۲۲.۱.۰ فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و A_iها که $1 \leq i \leq n$، زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری توپولوژیک X باشند. اگر غشای محدب بسته A_iها فشرده باشد، آن‌گاه

$$\overline{co}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = co(\cup_{i=1}^{n} \overline{co}(A_i)).$$

قضیه ۲۳.۱.۰ فرض کنیم K مجموعه‌ای فشرده در فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب X باشد. که غشای محدب بسته آن فشرده است. دراین‌صورت نقاط فرین $\overline{co}(K)$ به K تعلق دارند.

برهان. به برهان خلف، فرض کنیم p نقطه‌ای فرین از $\overline{co}(K)$ باشد که در K نیست. چون K بسته است همسایگی U_0 از مبدأ موجود است که $(p+U_0) \cap K = \phi$. چون ضرب اسکالری و جمع پیوسته‌اند، X موضعاً محدب است و $0 = 0 - 0$، همسایگی محدب U از مبدأ موجود است که $U - U \subseteq U_0$. بنابراین $(p+U) \cap (K+U) = \phi$. لذا $p \notin \overline{K+U}$. خانواده $\{k+U : k \in K\}$ پوششی باز برای K است. فرض کنیم $\{k_i + U : 1 \leq i \leq n\}$ زیرپوششی متناهی از این پوشش باشد. قرار می‌دهیم:

$$K_i := \overline{co}(\overline{(k_i+U)} \cap K) \subseteq \overline{k_i + U}.$$

به‌این‌ترتیب K_i زیرمجموعه‌ای بسته و بنابراین فشرده از $\overline{co}(K)$ است. لذا

$$\overline{co}(K) = \overline{co}(K_1 \cup ... \cup K_n) = co(K_1 \cup ... \cup K_n).$$

(در تساوی دوم از لم قبل استفاده شده است.) بنابراین $k_i \in K_i$ و $1 \leq a_i \leq n$ موجودند که $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ و $p = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i$. چون p نقطه فرین است اگر برای iی $a_i > 0$

آن‌گاه $p_i = k_i$. چون $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$، لذا a_{i_0}ی موجود است که $a_{i_0} > 0$. بنابراین $p \in \cup_{i=1}^{n} K_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} (\overline{K_i + U}) \subseteq (\overline{K + U})$، که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم حاصل می‌شود. ■

۲.۰ الحاق یک عملگر کراندار روی فضایی نرم‌دار

در این بخش به هر عملگر کراندار $T \in B(X, Y)$ که X و Y فضاهایی نرمدار هستند، عملگری $T^* \in B(Y^*, X^*)$ نظیر می‌کنیم. اگر X و Y فضاهایی با بعد متناهی باشند، هر عملگر $T \in B(X, Y)$ نمایشی ماتریسی $[T]$ دارد. دراین حالت ماتریس عملگر T^*، $[T^*]$ ترانهاده ماتریس $[T]$ خواهد بود درصورتی که پایه مناسبی برای Y^* و X^* اختیار کنیم.

لم ۱.۲.۰ فرض کنیم X فضایی نرم‌دار باشد. دراین‌صورت برای هر x در X

$$\|x\| = \sup\{\|f(x)\| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

برهان. فرض کنیم $f \in X^*$ و $\|f\| \leq 1$. دراین‌صورت

$$\|f(x)\| \leq \|x\|.$$

بنابراین $\sup\{\|f(x)\| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} \leq \|x\|$. بنا به نتیجه‌ای از قضیه هان—باناخ تابعک خطی f در X^* با نرم یک موجود است که $f(x) = \|x\|$. به‌این‌ترتیب

$$\sup\{\|f(x)\| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} \geq \|x\|$$

و حکم حاصل می‌شود. ■

قضیه ۲.۲.۰ فرض کنیم X و Y فضاهایی نرم‌دار باشند و T عملگری در $B(X,Y)$ باشد. نظیر T عملگر منحصربه‌فرد T^* در $B(Y^*,X^*)$ چنان موجود است که

$$(\star) \qquad (T^*g)(x) = g(T(x)) \qquad (g \in Y^*, x \in X).$$

به‌علاوه، $\|T^*\| = \|T\|$.

برهان. فرض کنیم g در Y^* داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$T^*g := goT.$$

دراین صورت $T^*g \in X^*$ و لذا T^* خوش‌تعریف است. همچنین

$$(T^*g)(x) = (goT)(x) = g(T(x)).$$

بنابراین T^* در شرط $(\star)$ صدق می‌کند. اگر $T^{*'}$ نگاشت دیگری باشد که در شرط $(\star)$ صدق می‌کند، آن‌گاه واضح است که $T^{*'} = T^*$، یعنی شرط $(\star)$ نگاشت T^* را به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌کند. برای هر x در X، $g_۱$ و $g_۲$ در Y^* و α در K

$$\begin{aligned} T^*(\alpha g_۱ + g_۲)(x) &= (\alpha g_۱ + g_۲)(Tx) \\ &= \alpha(g_۱(Tx)) + g_۲(Tx) \\ &= \alpha(T^*g_۱)(x) + (T^*g_۲)(x) \\ &= [\alpha(T^*g_۱) + (T^*g_۲)](x). \end{aligned}$$

بنابراین $T^*(\alpha g_۱ + g_۲) = \alpha(T^*g_۱) + (T^*g_۲)$، یعنی T^* خطی است. ازطرفی

$$\|T^*\| = \sup\{\|T^*g\| : \|g\| \leq ۱\}$$