بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۲۶

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور

دکتر علی‌اکبر مهرورز

پژوهشگر

نگار محمدی

بهمن ۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر زحمتکش و بزرگوارم

و

مادر فداکار و مهربانم

تقدیم به:

استاد علم و اخلاق

جناب آقای دکتر نقی پور

حمد بی پایان خداوند منان را که ما را لایق معانی دانسته که عظمت آنان بی منتها، هدایتشان بی نظیر و همنوایی با آنان سعادت است.

در پایان این مرحله از تحصیل برخود واجب می دانم که از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر رضا نقی پور که گنجینه های دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پایان نامه هدایت کردند صمیمانه تقدیر و تشکر کنم و از درگاه خداوند متعال برای ایشان و خانوادهٔ محترمشان آرزوی سلامتی و بهروزی دارم.

از استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز کمال تشکر و قدردانی را داشته و از خداوند متعال برای ایشان و خانواده محترمشان آرزوی سلامتی دارم.

از داور محترم این پایان نامه جناب آقای دکتر امجدی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را تقبل کردند بی نهایت سپاسگزارم.

از مدیر محترم گروه ریاضی محض جناب آقای دکتر عیوضلو تشکر و قدردانی می کنم.

از جناب آقای احمد خوجالی به خاطر کمکهای بی دریغشان کمال تقدیر و تشکر را دارم.

از مسؤلین محترم کتابخانهٔ دانشکدهٔ ریاضی سرکار خانم ایزان و خانم زحمتی سپاسگزارم.

همچنین از اسطوره های محبت و مهربانی، پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر می کنم. از خواهر خوب و مهربانم نیز که همواره در عرصه های مختلف زندگی مشوق و یاریگر من بوده بسیار سپاسگزارم.

نگار محمدی

فهرست

۳ همبافت کوزین

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس مقالات زیر گردآوری شده است:

1. Zhou, C. *Uniform annihilators of local cohomology*, Journal of Algebra 585-602, (2006).
2. Dibaei, M. T. Jafari, R. *Modules with finite Cousin cohomologies have uniform local cohomological annihilators*, Journal of Algebra, 3291-3300, (2008).

در سراسر این پایان‌نامه R را حلقهٔ نوتری، جابجایی و یکدار در نظر می‌گیریم.

برای اولین بار، هانکه[1] و هاکستر[2] در [۱۵]، وجود پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی را ثابت کردند. هانکه در [۱۶]، نشان داد که وجود پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی اهمیت زیادی در حل مسائل مربوط به جبرهای کوهن ـ مکالی بزرگ و قضیهٔ آرتین- ریس یکنواخت دارد. لذا یافتن حلقه‌های نوتری شامل پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی، اهمیت زیادی دارد. روش سنتی مطالعهٔ پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی استفاده از همبافت دوآلی است. رابرتس[3] در [۲۷]، این روش را شرح داده است. هانکه و هاکستر در [۱۴]، به کمک این روش ثابت کردند که اگر حلقهٔ نوتری و موضعاً هم بعد R، تصویر همومورفیک حلقهٔ گرنشتاین با بعد متناهی باشد، آنگاه R پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. آنها همچنین در [۱۵]، به کمک کامل سازی ثابت کردند که حلقهٔ موضعی، عالی و هم‌بعد نامخلوط R، پوچساز قوی یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد. شکی نیست که بیشتر نتایج مربوط به پوچسازهای کوهمولوژی موضعی توسط افرادی چون

[1] Huneke
[2] Hochster
[3] Roberts

راغاوان[۴]، کاوازاکی[۵]، فالتینگس[۶] و شنزل[۷] اثبات شده‌اند. برای مثال فالتینگس در [۹]، نشان داد که اگر حلقهٔ R تصویر هومورفیک یک حلقهٔ منظم باشد و یا اگر R همبافت دوآلی داشته باشد، آنگاه قضیهٔ مدول‌های کوهمولوژی روی R برقرار است. همچنین راغاوان در [۲۴]، ثابت کرد که اگر R تصویر هومورفیک یک حلقهٔ منظم باشد، آنگاه اصل موضعی ـ کلی[۸] برای پوچساز مدولهای کوهمولوژی روی R برقرار است.

در فصل دوم این پایان‌نامه خواص حلقه‌های شامل پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی را بررسی می‌کنیم. همچنین یک معیار مهم برای وجود پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی را ثابت خواهیم کرد.

همچنین در این فصل قضیه‌های مهم زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه . فرض کنیم R حلقهٔ نوتری با بعد متناهی d باشد. دراینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

(i) R، پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

(ii) R، موضعاً هم‌بعد است و بازای هر ایده‌آل اول مینیمال مانند $\mathfrak{p}$ از R، $R/\mathfrak{p}$ پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

قضیه . فرض کنیم R یک حلقهٔ عالی و موضعاً هم‌بعد، با بعد نابیشتر از پنج باشد. دراینصورت R پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

در فصل سوم به مطالعهٔ همبافت کوزین یک مدول خواهیم پرداخت. صورت هندسی این همبافت برای اولین بار توسط هارتشورن[۹] معرفی شد و صورت جبری آن نیز توسط شارپ[۱۰]

---

۴ Raghavan
۵ Kawasaki
۶ Faltings
۷ Schenzel
۸ Local-global Principle
۹ Hartshorne
۱۰ Sharp

در [۲۹]، مورد مطالعهٔ قرار گرفت. دیبایی[۱۱]، طوسی[۱۲] و کاوازاکی در [۶] و [۷] و [۱۷]، همبافت کوزین متناهی را مورد بررسی قرار دادند.

در این فصل ثابت خواهیم کرد که اگر

قضیه . فرض کنیم R ـ مدول باتولید متناهی M از بعد متناهی بوده و همبافت کوزین M متناهی باشد. دراینصورت M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی خواهد داشت. بعنوان نتیجه ثابت خواهیم کرد که اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ نوتری باشد که در شرط $(S_۲)$ صدق می‌کنند و همهٔ فایبرهای رسمی آن کوهن ـ مکالی هستند، دراینصورت R پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

قضیه. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و M، R ـ مدول با تولید متناهی باشد که شرط $(S_۲)$ در آن برقرار است و همهٔ فایبرهای رسمی M کوهن ـ مکالی هستند. دراینصورت شرایط زیر معادلند:

(i) $\hat{M}$، کامپلیشن M نسبت به $\mathfrak{m}$ ـ ادیک توپولوژی، هم‌بعد است،

(ii) $C(M)$، همبافت کوزین M، متناهی است،

(iii) M پوچساز یکنواخت کوهمولوژی موضعی دارد.

در پایان نیز با فرض اینکه M یک R ـ مدول است، رابطهٔ موجود بین مدول‌های کوهمولوژی $C(M)$ و مدول‌های کوهمولوژی موضعی M را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

---

۱۱ Dibaei

۱۲ Tousi

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف اولیه

در سراسر این فصل R را حلقهٔ جابجایی، یکدار و نوتری در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را یک ایده‌آل اول وابستهٔ [۱] M می‌نامیم، درصورتیکه $x(\neq 0) \in M$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(x)$.

مجموعهٔ همهٔ ایده‌آل‌های اول وابستهٔ M را با علامت $\mathrm{Ass}_R(M)$ یا به اختصار $\mathrm{Ass}(M)$ نشان می دهیم. همچنین مجموعهٔ همهٔ عناصر مینیمال $\mathrm{Ass}(M)$ را با علامت $\mathrm{mAss}(M)$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۲.۱.۱ . عضو $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر [۲] روی M می‌نامیم، درصورتیکه $x(\neq 0) \in M$ موجود باشد بطوریکه $ax = 0$.

مجموعهٔ تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R روی M را با علامت $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. دراینصورت $Z_R(M) = \bigcup\limits_{\mathfrak{p}\in AssM} \mathfrak{p}$.

برهان. رجوع شود به [۳۱]، صفحهٔ ۱۸۱. □

لم ۴.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. دراینصورت

$$M = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ass}(M) = \phi.$$

برهان. رجوع شود به [۳۱]، صفحهٔ ۱۸۱. □

---

[۱] Associated prime ideal

[۲] Zero divisor

تبصره ۵.۱.۱ . فرض کنیم M و L دو R ـ مدول باشند بطوریکه $M \cong L$. دراینصورت

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(L).$$

قضیه ۶.۱.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. دراینصورت

(i) $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

(ii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \iff M$ یک زیرمدول (دوری) ایزومورف با $R/\mathfrak{p}$ دارد.

برهان. (i) اولاً: $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p})$.

ثانیاً: اگر $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p})$، دراینصورت $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ موجود است بطوریکه $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(r+\mathfrak{p})$. لذا $\mathfrak{q}(r+\mathfrak{p}) = \circ$ و از آنجا $\mathfrak{q}r \subseteq \mathfrak{p}$، درنتیجه $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. اما بازای هر $x \in \mathfrak{p}$، داریم:

$$\begin{aligned} x(r+\mathfrak{p}) = xr + \mathfrak{p} = \circ \quad &\Longrightarrow \quad x \in \mathrm{Ann}(r+\mathfrak{p}) = \mathfrak{q} \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \end{aligned}$$

لذا $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ وحکم برقرار است.

(ii) $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. دراینصورت $x(\neq \circ) \in M$ موجود است بطوریکه $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(x)$، درنتیجه خواهیم داشت:

$$R/\mathfrak{p} = R/\mathrm{Ann}_R(x) \cong Rx \leq M$$

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $K \leq M$ و $R/\mathfrak{p} \cong K$. لذا بنابه لم فوق $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Ass}(K)$. حال باتوجه‌به قسمت (i)، $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(K)$ و درنتیجه $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. □

قضیه ۷.۱.۱ . فرض کنیم

$$\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$$

یک رشتهٔ دقیق کوتاه از R ـ مدول‌ها و R ـ همومورفیسم‌ها باشد. دراینصورت

$$\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

برهان. رجوع شود به [۲۰]، صفحهٔ ۳۸. □

قضیه ۸.۱.۱ . فرض کنیم $M(\neq 0)$ یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد. دراینصورت ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ از R و زنجیری از زیرمدول‌های M بصورت

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$$

موجودند بطوریکه بازای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$M_i / M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i.$$

برهان. رجوع شود به [۲۰]، قضیهٔ ۶.۴. □

نتیجه ۹.۱.۱ . فرض کنیم $M(\neq 0)$ یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد. دراینصورت $\mathrm{Ass}(M)$ متناهی است.

لم ۱۰.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد. دراینصورت

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ (S^{-1}R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \phi\ ,\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)\}.$$

برهان. رجوع شود به [۳۱]، صفحهٔ ۱۸۲. □

تعریف ۱۱.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. تکیه‌گاه[۳] M را با علامت $\mathrm{Supp}_R(M)$ یا به اختصار $\mathrm{Supp}(M)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ (R) \ \mid\ M_{\mathfrak{p}} \neq \circ\}.$$

قضیه ۱۲.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول باشد. دراینصورت

(i) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

(ii) مجموعهٔ عناصر مینیمال $\mathrm{Ass}(M)$ و $\mathrm{Supp}(M)$ باهم مساویند.

برهان. رجوع شود به [۲۰]، قضیهٔ ۵.۶. □

تعریف ۱۳.۱.۱ . بازای هر ایده‌آل I از R، واریتهٔ[۴] I را با علامت $V(I)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

قضیه ۱۴.۱.۱ . فرض کنیم M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد. دراینصورت

$$\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}_R(M)).$$

برهان. رجوع شود به [۳۱]، لم ۱۹.۲۰. □

قضیه ۱۵.۱.۱ . فرض کنیم

$$\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$$

Support ۳

Variety ۴

یک رشتهٔ دقیق کوتاه از R ـ مدول ها و R ـ همومورفیسم ها باشد. در اینصورت

$$\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(M') \cup \operatorname{Supp}(M'').$$

برهان. رجوع شود به [۳۱]، صفحهٔ ۱۷۶. $\square$

تعریف ۱۶.۱.۱ . فرض کنیم I یک ایده‌آل R باشد. دراینصورت رادیکال[۵] I را با علامت $\operatorname{Rad}(I)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Rad}(I) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\, ;\, a^n \in I\}$$

بویژه، اگر $I = (\circ)$، دراینصورت $\operatorname{Rad}(I)$ مجموعهٔ همهٔ اعضای پوچتوان[۶] R می‌باشد. این مجموعه را با علامت $\operatorname{nil}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ . مقطع همهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال R را رادیکال جاکبسون[۷] R نامیده و با علامت $J(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۸.۱.۱ . فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد. دراینصورت

$$\operatorname{Rad}(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Min(I)} \mathfrak{p}$$

بویژه

$$\operatorname{Rad}(\circ) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Min(R)} \mathfrak{p}.$$

---

[۵] Radical
[۶] Nilpotent
[۷] Jacobson radical

برهان. رجوع شود به [۳۱]، قضیهٔ ۳.۵۴. □

قضیه ۱۹.۱.۱ . فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد. دراینصورت $n \in \mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $(\mathrm{Rad}(I))^n \subseteq I$.

برهان. رجوع شود به [۳۱]، لم ۹.۲۰. □

لم ۲۰.۱.۱ . (لم ناکایاما[۸]) فرض کنیم $M(\neq 0)$ یک R ـ مدول با تولید متناهی بوده و I یک ایده‌آل از R باشد بطوریکه $M = IM$. دراینصورت $a \in R$ موجود است بطوریکه $aM = 0$ و $(1-a) \in I$. بعلاوه، اگر $I \subseteq J(R)$، دراینصورت $M = 0$.

برهان. رجوع شود به [۲۰]، قضیهٔ ۲.۲. □

قضیه ۲۱.۱.۱ . (قضیهٔ اجتناب از ایده‌آل‌های اول[۹])

(i) فرض کنیم $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اول R باشند. فرض کنیم I یک ایده‌آلی از R باشد که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. دراینصورت $1 \leqslant j \leqslant n$ موجود است بطوریکه $I \subseteq \mathfrak{p}_j$.

(ii) فرض کنیم $I_1, \ldots, I_n$ ایده‌آل هایی از R باشند. فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول R باشد بطوریکه $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$. دراینصورت $1 \leqslant j \leqslant n$ موجود است بطوریکه $I_j \subseteq \mathfrak{p}$.

برهان. رجوع شود به [۱]، گزارهٔ ۱.۱۱. □

---

[۸] Nakayama

[۹] Prime avoidance

قضیه ۲۲.۱.۱ . فرض کنیم I ایده‌آلی از R و M یک R ـ مدول با تولید متناهی باشد. دراینصورت

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R(M/IM)) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R(M) + I).$$

برهان. رجوع شود به [۲۰]. □

لم ۲۳.۱.۱ . هر حلقهٔ آرتینی تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد.

برهان. رجوع شود به [۱]، گزارهٔ ۸.۳. □

تعریف ۲۴.۱.۱ . ایده‌آل واقعی $\mathfrak{q}$ از R را یک ایده‌آل اولیه [۱۰] می‌نامیم، درصورتیکه

$$\forall\, x, y \in R\ ,\ xy \in \mathfrak{q} \implies x \in \mathfrak{q} \ \vee\ y \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{q}).$$

گزاره ۲۵.۱.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیهٔ R باشد. دراینصورت $\mathrm{Rad}(\mathfrak{q})$، کوچکترین ایده‌آل اول شامل $\mathfrak{q}$ است.

برهان. رجوع شود به [۱]، گزارهٔ ۴.۱. □

تعریف ۲۶.۱.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیهٔ R باشد. قرار می‌دهیم $\mathfrak{p} := \mathrm{Rad}(\mathfrak{q})$، دراینصورت $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$ ـ اولیه [۱۱] می‌نامیم.

لم ۲۷.۱.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$ ـ اولیه باشد و $x \in R$. دراینصورت

---

[۱۰] Primary ideal

[۱۱] p - primary

(i) اگر $x \in \mathfrak{q}$، آنگاه $(\mathfrak{q} :_R x) = R$؛

(ii) اگر $x \notin \mathfrak{q}$، آنگاه $(\mathfrak{q} :_R x)$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$ ـ اولیه است؛

(iii) اگر $x \notin \mathfrak{p}$، آنگاه $(\mathfrak{q} :_R x) = \mathfrak{q}$.

برهان. رجوع شود به [۱]، لم ۴.۴. $\square$

تعریف ۲۸.۱.۱ . فرض کنیم I یک ایده‌آل واقعی R باشد. یک تجزیهٔ اولیه[۱۲] برای I عبارت است از اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل‌های اولیه؛ یعنی $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$، که در آن بازای هر i، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل اولیه است.

اگر در تجزیهٔ فوق $\mathrm{Rad}(\mathfrak{q}_i)$ ها متمایز باشند و $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{q}_j \not\supseteq \mathfrak{q}_i$، دراینصورت تجزیهٔ بالا را یک تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال I می‌نامیم.

لم ۲۹.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقهٔ نوتری باشد. دراینصورت هر ایده‌آل R، یک تجزیهٔ اولیه دارد.

برهان. رجوع شود به [۱]، فصل ۷. $\square$

قضیه ۳۰.۱.۱ . (اولین قضیهٔ منحصربه فردی) فرض کنیم I یک ایده‌آل تجزیه‌پذیر در R باشد. فرض کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ یک تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال I باشد بطوریکه بازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Rad}(\mathfrak{q}_i)$. دراینصورت $\mathfrak{p}_i$ ها دقیقاً به فرم ایده‌آل‌های اول مجموعهٔ $\{\mathrm{Rad}(I :_R x_i) \mid x_i \in R\}$ هستند. لذا $\mathfrak{p}_i$ ها فقط به I بستگی دارند و مستقل از تجزیهٔ I می‌باشند.

برهان. رجوع شود به [۱]، قضیهٔ ۴.۵. $\square$

---

[۱۲] Primary decomposition

تعریف ۳۱.۱.۱ . فرض کنیم I ایده‌آل تجزیه پذیر در R بوده و $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ یک تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال I باشد بطوریکه بازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Rad}(\mathfrak{q}_i)$. دراینصورت مجموعهٔ $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ را با علامت $\mathrm{ass}(I)$ نشان داده و هر عضو آن را یک ایده‌آل اول وابستهٔ I می‌نامیم.

عناصر مینیمال $\mathrm{ass}(I)$ را ایده‌آل‌های اول ایزولهٔ [13] I و بقیهٔ عناصر آن را ایده‌آل‌های اول نشاندهٔ [14] I می‌نامیم.

گزاره ۳۲.۱.۱ . فرض کنیم I یک ایده‌آل تجزیه پذیردر R باشد. دراینصورت هر ایده‌آل اول مانند $\mathfrak{p}$ که $I \subseteq \mathfrak{p}$، شامل یک ایده‌آل اول مینیمال وابستهٔ I است. لذا ایده‌آل‌های اول مینیمال I دقیقاً عبارتند از عناصر مینیمال $\mathrm{ass}(I)$.

برهان. رجوع شود به [۱]، گزارهٔ ۷.۱۷. □

لم ۳۳.۱.۱ . فرض کنیم S یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد. همومورفیسم طبیعی $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ را در نظر می‌گیریم. دراینصورت

(i) بازای هر ایده‌آل J از $S^{-1}R$، $J = S^{-1}I$ که در آن I ایده‌آلی از R است؛

(ii) تناظر یک به یک بین ایده‌آل‌های اول $S^{-1}R$ و ایده‌آل‌های اول R که S را قطع نمی‌کنند وجود دارد.

برهان. رجوع شود به [۱]، گزارهٔ ۳.۱۱. □

---

[13] Isolated
[14] Embeded