دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

روشهای BDF مرتبه بالا و بررسی پایداری آنها

توسط

لیلا تقی زاده

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

دی ۱۳۸۸

تقدیم به دو الهه صبر، عشق و ایمان،

پدر و مادرم

که موفقیتهایم مرهون محبتهای بی‌دریغ ایشان است.

تقدیم به همسر مهربانم،

که درپرتو وجودش بالیدن و شکفتن را آموختم.

و تقدیم به خواهر عزیزم،

که پیوسته از دریای معرفت او بهره بردم.

قدردانی

سپاس بی کران خدایی را که به انسان عشق را عنایت فرمود ... .

از اساتید فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقایان دکترسید محمد حسینی، دکتر بابلیان، دکتر اصلاحچی و دکتر باقری بخاطر تقبل زحمت راهنمایی و داوری این پایان‌نامه قدردانی می‌نمایم.

مراتب سپاس و قدردانی خویش را به محضر اساتید محترم دکتر Martin-Vaquero و دکتر Vigo-Aguiar به خاطر راهنمایی‌های ظریف و ارزنده ایشان و همچنین تهیه برخی مراجع پایان‌نامه تقدیم می‌دارم.

در پایان ولی بی کران، از پدر و مادر مهربانم، خواهر و همسر فداکارم به خاطر عشق و حمایت مداومشان تشکر می کنم.

لیلا تقی زاده

دی ۱۳۸۸

چکیده

روشهای BDF دسته‌ای از روشهای چندگامی خطی هستند که برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت به کار می روند. در سالهای اخیر تغییرات زیادی روی این روش انجام شده و منجر به پیدایش توسیع های جدید گردیده است. از جمله این روشها می توان به EBDF، MEBDF، MF-MEBDF [۵] و ... اشاره کرد. در این پایان نامه بر اساس [۱۱] که مرجع اصلی پایان نامه می باشد، ابتدا به معرفی و بررسی روش Adapted BDF در حل مسائل سخت پرداخته می شود. سپس قضیه مربوط به ضرائب روش، بیان و اثبات شده و نمودارهای نواحی صفر پایداری و پایداری مطلق رسم شده‌اند. در انتها به پیاده سازی چندین مثال عددی پرداخته و با مقایسه نتایج با روشهای قبلی نشان می دهیم که علیرغم ادعای [۱۱]، روش A-BDF در مقایسه با روش MEBDF در حل مسائل خطی، هم از نظر خطا و هم از نظر تعداد محاسبات تابعی، ضعیفتر عمل می کند و روش MEBDF همچنان برتری خود را حفظ کرده است.

واژه‌های کلیدی : روش Adapted BDF، مسائل سخت، صفرپایداری، پایداری مطلق، روش MEBDF

فهرست مندرجات

مقدمه

مسئله مقدار اولیه زیر را در بازه متناهی و بسته $[a,b]$ در نظر می‌گیریم

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t))$$

که درآن A یک ماتریس ثابت $m \times m$ است و مقادیر ویژه اش دارای قسمت حقیقی منفی هستند و $y = y(t)$ بردارm بعدی با متغیر حقیقی t است و $f(t,y)$ نیز بردار m بعدی است که در شرایط کافی وجود و یکتایی جواب صدق می‌کند.

برای حل این نوع مسائل، روشهایی جهت بدست آوردن خواص پایداری خوب و مراتب بالاتر پیشنهاد می‌شوند. به طور مثال طرحهایی که براساس اصلاح فرمول کلاسیک BDF [۱] هستند، متداولند. مثل EBDF [۲], MEBDF [۳], A-BDF [۴]. روشهای رونگه—کوتای ضمنی [۵] دسته دیگری از فرمولها هستند که در مورد مسائل سخت به کار می روند. برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ فرمولهایی با نتایج خوب برای جواب عددی معادلات دیفرانسیل سخت مطرح گردیدند. در مرجع [۱۲] روشهای جدید با خواص خوب و نتایج قابل قبول ولی برای مرتبه های پایین تر پیشنهاد شده اند. در این پایان نامه چگونگی بدست آوردن روشهای جدید با مرتبه های بالاتر (۴، ۵ و ۶) مطرح و بررسی شده است.

---

[۱] Backward differential formula

[۲] Extended backward differential formula

[۳] Modified extended backward differential formula

[۴] Adapted backward differential formula

[۵] Implicit Runge-Kutta

با توجه به اینکه روشهای ضمنی به خوبی عمل می کنند و نیز ناحیه پایداری مطلق روشهای ضمنی جدید بزرگتر از ناحیه پایداری مطلق روشهای کلاسیک است، لذا در این پایان نامه به بررسی روشهای ضمنی خواهیم پرداخت.

در این پایان نامه داریم:

۱— معرفی روش BDF و برخی روشهای اصلاح شده آن.

۲— ارائه روش جدید Adapted BDF بر اساس [۱۱] با استفاده از تکنیک تابع مولد[۶]، (طبق [۱۳]).

۳— بیان قضیه ضرایب روشهای جدید و اثبات آن.

۴— تعریف و بررسی صفر پایداری و رسم نواحی صفر پایداری روش A-BDF.

۵— تعریف و بررسی پایداری مطلق و رسم نواحی پایداری مطلق.

۶— مقایسه روش جدید ارائه شده در [۱۱] با روش MEBDF در جواب عددی مسائل سخت.

[۶] Generating function technique

فصل ۱

پیشنیازها

در این فصل برخی از نماد گذاریها و پیشنیازهایی را که در متن پایان نامه به آنها نیاز داریم، ارائه می‌دهیم.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل و مسئله مقدار اولیه

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ ممکن است تعداد نامتناهی جواب داشته باشد. به عنوان مثال تابع $y(x) = ce^{\lambda x}$ به ازای هر مقدار ثابت c یک جواب از معادله دیفرانسیل $y' = \lambda y$ است، بطوریکه λ یک ثابت دلخواه است. می توان هر جواب خصوصی را با مشخص کردن یک شرط اولیه $y(a) = \eta$ انتخاب کرد. برای مثال بالا جواب خصوصی که در این شرط اولیه نیز صدق می کند به صورت $y(x) = \eta e^{\lambda(x-a)}$ بدست می آید. بنابراین معادله

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(a) = \eta \tag{۱.۱.۱}$$

به مسئله مقدار اولیه موسوم است.

تعریف ۱.۱.۱ تابع f در بازه $[a,b]$ در شرط لیپ شیتس [1] صدق می کند، هرگاه عدد ثابتی مانند $L > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x_1, x_2 \in [a,b]$ داشته باشیم

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \tag{۲.۱.۱}$$

شرط مذکور به شرط لیپ شیتس و ثابت L به ثابت لیپ شیتس معروف است.

قضیه ۱.۱.۱ [۴] (قضیه وجودی) فرض می کنیم تابع حقیقی $f(x,y)$ در دو شرط زیر صدق کند

الف) $f(x,y)$ روی ناحیه مستطیلی

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

که a, b متناهی هستند، تعریف شده و پیوسته باشد.

ب) عدد ثابتی مانند $L > 0$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر $(x,y), (x,y^*) \in D$ داشته باشیم

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq L\,|y - y^*|$$

همچنین فرض می کنیم η یک عدد دلخواه باشد. در این صورت دقیقاً یک تابع $y(x)$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می کند

۱) برای هر $x \in [a,b]$، تابع $y(x)$ مشتق پذیر است.

۲) برای هر $x \in [a,b]$، $y' = f(x,y)$.

۳) $y(a) = \eta$.

---

[1] Lipschitz

تعریف ۲.۱.۱ هر معادله به شکل

$$\gamma_k y_{n+k} + \gamma_{k-1} y_{n+k-1} + ... + \gamma_0 y_n = \phi_n, \qquad (۳.۱.۱)$$

یک معادله تفاضلی خطی از مرتبه k نامیده می شود. ضرایب $\gamma_k, ..., \gamma_1, \gamma_0$ که γ_k, γ_0 مخالف صفرند، ممکن است به n بستگی داشته باشند. اگر به ازای هر n، ϕ_n مساوی صفر باشد، معادله بالا همگن نامیده می شود و در صورتیکه برای $j = 0, 1, ..., k$، γ_j ها ثابت و مستقل از n باشند، معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت نامیده می شود.

جواب چنین معادله تفاضلی، دنباله‌ای بصورت $\{y_n\}$ می باشد.

فرض کنیم $\{y_n^*\}$ جواب عمومی معادله تفاضلی همگن بالا بوده و $\{\psi_n\}$ جواب خصوصی آن باشد، آنگاه جواب این معادله تفاضلی، $\{y_n\}$ است بطوریکه

$$y_n = y_n^* + \psi_n. \qquad (۴.۱.۱)$$

مجموعه جوابهای $\{y_{n,i}\}_{i=1}^k$ معادله تفاضلی، مستقل خطی گفته می شوند اگر $a_1 y_{n,1} + a_2 y_{n,2} + ... + a_k y_{n,k} = 0$، آنگاه $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$.

مجموعه متشکل از k جواب مستقل خطی $\{y_{n,i}^*\}_{i=1}^k$، جواب اساسی معادله تفاضلی نامیده می شود.

جواب عمومی معادله تفاضلی بصورت ترکیب خطی $\{\sum\limits_{i=0}^{k} d_i y_{n,i}\}$ می باشد. فرض می کنیم می خواهیم یک جواب به شکل r_i^n برای معادله تفاضلی ۳.۱.۱ پیدا کنیم. با جایگذاری خواهیم داشت $\gamma_k r_i^k + \gamma_{k-1} r_i^{k-1} + ... + \gamma_0 = 0$ و این تساوی برقرار است اگر r_i صفر چند جمله‌ای $\rho(r) = \gamma_k r^k + \gamma_{k-1} r^{k-1} + ... + \gamma_0$ باشد.

اگر $\rho(r)$، k صفر متمایز r_i که $i = 1, 2, ..., k$، داشته باشد، آنگاه جواب $\{y_n\}$، بصورت

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} d_i r_i^n + \psi_n, \qquad (5.1.1)$$

می باشد.

حال فرض می کنیم $r_1 (= r_2)$ صفر مضاعف $\rho(r)$ و بقیه صفر های r_i که $i = 1, 2, ..., k$، متمایز باشند. جواب معادله تفاضلی ۳.۱.۱، $\{y_n\}$ است بطوریکه

$$y_n = d_1 r_1^n + d_2 n r_1^n + \sum_{i=3}^{k} d_i r_i^n + \psi_n. \qquad (6.1.1)$$

در حالت کلی اگر صفر های $\rho(r)$، r_j با مرتبه تکرار μ_j باشند بطوریکه

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j = k$$

آنگاه جواب عمومی معادله تفاضلی، $\{y_n\}$ است بطوریکه

$$\begin{aligned} y_n = {} & [d_{1,1} + d_{1,2} n + d_{1,3} n(n-1) + ... + d_{1,\mu_1} n(n-1)...(n-\mu_1+2)] r_1^n \\ & + [d_{2,1} + d_{2,2} n + d_{2,3} n(n-1) + ... + d_{2,\mu_2} n(n-1)...(n-\mu_2+2)] r_2^n \qquad (7.1.1) \\ & + ... + [d_{p,1} + d_{p,2} n + d_{p,3} n(n-1) + ... + d_{1,\mu_p} n(n-1)...(n-\mu_p+2)] r_p^n + \psi_n, \end{aligned}$$

k ثابت و μ_j و $d_{j,l}$ که $l = 1, 2, ...$ و $j = 1, 2, ..., p$، دلخواه هستند.

۲.۱ روشهای چندگامی خطی

مسئله مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(a) = \eta \qquad (۸.۲.۱)$$

هدف، یافتن جوابی برای معادله ۸.۲.۱ در بازه $a \leq x \leq b$ (a,b متناهی اند) است.

فرض کنیم f در شرایط وجود جواب پیوسته و مشتق پذیر $y(x)$ صدق می کند. دنباله‌ای از نقاط $\{x_n\}$ تعریف شده به وسیله $x_n = a + nh$، $n = ۰, ۱, ۲, ...$، را در نظر می گیریم. پارامتر h طول گام نامیده می شود. هدف، پیدا کردن تقریبی برای $y(x_n)$، ($n = ۰, ۱, ..., \frac{b-a}{h}$)، در مسئله مقدار اولیه می باشد.

تعریف ۱.۲.۱ روشی که برای محاسبه دنباله $\{y_n\}$ به کار برده می شود از یک رابطه خطی بین مقادیر y_{n+j}, f_{n+j} بطوریکه $j = ۰, ۱, .., k$ استفاده می کند که به این روش، روش چند گامی[۲] گویند. روش $k-$گامی خطی در حالت کلی به شکل زیر می باشد

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j} \qquad (۹.۲.۱)$$

که در آن α_k مخالف صفر بوده و $\beta_۰, \alpha_۰$ همزمان صفر نیستند. می توان فرض کرد که $\alpha_k = ۱$. روش مذکور، صریح نامیده می شود اگر $\beta_k = ۰$ و ضمنی نامیده می شود اگر β_k مخالف صفر باشد.

[۲] Multistep method

بنابراین موضوع تعیین جواب مسئله مقدار اولیه، در حالت کلی عبارت است از پیدا کردن دنباله $\{y_n\}$ که در معادله تفاضلی ۳.۱.۱ صدق کند. مزیت معادلات تفاضلی این است که به ما اجازه می دهند تا دنباله $\{y_n\}$ را بصورت عددی محاسبه کنیم. بدین منظور ابتدا باید مجموعه ای از مقادیر شروع $y_۰, y_۱, ..., y_{k-۱}$ (در روش k گامی) را محاسبه کنیم.

برای یک روش صریح، مقدار y_{n+k} بطور مستقیم از جملات f_{n+j} و y_{n+j}، $(j = ۰, ۱, ..., k - ۱)$، بدست می آیند. برای یک روش ضمنی در هر مرحله از محاسبات داریم

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g, \qquad (۱۰.۲.۱)$$

بطوریکه g یک تابع معلوم از مقادیر محاسبه شده قبلی f_{n+j} و y_{n+j}، $(j = ۰, ۱, ..., k - ۱)$، می باشد. تحت این شرایط جواب منحصر بفرد y_{n+k} از رابطه تکراری زیر بدست می آید

$$y_{n+k}^{[s+۱]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + g \quad , s = ۰, ۱, ۲, ...$$

۳.۱ همگرایی روشهای چند گامی

یک خاصیت اساسی قابل قبول که از یک روش چند گامی انتظار می رود این است که جواب $\{y_n\}$ تولید شده بوسیله آن روش، وقتی که طول گام h به صفر میل می کند، به جواب تحلیلی $y(x)$ میل کند.

تعریف ۱.۳.۱ روش چند گامی خطی را همگرا گوییم هرگاه

$$\begin{aligned} &\lim y_n = y(x) \\ &h \to ۰ \qquad\qquad\qquad\qquad (۱۱.۳.۱) \\ &nh = x - a. \end{aligned}$$

۴.۱ مرتبه و ثابت خطا

عملگر تفاضلی L را برای $\sum\limits_{j=۰}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum\limits_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j}$ بصورت

$$L[y(x), h] = \sum_{j=۰}^{k} \left(\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j y'(x+jh)\right) \qquad (۱۲.۴.۱)$$

تعریف می‌کنیم که $y(x)$ تابع دلخواه روی $a \le x \le b$ مشتق پذیر است. چنین عملگری را می توان برای هر تابع آزمون به کار برد و با فرض دارا بودن مشتقات مراتب بالاتر به تعداد مورد نیاز بدون یافتن جواب مسئله اولیه، تعریف دقیقی برای مرتبه عملگر و روش چند گامی مرتبط با آن ارائه کرد. هرگاه در رابطه ۱۲.۴.۱ بسط تیلور $y'(x+jh), y(x+jh)$ را به کار ببریم در این صورت خواهیم داشت

$$L[y(x), h] = C_۰ y(x) + C_۱ h y^{(۱)}(x) + ... + C_q h^q y^{(q)}(x) + ... \qquad (۱۳.۴.۱)$$

که در آنها C_q ها اعداد ثابتی هستند.

تعریف ۱.۴.۱ روش چند گامی از مرتبه p گفته می شود هرگاه در۱۳.۴.۱ داشته باشیم

$$C_۰ = C_۱ = ... = C_p = ۰ \quad , \quad C_{p+۱} \neq ۰$$

C_{p+1} را ثابت خطا و $C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}$ را خطای برشی موضعی گوییم.

ضرایب C_q ها بر حسب β_j, α_j عبارتند از

$$
\begin{aligned}
&C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_k,\\
&C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + ... + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_k),\\
&.\\
&.\\
&.\\
&C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + ... + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + ... + k^{q-1}\beta_k).
\end{aligned}
\tag{۱۴.۴.۱}
$$

تعریف ۲.۴.۱ هرگاه $y(x)$ جواب تحلیلی مسئله مقدار اولیه ۸.۲.۱ باشد، خطای برشی موضعی در نقطه x_{n+k} عبارت است از $L[y(x_n), h]$. خطای برشی موضعی در x_{n+k} را با T_{n+k} نشان می دهیم.

فرض می کنیم که y_{n+k} با حل مسئله مقدار اولیه ۸.۲.۱ و با فرض

$$y_{n+j} = y(x_{n+j}), \quad j = 0, 1, ..., k-1$$

بدست آید. با توجه به عملگر تفاضلی خطی ۱۲.۴.۱، داریم

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y(x_n + jh) &= h\sum_{j=0}^{k}\beta_j y'(x_n + jh) + L[y(x_n), h]\\
&= h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_n + jh, y(x_n + jh)) + L[y(x_n), h],
\end{aligned}
$$

در اینجا، $y(x)$ جواب تحلیلی مسئله مقدار اولیه در نظر گرفته شده است و مقدار y_{n+k} در

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

صدق می کند. با تفریق دو رابطه اخیر، داریم

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k} = h\beta_k(f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) - f(x_{n+k}, y_{n+k})) + L[y(x_n), h],$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم

$$f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) - f(x_{n+k}, y_{n+k}) = (y(x_{n+k}) - y_{n+k})\frac{\partial f(x_{n+k}, \eta_{n+k})}{\partial y}$$

که در آن η_{n+k} یک نقطه درونی از بازه‌ای است که نقاط انتهایی آن y_{n+k} و $y(x_{n+k})$ می باشند. بنابراین داریم

$$(۱ - h\beta_k\frac{\partial f(x_{n+k}, \eta_{n+k})}{\partial y})(y(x_{n+k}) - y_{n+k}) = L[y(x_n), h] = T_{n+k},$$

در نتیجه برای یک روش صریح (وقتی که $\beta_k = ۰$) خطای برشی موضعی، تفاضل بین جواب تحلیلی و جواب داده شده بوسیله روش چند گامی خطی می باشد.

تعریف ۳.۴.۱ اگر y_{n+j} ، $(j = ۰, ۱, ..., k - ۱)$، بر جواب تحلیلی منطبق نباشد، آنگاه $y(x_{n+k}) - y_{n+k}$ را خطای برشی کلی گوییم و با e_{n+k} نمایش می دهیم.

۵.۱ سازگاری

تعریف ۱.۵.۱ روش چند گامی خطی ۹.۲.۱ را سازگار گوییم اگر $p \geq ۱$. بنابر این روش سازگار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j = ۰\,, \quad \sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=۰}^{k} \beta_j. \qquad (۱۵.۵.۱)$$

قضیه ۱.۵.۱ [صفحه ۳۰: [۶]] سازگاری شرط لازم برای همگرایی است.

اثبات : در طول این اثبات، حدود را به همان صورت که در تعریف همگرائی استفاده شد، در نظر می گیریم. فرض کنیم داشته باشیم $y_n \to y(x)$. چون k ثابت است و همچنین برای $j = ۰, ۱, ..., k$ داریم

$$y_{n+j} \to y(x),$$

یا

$$y(x) = y_{n+j} + \theta_{n,j}(h),$$

بطوریکه $\lim_{n\to\infty} \theta_{n,j}(h) = ۰$. پس

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y(x) = \sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y_{n+j}$$

لذا داریم

$$y(x) \sum_{j=۰}^{k} \alpha_j = h \sum_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j} + \sum_{j=۰}^{k} \alpha_j \theta_{n,j}(h),$$

حد هر دو قسمت در سمت راست صفر می باشد. بنابراین

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j = ۰,$$

در نتیجه اولین شرط سازگاری برقرار است. شرط دوم به این معنی است که تابع $y(x)$ در شرط معادله دیفرانسیل صدق می کند.تحت حد گیری به ازای $j = ۱, ..., k$، داریم

$$\frac{y_{n+j} - y_n}{jh} \to y'(x),$$

یا

$$y_{n+j} - y_n = jhy'(x) + jh\phi_{j,n}(h), \quad j = ۰, ۱, ۲, ..., k.$$

بطوریکه $\lim_{n\to\infty} \phi_{j,n}(h) = ۰$. بنابراین داریم

$$\sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y_{n+j} - \sum_{j=۰}^{k} \alpha_j y_n = h\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j y'(x) + h\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j \phi_{j,n}(h),$$

یا

$$h\sum_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j} - y_n \sum_{j=۰}^{k} \alpha_j = hy'(x)\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j + h\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j \phi_{j,n}(h),$$

با توجه به شرط اول سازگاری، با تقسیم طرفین رابطه بالا بر h خواهیم داشت

$$\sum_{j=۰}^{k} \beta_j f_{n+j} = y'(x)\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j + \sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j \phi_{j,n}(h),$$

با حد گیری داریم

$$f_{n+j} \to f(x, y(x)),$$

بنابراین

$$f(x, y(x))\sum_{j=۰}^{k} \beta_j = y'(x)\sum_{j=۰}^{k} j\alpha_j,$$