





دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض

بررسی خواصی از گروه‌های کامل در یک چندگونای دلخواه

پژوهش و نگارش:

مهرداد پرویزیان

استاد راهنما:

دکتر سید مصطفی طاهری

استاد مشاور:

دکتر محبوبه علیزاده صنعتی

۱۳۸۹

**کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به
دانشگاه گلستان است.**

تعهد نامه پژوهشی

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه گلستان مبین بخشی از فعالیت های علمی- پژوهشی بوده و همچنین با استفاده از اعتبارات دانشگاه انجام می شود، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

۱. قبل از چاپ پایان نامه (رساله) خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه اطلاع و کسب اجازه نمایند.

۲. در انتشار نتایج پایان نامه (رساله) در قالب مقاله، همایش، اختراع و اکتشاف و سایر موارد، ذکر نام دانشگاه گلستان الزامی است.

۳. انتشار نتایج پایان نامه (رساله) باید با اطلاع و کسب اجازه از استاد راهنما صورت گیرد.

اینجانب **مهرداد پرویزیان** دانشجوی رشته **ریاضی گرایش محض مقطع کارشناسی ارشد** تعهدات فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده و به آن ملتزم می شوم.

تقدیم ہے

پدرو مادر مہربان و دلسوزم کہ ہموارہ پشتیانم ہستند

و ہمسرم، ہمراہ ویاور صبورم

تشکر و قدردانی

در ستایش یکتای دانا همان بس که زینت "خداوندگار جان و خرد" مزین نامش است و اندیشه‌ای برتر از او برنگذرد.^۱

در انجام این پایان‌نامه از کمک و مشاوره اساتید و دوستان بزرگواری برخوردار بوده‌ام. مراتب امتنان و سپاس خالصانه‌ام را از این عزیزان ابراز می‌دارم و مسئولیت هر گونه اشکال احتمالی در نگارش، نوشتار و یا اثبات‌های ارائه شده را به عهده می‌گیرم.

برخود لازم می‌دارم تا یادآور نام برخی از این بزرگواران به شرح ذیل باشم.

دکتر سید مصطفی طاهری استاد محترم راهنما، جهت ارائه راهنمایی‌های مفید در انجام این پروژه.

دکتر محبوبه علیزاده صنعتی استاد محترم مشاور که با مشورت‌های سازنده خویش، شبیه‌ها و ایرادهای نمایان شده در حین کار را مرتفع نمودند.

دکتر محسن اصغری لاریمی و پروفسور محمد رضا رجب‌زاده مقدم جهت انجام امر داوری و تصحیح این رساله.

و در نهایت احساس خوشوقتی و شادی دارم که با اتمام این مجموعه به‌عنوان اولین دانش‌آموخته ریاضی دانشگاه گلستان، گامی هرچند کوچک در جهت پیشبرد این دانش وسیع برداشته‌ام.

۱- اشاره به بیت "به‌نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد" شاعر بزرگ ایران‌زمین، فردوسی.

چکیده

گروه‌های کامل در یک چندگونای دلخواه \mathcal{G} (گروه‌های \mathcal{G} - کامل) بعد از تعریف چندگونای گروه‌ها توسط فیلیپ هال در سال ۱۹۴۹، معرفی شدند که در حالت خاص چندگونای گروه‌های آبلی، همان مفهوم گروه‌های کامل را نتیجه می‌دهند.

در این پایان‌نامه سعی شده است تا برخی خواص اساسی گروه‌های کامل را جمع‌آوری کنیم. سپس آن‌ها را برای گروه‌های \mathcal{G} - کامل تعمیم دهیم و همچنین با ارائه روش‌هایی نظیر حاصل ضرب مستقیم، حاصل ضرب نیم‌مستقیم و حاصل ضرب مرکزی، گروه‌های \mathcal{G} - کامل جدید بسازیم.

برای هر گروه دلخواه، یک زیرگروه پایای کامل بیشین \mathcal{G} - کامل منحصر به فرد می‌سازیم. همچنین برای هر گروه \mathcal{G} - کامل، یک گروه \mathcal{G} - پوششی می‌یابیم و با تعمیم مفهوم گروه‌های ابرمرکز، گروه‌های ابرمارجینال را معرفی می‌کنیم که در حالت خاص چندگونای گروه‌های آبلی، همان مفهوم گروه‌های ابرمرکز را نتیجه می‌دهند. به علاوه نشان می‌دهیم که هیچ گروه \mathcal{G} - کامل متناهی غیر بدیهی، ابرمارجینال نمی‌باشد.

در نهایت با تعریف مفهوم چندگونای فازی، رده‌ای از گروه‌های فازی بسته نسبت به زیرگروه، تصویر همریخت و حاصل ضرب زیردکارتی عناصرش، می‌سازیم.

واژه‌های کلیدی: گروه کامل، چندگونا، گروه پوششی، گروه ابرمارجینال و چندگونای فازی

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
ت	پیشگفتار
ت	مقدمه
ج	تعریف مسئله و ضرورت تحقیق
ح	فرضیه‌های تحقیق
خ	اهداف تحقیق
۱	فصل ۱- پیش‌نیازها
۲	۱-۱- یادآوری‌هایی از جبر مقدماتی
۱۱	۲-۱- چندگونا و مفاهیم مرتبط
۳۳	فصل ۲- گروه‌های کامل
۳۴	۱-۲- جابه‌جاگرها و زیرگروه مشتق
۴۲	۲-۲- تعریف و بررسی خواص ابتدایی گروه‌های کامل
۴۷	۳-۲- گروه‌های کامل A_5 و $SL(2,5)$
۵۵	فصل ۳- گروه‌های \mathcal{G} - کامل
۵۶	۱-۳- حاصل ضرب‌ها
۶۲	۲-۳- رادیکال \mathcal{G} - کامل
۶۸	۳-۳- \mathcal{G} - ایزولجیسم و تحویل‌ناپذیری نسبت به \mathcal{G} - ایزولجیسم
۷۵	۴-۳- \mathcal{G} - گروه پوششی
۷۷	۵-۳- گروه‌های ابرمارجینال
۸۷	فصل ۴- گروه‌های $F\mathcal{G}$ - کامل
۸۸	۱-۴- مقدماتی از جبر فازی

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۹۱	۲-۴- تعاریف
۹۹	۳-۴- نتایج
۱۰۳	فصل ۵- نتایج و بحث
۱۰۴	۱-۵- جمع بندی کلی نتایج
۱۰۶	۲-۵- پیشنهادات
۱۰۷	منابع

پیشگفتار

مقدمه

مفهوم گروه‌های کامل برای اولین بار به‌نوعی توسط آر و ایتو با معرفی A_n ها ($n \geq 5$) به‌عنوان اولین مثال از گروه‌هایی که هر عنصرشان را می‌توان به‌عنوان یک جابه‌جاگر نوشت، معرفی گردید [۲۵ و ۱۵].

گروه‌های \mathcal{G} - کامل بعد از معرفی چندگونای توسط فیلیپ هال در سال ۱۹۴۹، مطرح گردیدند که در حالت خاص چندگونای گروه‌های آبلی همان مفهوم گروه‌های کامل را نتیجه می‌دهند [۱۲]. در این پایان‌نامه سعی شده است تا در حد توان، ساختار و برخی خصوصیات این گروه‌ها را بهتر بشناسیم. با هدف تعمیم قضایای صادق درباره گروه‌های کامل، سعی نموده‌ایم تا درستی یا عدم درستی آن‌ها را برای گروه‌های \mathcal{G} - کامل، بررسی کنیم.

فصل اول این پایان‌نامه، پیش‌نیازهای لازم جهت درک راحت‌تر فصول بعدی آن را دربر دارد و در دو بخش "یادآوری‌هایی از جبر مقدماتی" و "چندگونا و مفاهیم مرتبط" تنظیم شده است. در فصل دوم گروه‌های کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این فصل با شناسایی این گروه‌ها نشان می‌دهیم که می‌توان خانواده جدیدی از گروه‌های غیربدیهی ناآبلی را در نظر گرفت که ابرمرکز، حل‌پذیر، چنددوری و زبرحل‌پذیر نیستند و همچنین نسبت به تصویر همریخت و حاصل‌ضرب مستقیم هر تعداد متناهی از عناصرش بسته است. هالت و پلسکن منبع جامعی در کتاب [۱۳] ارائه کرده‌اند که تجزیه و تحلیل این گروه‌ها را ساده‌تر نموده است.

این فصل شامل سه بخش است، در بخش اول جابه‌جاگر و زیرگروه مشتق معرفی و خصوصیات اصلی آن‌ها بررسی می‌گردد. در بخش دوم، گروه‌های کامل معرفی و برخی نتایج اولیه از این تعریف استنتاج می‌شوند و همچنین با اثبات لم گرون برای این گروه‌ها، درباره مفهوم ابرمرکزبودن آن‌ها که توسط بئر در سال ۱۹۵۳ معرفی گردید و همچنین حل‌پذیری این گروه‌ها، بحث می‌کنیم [۶]. در نهایت، در بخش آخر این فصل به بررسی دقیق‌تر دو گروه شناخته شده کامل A_5 و $SL(2,5)$ می‌پردازیم.

در فصل سوم که به نوعی تعمیم و افزایش نتایج فصل دوم است، گروه‌های \mathcal{G} - کامل را معرفی کرده و خصوصیات آن‌ها در ۵ بخش به شرح زیر ارائه می‌دهیم.

بخش اول به بررسی \mathcal{G} - کامل بودن انواع حاصل ضرب‌های گروه‌های \mathcal{G} - کامل می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که توسیع یک گروه \mathcal{G} - کامل توسط گروه \mathcal{G} - کامل دیگر، \mathcal{G} - کامل است و از آن نتیجه می‌گیریم که حاصل ضرب مستقیم و حاصل ضرب مرکزی هر تعداد متناهی از گروه‌های \mathcal{G} - کامل، \mathcal{G} - کامل است. به علاوه در این بخش ثابت می‌شود که حاصل ضرب نیم‌مستقیم دو گروه \mathcal{G} - کامل، \mathcal{G} - کامل است. همچنین نشان داده می‌شود اگر $\{G_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از گروه‌ها و G حاصل ضرب آزاد \mathcal{G} - کامل آن‌ها باشد، آن‌گاه G_i ها نیز \mathcal{G} - کامل هستند.

در بخش دوم، نتایج فینکلستین درباره مفهوم رادیکال کامل برای هر گروه دلخواه G [۷]، را تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم هر گروه دلخواه G ، دارای یک زیرگروه نرمال بیشین منحصر به فرد \mathcal{G} - کامل $P_{\mathcal{G}}(G)$ است و آن را رادیکال \mathcal{G} - کامل G می‌نامیم و برابر با اشتراک عناصر سری وریال پایینی G بدست می‌آوریم و از آن نتیجه می‌گیریم که برای هر گروه \mathcal{G} - کامل G ، $P_{\mathcal{G}}(G) = G$.

بخش سوم مربوط به \mathcal{G} - ایزولجیسم و تحویل ناپذیری نسبت به آن است. رجب‌زاده مقدم، سالمکار و ریسمانچیان در [۲۲] نشان دادند که هیچ گروه \mathcal{G} - کامل متناهی \mathcal{G} - ایزولجیک با یک زیرگروه سره یا خارج قسمتی خود نمی‌باشد. ما در بخش سوم با استفاده از نتایج هکستر [۱۲] نشان دادیم که اولاً هر گروه \mathcal{G} - کامل زیرگروه و خارج قسمت تحویل ناپذیر نسبت به \mathcal{G} - ایزولجیسم است و ثانیاً هر گروه G که با یک زیرگروه \mathcal{G} - کامل خود، \mathcal{G} - ایزولجیک باشد، به صورت $G = V(G)V^*(G)$ قابل تجزیه است.

در بخش چهارم ساختار گروه \mathcal{G} - پوششی گروه‌های \mathcal{G} - کامل به شرح زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

بعد از آن که مفهوم گروه پوششی یک گروه متناهی، برای اولین بار در سال ۱۹۰۴ توسط شور بیان و ضربگر شور به پایای بئر تعمیم داده شد، مفهوم گروه پوششی نیز به گروه \mathcal{G} - پوششی توسیع داده شد [۳]. رجب‌زاده مقدم، سالمکار و ریسمانچیان نشان دادند که $\mathcal{G}P(G)$ یک گروه \mathcal{G} - پوششی برای گروه \mathcal{G} - کامل G است [۲۲].

در نهایت در آخرین بخش از این فصل، مفهوم گروه‌های ابرمرکز بئر را تعمیم داده و مفهوم جدیدی به نام گروه‌های ابرمارجینال معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تصویر همریخت و حاصل ضرب مستقیم هر تعداد متناهی گروه ابرمارجینال، ابرمارجینال می‌باشد و هیچ گروه \mathcal{G} - کامل متناهی غیربدیهی، ابرمارجینال نمی‌باشد.

فصل آخر این پایان‌نامه گریزی به جبر فازی است. در کتاب [۲۳] مفهوم گروه فازی و متعاقب آن گروه فازی آزاد روی یک مجموعه دلخواه تعریف شده است، اما مفهومی معادل چندگونای گروه‌های معمولی برای گروه‌های فازی ارائه نشده است، یعنی رده‌ای از گروه‌های فازی که در تعریف جبر جامع چندگونا صدق می‌کند، در نتیجه نسبت به زیرگروه، تصویر همریخت و حاصل ضرب زیردکارتی عناصرش بسته است. در بخش اول این فصل، مقدماتی از جبر فازی که پیش‌نیاز دو بخش دیگر است، یادآوری می‌شوند. در بخش دوم، مفهومی ارائه دادیم که در خواص یک چندگونا می‌گنجد و آن را چندگونای فازی نامیدیم و متعاقب آن زیرگروه وربال فازی، زیرگروه مارجینال فازی و گروه فازی کامل در یک چندگونای فازی را تعریف نمودیم. سپس با ارائه مثال‌هایی از گروه‌های فازی، به محاسبه زیرگروه‌های وربال فازی برای آن‌ها پرداختیم.

در نهایت در آخرین بخش این فصل، ادعای خود درباره صدق کردن چندگونای فازی تعریف شده در خاصیت جبر جامع چندگونا، را ثابت نمودیم [۲۶].

تعریف مسئله و ضرورت تحقیق

طبقه‌بندی گروه‌ها همواره یکی از اهداف اصلی نظریه گروه‌ها می‌باشد. این عمل باعث می‌شود تا ساختار گروه‌هایی را که در یک رده خاص قرار می‌گیرند، راحت‌تر بشناسیم. روش‌های زیادی برای این کار ارائه شده است که منجر به معرفی رده‌های بسیاری از گروه‌ها شده است. یکی از این ابزارهای طبقه‌بندی، مفهوم چندگونا است که منجر به یک دسته‌بندی وسیع از گروه‌ها می‌گردد. ساختن گروه‌های جدید که در این طبقه‌بندی سازگار باشند، نیز همواره یکی از اهداف محققان در نظریه گروه‌ها بوده است.

گروه‌های کامل در یک چندگونای دلخواه، نیز گونه دیگری از این طبقه‌بندی‌هاست. در این پایان‌نامه سعی گردیده تا با بررسی خواص این رده از گروه‌ها، روش‌هایی نظیر حاصل ضرب مستقیم،

حاصل ضرب نیم‌مستقیم، حاصل ضرب مرکزی و گروه \mathcal{G} - پوششی، جهت ساختن گروه‌های \mathcal{G} - کامل دیگر ارائه شود. همچنین با بیان مفهوم جدید رادیکال \mathcal{G} - کامل، نشان دادیم که هر گروه دلخواه G ، دارای زیرگروهی است که در این رده از گروه‌ها (گروه‌های \mathcal{G} - کامل) قرار می‌گیرد.

فرضیه‌های تحقیق

فرض کنید X یک مجموعه و F یک گروه و $\sigma: X \rightarrow F$ یک نگاشت باشد. F را روی X آزاد گویند هرگاه به ازای هر گروه G و هر نگاشت $\alpha: X \rightarrow G$ هم‌ریختی منحصر به فرد $\beta: F \rightarrow G$ وجود داشته باشد به طوری که $\beta\sigma = \alpha$. در این صورت F گروه آزاد روی مجموعه X و یا به اختصار گروه آزاد گویند.

اگر F_∞ یک گروه آزاد روی مجموعه شمارای نامتناهی $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ و V زیرمجموعه ناتهی از F_∞ باشد. به هر عنصر از V یک کلمه گویند که به صورت $v = v(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ و $x_{i_j} \in X$ ، $1 \leq j \leq k$ هر می‌باشد و در آن به ازای هر $\alpha_j = \pm 1$. به ازای گروه دلخواه G و عناصر g_1, \dots, g_k مفروض از آن، $v = v(g_1, \dots, g_k) = g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}$ را مقدار کلمه v نسبت به (g_1, \dots, g_k) گویند. زیرگروه وربال G را با نماد $V(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(G) = \langle v(g_1, \dots, g_k) \mid v \in V, 1 \leq i \leq k, g_i \in G, k \in \mathbb{N} \rangle.$$

زیرگروه مارچینال گروه G نسبت به V را با نماد $V^*(G)$ نشان داده و به صورت مجموعه زیر تعریف می‌کنند.

$$V^*(G) = \left\{ a \in G \mid v(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \dots, g_k) = v(g_1, \dots, g_k); \right. \\ \left. v \in V, g_i \in G, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

رده همه گروه‌ها G که $V(G) = G$ ، یک چند گونا از گروه‌ها نامیده می‌شود و با نماد \mathcal{G} نشان داده می‌دهند. به عبارت دیگر $\mathcal{G} = \{G \mid V(G) = G\}$. گروه G را در چندگونای \mathcal{G} ، کامل (\mathcal{G} - کامل) گویند هرگاه $V(G) = G$.

اهداف تحقیق

در این کار تحقیقاتی سعی شده است تا به اهداف ذیل برسیم

- (الف) شناخت مفهوم و درک جایگاه چندگونا به عنوان ابزاری قدرتمند جهت دسته‌بندی گروه‌ها.
- (ب) بررسی برخی خواص گروه‌های \mathcal{G} - کامل به عنوان یک طبقه‌بندی جدید از گروه‌ها، جهت شناخت بهتر ساختار آن‌ها.
- (پ) تعمیم خواص ساختاری گروه‌های کامل به گروه‌های \mathcal{G} - کامل و تعریف مفاهیم جدید که در حالت خاص، همان مفاهیم قبلی را نتیجه دهند.
- (ت) ارائه روش‌هایی جهت ساختن گروه‌های \mathcal{G} - کامل جدید و بررسی شرایط تجزیه‌پذیری این گروه‌ها در مفهوم چندگونا.
- (ث) تعمیم مفهوم چندگونا برای گروه‌های فازی و معرفی و بررسی خواص گروه‌های فازی کامل در یک چندگونای فازی.

