بسم الله الرحمن الرحيم

٢٥٩٠٩

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مباحثی در گروه‌های موضعاً مدرج

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

کورش زرین قلم

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۸۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای کورش زرین قلم

تحت عنوان

مباحثی درگروههای موضعاً مدرج

در تاریخ ۸۰/۳/۲۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرارگرفت.

۱-استاد راهنمای پایان نامه دکتر بیژن طائری

۲-استاد مشاور پایان نامه دکتر احمد حقانی

۳-استاد داور ۱ دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

۴-استاد داور ۲ دکتر منصور آقاسی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر امیر نادری

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند بزرگ را که همواره مرا مورد الطاف خود قرار داده و در راه کسب دانش به من گامی استوار و پشتوانه‌ای محکم همچون خانواده‌ام عطا فرمود. لازم می‌دانم از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر طائری که مرا با شیوه صحیح تحقیقات علمی آشنا نمود و ارزش والای سخت کوشی و نظم را به من نشان داد و همواره مرا در انجام این پایان نامه یاری رساند صمیمانه تشکر کنم. همچنین از جناب آقای دکتر حقانی، استاد مشاور پایان نامه، آقای دکتر زنگنه، ریاست محترم دانشکده ریاضی و آقای دکتر نادری، سرپرست محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی به خاطر همکاریهای صمیمانه شان سپاسگزارم و مراتب قدردانی خویش را به این اساتید بزرگوار ابراز می‌دارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات ، ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

با کمال احترام :

تقدیم به خانواده‌ام

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنیم X کلاسی از گروهها باشد. گوئیم گروه G در شرط X^* صدق می‌کند هرگاه هر زیر مجموعه نامتناهی G شامل زوجی باشد که گروهی را در کلاس X تولید کنند. ایده رده بندی گروههای صادق در شرط X^* از نویمان است. نویمان در پاسخ به سوال معروف پل اردوش نشان داد که شرط A^* معادل با شرط مرکز-بواسطه-متناهی است. در اینجا منظور از A کلاس گروههای آبلی است. پاسخ مثبت نویمان به سوال پل اردوش مورد توجه بسیاری قرار گرفت و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شد. به عنوان مثال می‌توان به نتایج بدست آمده توسط لنوکس و وایگلد اشاره کرد که نشان دادند در مورد گروههای با تولید متناهی حلپذیر، شرط N^* معادل با شرط متناهی - بواسطه پوچتوان و شرط P^* معادل با چند دوری بودن است در اینجا N کلاس گروههای پوچتوان و P کلاس گروههای چند دوری هستند. در این پایان نامه بعضی از نتایج بدست آمده در روند رده بندی گروههای صادق در شرط X^* را برای کلاس گروههای بطور مانده‌ای متناهی، حلپذیر و موضعاً مدرج بررسی خواهیم کرد. گروه G را مدرج نامیم هرگاه هر زیرگروه با تولید متناهی از G دارای یک تصویر متناهی نابدیهی باشد. همچنین به ذکر خواص اساسی گروههای موضعاً مدرج و بسته بودن کلاس گروههای موضعاً مدرج نسبت به بعضی از خواص خواهیم پرداخت و شرایط ترکیبیاتی روی این کلاس از گروهها و کلاس گروههای حلپذیر و بطور مانده‌ای متناهی را بررسی خواهیم کرد.

مقدمه

فرض کنیم X کلاسی از گروهها باشد. می‌گوییم گروه G در شرط X^* یا (X, ∞) صدق می‌کند هرگاه هر زیر مجموعه نامتناهی از عناصر G شامل زوجی باشد که گروهی را در کلاس X تولید کنند. نمادگذاری کلاسهای گروهها استاندارد است. مثلاً A برای کلاس گروههای آبلی، P برای کلاس گروههای چند دوری، N برای کلاس گروههای پوچتوان، N_k برای کلاس گروههای پوچتوان از کلاس حداکثر k و E_k برای کلاس گروههای k-انجل. ایده رده بندی گروههای صادق در شرط X^* از نویمان است. او در پاسخ به سوال معروف پل اردوش که آیا در کلاس گروههای A^* کران متناهی برای عدد اصلی زیر مجموعه‌های متشکل از عناصری که دو به دو با هم جابجا نمی‌شوند وجود دارد، نشان داد که گروه G در کلاس A^* قرار دارد اگر و تنها اگر این گروه مرکز-بواسطه-متناهی باشد. روند کار نویمان بدین صورت بود که ابتدا با استفاده از قضیه رمزی نشان داد که گروههای صادق در شرط A^* مرکز-بواسطه-متناهی هستند. سپس نشان داد که FC-گروههایی که مرکز-بواسطه-متناهی نیستند، نمی‌توانند در کلاس A^* قرار داشته باشند و چون تمام گروههای صادق در شرط A^*، FC-گروه هستند، نتیجه می‌شود که گروههای مرکز بواسطه متناهی در کلاس A^* قرار دارند. این نتایج نقطه شروع تحقیقات بسیار گسترده‌ای در مورد گروههای صادق در شرط X^* بود. مثلاً لنوکس و وایگلد ثابت کردند که برای هر گروه با تولید متناهی و حلپذیر شرط N^* معادل با شرط متناهی بواسطه پوچتوان است و شرط P^* معادل با چند دوری بودن است. در ادامه این روند دلیزیا در دو مقاله جداگانه نشان داد که چه در مورد گروههای بطور مانده‌ای متناهی و چه در مورد

گروههای حلپذیر با تولید متناهی شرط N_2^* روی گروه G معادل با این است که $G/Z_2(G)$ متناهی باشد در توسیع این نتیجه عبداللهی و طائری نتیجه گرفتند که اگر $G/Z_k(G)$ متناهی باشد، در این صورت G در کلاس گروههای متناهی - بواسطه - $N(2,k)$ قرار دارد که در اینجا منظور از نماد $N(2,k)$ کلاس گروههایی است که هر زیر گروه دو مولدی آنها پوچتوان از کلاس حداکثر k می باشد. همچنین ثابت کردند که عکس این مطلب برقرار نیست. گروه G را موضعاً مدرج نامیم هرگاه هر زیر گروه با تولید متناهی از G دارای یک تصویر متناهی نابدیهی باشد. این کلاس وسیع از گروهها شامل گروههای بطور ماندهای متناهی و گروههای موضعاً حلپذیر است. با استفاده از چند نتیجه بسیار عمیق از زلمانوف بود که دلیزیا، رحمت الله و اسمیت یک توسیع اساسی از تمام نتایج ذکر شده در فوق را ارائه کردند. قضیه اساسی آنها بدین شرح است:

فرض کنیم G یک گروه با تولید متناهی موضعاً مدرج در کلاس N_k^* باشد. در این صورت یک عدد صحیح c که فقط به k بستگی دارد موجود است بطوریکه $G/Z_c(G)$ متناهی است.

در روندی مشابه، لانگابادی نشان داد که یک گروه موضعاً مدرج با تولید متناهی در کلاس E_k^* متناهی - بواسطه - k - انجل است. این تحقیقات همچنان ادامه دارند.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد. در فصل یک ابتدا چند تعریف و قضیه اساسی را که در فصول بعدی مورد نیازند ذکر خواهیم کرد. همچنین در این فصل به معرفی حاصلضرب دوگانه حلقوی، گروههای قوی و گروههای موضعاً مدرج می‌پردازیم و به اختصار برخی از نتایج عمیق بدست آمده توسط زلمانوف را ذکر خواهیم کرد. در فصل دو به بررسی برخی از نتایج بدست آمده توسط لنوکس، وایگلد، دلیزیا و عبدالهی و طائری در روند رده بندی گروههای صادق در شرط X^* که به اختصار به آنها اشاره کردیم می‌پردازیم و شرطهای N_2 و N_k^* را بررسی می‌کنیم. فصل سوم به بررسی خواص مقدماتی گروههای موضعاً مدرج اختصاص دارد. در نظریه گروهها بسته بودن یک کلاس داده شده از گروهها نسبت به بعضی از خواص از اهمیت زیادی برخوردار است. در این فصل بعضی از این خواص را در مورد کلاس گروههای موضعاً مدرج بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال این کلاس از گروهها نسبت به تشکیل تصاویر همریختی بسته نیست اما در برخی از حالات ضعیفتر این مسئله برقرار است که آنها را به تفصیل در فصل سوم بررسی می‌کنیم. گروه G را مهار شده نامیم هرگاه برای هر x, y دلخواه در گروه G، گروه $\langle x, y\rangle$ با تولید متناهی باشد. گروه G را n-جمع شده نامیم هرگاه برای هر مجموعه n-عنصری S از G، $|S^n| < N^n$. این گروهها نقش اساسی در بررسی گروههای بطور ماندهای متناهی و گروههای حلپذیر دارد.

این گروهها و برخی از خواص آنها را در فصل چهارم بررسی می‌کنیم. همچنین در این فصل یک قضیه اساسی را در مورد گروههای موضعاً مدرج ذکر می‌کنیم. فصل پنجم به بررسی نتایج بدست آمده توسط دلیزیا، رحمت الله، اسمیت و لانگاباردی اختصاص دارد. در این فصل شرط پوچتوانی روی زیر مجموعه‌های نامتناهی و شرط انجل روی زیر مجموعه‌های نامتناهی را بررسی می‌کنیم و به تفصیل توسیعهای بدست آمده از نتایج قبلی را که به اختصار به آنها اشاره شد ذکر خواهیم کرد.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل به ذکر چند تعریف، لم و قضیه که در فصول بعدی مورد نیازند می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و پیشنیازها

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه با تولید متناهی باشد. در این صورت هر زیرگروه با اندیس متناهی در G با تولید متناهی است.

اثبات. فرض کنیم $G = \langle x_{۱}, \ldots, x_n \rangle$ و $H \leq G$ بطوریکه $|G:H| = m < \infty$ که در اینجا m و n اعداد صحیح مثبتی هستند. برای هر $j = ۱, \ldots, n$ قرار می‌دهیم $x_{n+j} = x_j^{-۱}$. فرض کنیم $g_{۱}, \ldots, g_m$ عناصری از G باشند بطوریکه $G = \bigcup_{i=۱}^{m} Hg_i$ و $g_{۱} = ۱$. در این صورت برای هر زوج مرتب (i, j) که $i \in \{۱, \ldots, m\}$ و $j \in \{۱, \ldots, ۲n\}$، یک عنصر یکتای $h_{ij} \in H$ و یک عدد صحیح یکتای $k \in \{۱, \ldots, m\}$ وجود دارند بطوریکه $g_i x_j = h_{ij} g_k$. حال فرض کنیم $h \in H$ عنصر دلخواهی از H باشد. عناصر $x_{i_{۱}}, \ldots, x_{i_r}$ برای $i_{۱}, \ldots, i_r \in \{۱, \ldots, ۲n\}$ موجودند بطوریکه

$$h = x_{i_{۱}} \ldots x_{i_r}$$

از طرفی $h = g_1 h$ بنابراین

$$h = g_1 x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

و لذا $k_1 \in \{1, \ldots, m\}$ موجود است بطوریکه

$$h = h_{1i_1} g_{k_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

بطریق مشابه $k_2 \in \{1, \ldots, m\}$ موجود است بطوریکه $g_{k_1} x_{i_2} = h_{k_1} g_{k_2}$ و لذا

$$h = h_{1i_1} h_{k_1 i_2} g_{k_2} x_{i_3} \cdots x_{i_r}$$

و با ادامه همین روند داریم،

$$h = h_{1i_1} h_{k_1 i_2} h_{k_2 i_3} \cdots h_{k_{r-1} i_r} g_{k_r}$$

قرار می‌دهیم

$$h_0 = h_{1i_1} h_{k_1 i_2} \cdots h_{k_{r-1} i_r} \ ,$$
$$g = g_{k_r}$$

به وضوح $h_0 \in \langle h_{i_j} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, 2n \rangle$ لذا $h = h_0 g$ که $g \in \{g_1, \ldots, g_m\}$ بنابراین $g \in H$ از طرفی چون $g_2, \ldots, g_m$ متعلق به H نیستند، لذا $g = g_1 = 1$ بنابراین $h = h_0 \in \langle h_{i_j} \mid c = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, 2n \rangle$ و در نتیجه

$$H = \langle h_{i_j} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, 2n \rangle$$

و H با تولید متناهی است. □

لم ۲.۱.۱ اگر H یک زیرگروه با اندیس متناهی از گروه G باشد، آنگاه یک زیرگروه N از H با اندیس متناهی در G وجود دارد بطوریکه N در G نرمال است.

اثبات. می‌دانیم که $H \leq N_G(H)$ و چون اندیس H در G متناهی است، لذا اندیس H در $N_G(H)$ نیز متناهی است. بنابراین H تعداد متناهی مزدوج در G دارد. فرض کنیم

$$H = H_1, H_2, \ldots, H_m$$

مزدوجهای H در G باشند. چون برای هر $i = 1, \ldots, m$،

$$|G : H_i| = |G : H| < \infty$$

نتیجه می‌شود که گروههای $H_1, H_1 \cap H_2, \ldots, H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m$ همگی در G از اندیس متناهی هستند. قرار می‌دهیم $N = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$. در این صورت به وضوح N دارای خواص مورد نظر است. □

لم ۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه k مولدی باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $n>0$، تعداد زیر گروههای نرمال G با اندیس کوچکتر یا مساوی n، حداکثر $(n!)^k$ است.

اثبات. فرض کنیم $N_1, ..., N_m$ زیر گروههای نرمال متمایزی از G با اندیس کوچکتر یا مساوی n باشند. در این صورت برای هر $i = 1, ..., m$، G روی مجموعه همدسته‌های راست N_i در G، با ضرب از راست عمل می‌کند. قرار می‌دهیم،

$$X_i = \{N_i x \mid x \in G\}$$

در این صورت برای هر $g \in G$ و هر $N_i x \in X_i$ عنصر $(N_i x)g = N_i xg$ متناظر می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} Stab_G(N_i x) &= \{g \in G \mid N_i xg = N_i x\} \\ &= \{g \in G \mid xgx^{-1} \in N_i\} \\ &= x^{-1} N_i x = N_i \end{aligned}$$

اگر θ_i نمایش جایگشتی عمل گروه G روی مجموعه X_i باشد، در این صورت به وضوح

$$Ker\,\theta_i = N_i$$

بنابراین متناظر با هر N_i ، $1 \le i \le m$ یک همریختی θ_i از G به گروه متقارن S_n وجود دارد بطوریکه $\ker\theta_i = N_i$. اگر $x_1, ..., x_k$ یک مجموعه مولد برای گروه G باشد، در این صورت همریختی θ_i به طور کامل با عمل روی این عناصر معین می‌شود. بخصوص نتیجه می‌شود که تعداد همریختی‌ها از G به S_n بیشتر از تعداد مجموعه‌های ممکن برای این k تصویر نیست. تعداد این مجموعه‌ها به وضوح $(n!)^k$ است. چون $\ker\theta_i = N_i$ و $N_i \ne N_j$ برای $i \ne j$، نتیجه می‌شود که $m \le (n!)^k$. □

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه با تولید متناهی باشد. اگر H یک زیرگروه با اندیس متناهی در G باشد، در این صورت یک زیرگروه با اندیس متناهی K از H وجود دارد بطوریکه K در G مشخصه است.

اثبات. بنا به لم ۲.۱.۱، H شامل یک زیرگروه نرمال N از G است بطوریکه $|G : N| = k < \infty$. بنا به لم ۳.۱.۱ تنها تعداد متناهی زیرگروه نرمال با اندیس کوچکتر یا مساوی k موجود است بنابراین تعداد زیرگروههایی که اندیس آنها برابر با k است متناهی است. فرض کنیم

$$N = N_1, N_2, ..., N_h$$

این زیرگروهها باشند. به وضوح هر خود ریختی از G تنها باعث جایگشتی در این زیرگروهها می‌شود و بنابراین

$$K = \bigcap_{i=1}^{h} N_i$$

تحت خود ریختی‌های G پایا است و بنابراین زیرگروه مشخصه G است. از طرفی

$$|G:K| = \left| G : \bigcap_{i=1}^{h} N_i \right| \leq \prod_{i=1}^{h} |G:N_i| < \infty$$

و اثبات کامل است. □

تعریف ۵.۱.۱ منظور از یک گروه تابدار[۱]، گروهی است که تمام عناصر آن از مرتبه متناهی باشند. اگر مرتبه عناصر در گروهی متناهی و کراندار باشند، می‌گوییم نمای گروه[۲] متناهی است در این حالت منظور از نمای گروه کوچکترین مضرب مشترک تمام مرتبه‌ها است.

تعریف ۶.۱.۱ گروه G را حلپذیر[۳] نامیم هرگاه G دارای یک سری آبلی باشد. به عبارت دیگر سری

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_n = G$$

وجود داشته باشد بطوریکه G_{i+1}/G_i آبلی باشد. طول کوتاهترین سری آبلی G را طول مشتق یا طول حلپذیری G می‌نامیم. گروه حلپذیر G با طول مشتق حداکثر ۲ را فراآبلی[۴] می‌نامیم.

یادآوری می‌کنیم که G' گروه مشتق G برابر جابجاگر $[G , G]$ است. با ادامه روند ساختن گروههای مشتق به یک سری از زیرگروههای کاملاً پایای[۵] G می‌رسیم.

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

که در آن $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. این سری را سری مشتق G می‌نامیم که به وضوح یک سری آبلی است.

قضیه ۷.۱.۱ اگر $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_n = G$ یک سری آبلی برای گروه حلپذیر G باشد، در این صورت $G^{(i)} \leq G_{n-i}$. بخصوص $G^{(n)} = 1$.

اثبات. همان قضیه ۵.۱.۵ از [۱] است. □

بنا به قضیه قبل گروه G حلپذیر است اگر و تنها اگر سری مشتق G به واحد ختم شود و طول سری مشتق دقیقاً طول حلپذیری G است.

۱- torsion group
۲- group exponent
۳- soluble
۴- metabelian
۵- fully invariant.