



دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان:

وجود و یکتایی جواب برای بعضی از معادلات دیفرانسیل از
مرتبه کسری

استاد راهنما:

دکتر عزیزالله باباخانی

استاد مشاور:

پروفسور قاسم علیزاده افروزی

نگارش:

الهام انتقامی اوریمی

بهمن ماه ۱۳۸۷

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



University of Mazandaran
Faculty Of Basic Sciences

M. Sc. Thesis in
Applied Mathematics (Differential Equations)

Subject:

**Existence And Uniqueness Results For Some Of
The Fractional Differential Equations**

Supervisor:

Dr. A. Babakhani

Advisor:

Prof. G. A. Afrouzi

Author:

Elham Enteghami Orimi

January 2009

تقدیم به

همسر عزیزم

قدردانی

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب گران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاش گران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. اکنون گاه آن است تا سپاسگزار بزرگوارانی باشم که خوشه چین خوان علم و اخلاق شان بودم.

ابتدا سپاس بیکران و خالصانه خویش را نثار پدر و مادر مهربانم می کنم که همواره حامی و مشوق من بوده اند، و همسر عزیزم که در این راه لحظه ای مرا تنها نگذاشتند. از استاد مهربانم، دکتر عزیزالله باباخانی به پاس تمام راهنمایی ها و زحماتشان صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد مشاور فرزانه و دانشمندم، پروفیسور قاسم علیزاده افروزی که همیشه الگوی بنده در علم و اخلاق بوده اند، خالصانه سپاسگزارم. از اساتید داور و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که قبول زحمت کرده، از خانواده محترم همسر و همه دوستان و عزیزانی که در این راه کمک و همراه بنده بوده اند نیز سپاسگزار و ممنونم.

چکیده

در این رساله ابتدا با استفاده از روش غیر خطی لری - شودر به بررسی یکتایی جواب برای

معادلات دیفرانسیل تابعی از مرتبه کسری زیر در یک فاز نامتناهی روی فضای فرشه می پردازیم:

$$\begin{cases} D^\alpha[y(t) - y(\circ)] = f(t, y_t), & t \in J = [\circ, \infty), \quad \circ < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, \circ]. \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} D^\alpha[y(t) - y(\circ) - g(t, y_t) + g(\circ, y_\circ)] = f(t, y_t), & t \in J = [\circ, \infty), \quad \circ < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, \circ]. \end{cases}$$

که D^α مشتق کسری ریمان - لیوویل است، $f, g: J \times B \rightarrow R^n$ و B نیز فضای پایه نامیده می شود.

سپس با استفاده از روش های نقطه ثابت باناخ و نقطه ثابت لری - شودر وجود جواب برای

معادلات دیفرانسیل تابعی از مرتبه کسری زیر را ثابت می کنیم:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t, y_t), & t \in J = [\circ, b], \quad \circ < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, \circ], \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} D^\alpha[y(t) - g(t, y_t)] = f(t, y_t), & t \in J = [\circ, b], \quad \circ < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, \circ], \end{cases}$$

که $f, g: J \times B \rightarrow R$ و D^α مشتق کسری ریمان - لیوویل است.

در خاتمه نیز با استفاده از روش غیر خطی لری - شودر به مطالعه یکتایی جواب برای معادلات

دیفرانسیل از مرتبه کسری زیر با ضرایب چند جمله ای در یک فاز نامحدود روی فضای فرشه می

پردازیم:

$$\begin{cases} P(D)[y(t) - y(\circ)] = f(t, y_t), & t \in J = [\circ, \infty), \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, \circ], \end{cases}$$

که در این معادلات $P(D) = D^{\alpha_n} - \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) D^{\alpha_{n-j}}$ ، $f : J \times B \rightarrow R^n$ ، D^{α_j} ها مشتقات کسری
ریمان – لیوویل می باشند و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1$.

واژه‌های کلیدی : معادلات دیفرانسیل کسری؛ مشتق کسری؛ انتگرال کسری؛ فاز نامتناهی؛ وجود؛
نقطه ثابت.

فهرست مندرجات

۱	پیشگفتار
۵	۱ تعاریف پایه
۵	۱.۱ مقدمه
۵	۲.۱ تابع گاما
۶	۱.۲.۱ تعریف تابع گاما
۶	۲.۲.۱ خواص تابع گاما
۷	۳.۲.۱ نمایش حدی تابع گاما
۷	۳.۱ تابع بتا
۷	۱.۳.۱ تعریف تابع بتا

۸	۴.۱	تابع میتاگ – لفلر
۹	۱.۴.۱	تعریف تابع میتاگ – لفلر

۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

۱۰	۱.۲	مقدمه
۱۱	۲.۲	مشتق ها و انتگرال های کسری
۱۱	۱.۲.۲	مشتق و انتگرال کسری گرانوالد
۱۴	۲.۲.۲	مشتق و انتگرال کسری ریمان – لیوویل
۱۵	۳.۲.۲	مشتق کسری مارچاد
۱۵	۴.۲.۲	مشتق کسری کاپوتو
۱۶	۵.۲.۲	مشتق و انتگرال کسری وایل
۱۷	۳.۲	خصوصیات انتگرال و مشتق کسری ریمان – لیوویل
۱۷	۱.۳.۲	خطی بودن
۱۷	۲.۳.۲	انتگرال ها و مشتق ها از مرتبه دلخواه
۲۲	۳.۳.۲	ترکیب با مشتقات مرتبه صحیح
۲۲	۴.۳.۲	ترکیب با مشتقات مرتبه کسری
۲۴	۵.۳.۲	قانون لایب نیز برای انتگرال ها و مشتقات کسری
۲۵	۶.۳.۲	قاعده زنجیری
۲۵	۷.۳.۲	سری تیلور

۲۶	مثال ها	۴.۲
۲۸	تعاریف اساسی	۵.۲
۳۲	قضایای مقدماتی	۶.۲
۳۳	قضیه آرزلا - آسکولی	۱.۶.۲
۳۳	قضیه نقطه ثابت لری - شودر	۲.۶.۲
۳۴	قضیه نقطه ثابت باناخ	۳.۶.۲
۳۴	اصول هال و کاتو	۴.۶.۲
۳۵	فضای فرشه	۷.۲
۳۵	تعریف (فضای فرشه)	۱.۷.۲
۳۶	مثال ها	۲.۷.۲
۳۷	قضیه (روش غیر خطی لری - شودر) [۷]	۳.۷.۲

۳ یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز

۳۸	نامتناهی روی فضای فرشه	
۳۸	مقدمه	۱.۳
۳۹	FDEs از مرتبه کسری	۲.۳
۳۹	تعریف	۱.۲.۳

۴۰	لم [۲۰]	۲.۲.۳
۴۰	لم	۳.۲.۳
۴۱	قضیه (یکتایی جواب)	۴.۲.۳
۴۵	NFDEs از مرتبه کسری	۳.۳
۴۵	تعریف	۱.۳.۳
۴۵	قضیه (یکتایی جواب)	۲.۳.۳
۴۷	یک مثال	۴.۳

۴ وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل تابعی از مرتبه

۵۰	کسری با فاز نامحدود	
۵۰	مقدمه	۱.۴
۵۱	مفاهیم اساسی	۲.۴
۵۲	FDEs از مرتبه کسری	۳.۴
۵۲	تعریف	۱.۳.۴
۵۲	لم [۶]	۲.۳.۴
۵۳	قضیه (یکتایی جواب)	۳.۳.۴
۵۵	لم	۴.۳.۴

۵۵	قضیه (وجود جواب) (۵.۳.۴
۵۹	NFDEs از مرتبه کسری ۴.۴
۵۹	تعریف ۱.۴.۴
۵۹	قضیه (یکتایی جواب) ۲.۴.۴
۶۱	قضیه (وجود جواب) ۳.۴.۴

۶۲	یک مثال ۵.۴
----	-------	-------------

۵ یکتایی جواب، برای معادلات دیفرانسیل کسری با ضرایب چند

۶۵	جمله ای در یک فاز نامتناهی روی فضای فرشه
----	-------	--

۶۵	مقدمه ۱.۵
----	-------	-----------

۶۶	FDEs از مرتبه کسری ۲.۵
----	-------	------------------------

۶۶	تعریف ۱.۲.۵
----	-------	-------------

۶۶	لم [۱] ۲.۲.۵
----	-------	--------------

۶۷	قضیه (یکتایی جواب) ۳.۲.۵
----	-------	--------------------------

۷۲	A واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
----	-------	--------------------------------

۸۴	B واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
----	-------	--------------------------------

لیست علائم و اختصارات

علائم	خلاصه تعریف
$\Gamma(\alpha)$	تابع گاما
$B(z, w)$	تابع بتا
$E_{\alpha, \beta}(z)$	تابع میناگ لفلر دو پارامتری
${}_a^G D_x^\alpha$	مشتق کسری گرانوالد
${}_a^G I_x^\alpha$	انتگرال کسری گرانوالد
D_a^α	مشتق کسری ریمان - لیوویل
I_a^α	انتگرال کسری ریمان - لیوویل
D^α	مشتق کسری مارچاد
${}_a^C D_x^\alpha$	مشتق کسری کاپوتو
${}_a W_\infty^{-\alpha}$	انتگرال کسری وایل
IVP	مسئله مقدار اولیه
$FDEs$	معادلات دیفرانسیل تابعی
$NFDEs$	معادلات دیفرانسیل تابعی خنثی

پیشگفتار

حسابهای کسری [۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۰]، از قرن هفدهم توسط لایب نیز^۱، اویلر^۲، لاگرانژ^۳، آبل^۴، لیوویل^۵، ریمان^۶ و دیگران گسترش یافت. اولین تلاش گزارش شده تعمیم مشتقات به مرتبه کسری در مناظره بین لایب نیز (۱۶۹۵) وال. هاسپیتال^۷ بود، که در آن لایب نیز نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را برای $n = \frac{1}{p}$ شرح داد.

لاپلاس^۸ (۱۸۱۲) مشتق کسری را برحسب یک انتگرال تعریف کرد. در سال (۱۸۱۹) لاکریکس^۹ مشتق مرتبه دلخواه را بیان کرد و فرمول مشتق معمولی

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, m, n \in N,$$

را به مرتبه دلخواه به صورت زیر تعمیم داد:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

-
- ۱ Leibniz
 - ۲ Euler
 - ۳ Lagrange
 - ۴ Abel
 - ۵ Liouville
 - ۶ Riemann
 - ۷ L'Hospital
 - ۸ Laplace
 - ۹ Lacroix

که m و n هر عددی می توانند باشند.

فوریه^{۱۰} (۱۸۲۲) عملگرهای کسری را با استفاده از نمایش انتگرالی $f(x)$ تعریف کرد، به این ترتیب که

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(x-u)) dt.$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos(t(x-u)) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} n\pi dt.$$

او α را به جای n قرار داد، که α عدد دلخواهی است. آبل اولین کسی بود که مشتقات مرتبه کسری را برای حل یک معادله انتگرالی بکار برد. این معادله در مسئله خم همزمانی^{۱۱} بوجود آمد. معادله انتگرالی آبل به فرم زیر است.

$$k = \int_0^x (x-t)^\alpha f(t) dt. \quad (۱.۰.۰)$$

($\alpha = -1/2$) به عنوان یک حالت خاص بررسی شده بود. انتگرال در معادله (۱.۰.۰) بجز برای عامل ضربی $1/\Gamma(\frac{1}{2})$ ، که یک حالت خاص از یک انتگرال معین است، تعریف انتگرال کسری است. در معادلات انتگرالی مثل معادله (۱.۰.۰) تابع f در انتگرالده باید معین باشد. آبل طرف راست معادله (۱.۰.۰) را بصورت $\sqrt{\pi} [d^{-1/2} f(x) / dx^{-1/2}]$ نوشت. سپس با اثر دادن $d^{1/2} / dx^{1/2}$ در هر دو سمت معادله عبارت زیر را بدست آورد:

$$\frac{d^{1/2} k}{dx^{1/2}} = \sqrt{\pi} f(x)$$

چون عملگرهای کسری (با شرایط کافی روی f) خصوصیت زیر را دارند.

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left[\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}} f \right] = \frac{d^0 f}{dx^0} = f. \quad (۲.۰.۰)$$

بنابراین وقتی که مشتق کسری از مرتبه $\frac{1}{2}$ ثابت k در معادله (۱.۰.۰) محاسبه شود، $f(x)$ به دست می آید. این یک دست آورد قابل ملاحظه از آبل در حساب های کسری بود. نکته مهم اینجاست که

^{۱۰} Fourier

^{۱۱} Tautochorne Problem

مشتق کسری یک ثابت همیشه مساوی صفر نیست. فرمول انتگرالی فوریه و جواب زیبای آبل توجه لیوویل را جلب کرد. بنابراین او تئوری حساب های کسری را توسعه داد و از آن در حل مسائل تئوری پتانسیل استفاده کرد.

در سالهای اخیر عبارت «حساب های کسری» نامی بی معناست و به جای آن مشتق گیری و انتگرالگیری از مرتبه دلخواه که ممکن است گویا، اصم یا مختلط باشد ترجیح داده می شود. شرح تحلیلی مشتق گیری و انتگرالگیری مختلط توسط سریواستاوا^{۱۲} و او^{۱۳} در [۲۳] بحث شده است. این انتگرال ها و مشتق ها صرفاً کنجکاوی های ریاضیات نیستند بلکه در علوم مختلف مثل فیزیک، شیمی، زیست، پزشکی و... کاربردهایی نیز دارند. اخیراً کاربردهای مفیدی از معادلات دیفرانسیل کسری با عملگر مشتق ریمان – لیوویل در شاخه های گوناگونی بدست آمده است. همچنین حسابهای کسری برای مطالعه انواع فراکنال ها از توابعی مثل تابع ویراشتراس^{۱۴} و تابع پلکانی لبگ^{۱۵} مورد استفاده قرار گرفتند. در متون اخیر نیز تعمیم مشتقات و انتگرالهای کسری بسیار مورد توجه قرار گرفته اند.

هدف اصلی در این رساله بررسی وجود جواب و یکتایی جواب برای بعضی از معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی است. مطالب مندرج در این رساله در پنج فصل، به ترتیب زیر تنظیم شده است:

فصل اول، به معرفی توابع مهم و پرکاربرد در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می پردازد.

فصل دوم، پیشنهاد فصول بعد می باشد و شامل معرفی انواع مشتق و انتگرال کسری، تعاریف و قضایای مقدماتی در معادلات دیفرانسیل کسری می باشد.

فصل سوم، به بررسی وجود جواب یکتا برای معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی روی

۱۲ Srivastava

۱۳ Owa

۱۴ Weierstrass

۱۵ Lebesgue

فضای فرشه ۱۶ می پردازد.

فصل چهارم، به بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری در یک فاز نامتناهی اختصاص دارد.

فصل پنجم، به مطالعه وجود جواب یکتا برای معادلات دیفرانسیل کسری با ضرایب چند جمله‌ای در یک فاز نامتناهی روی فضای فرشه می پردازد.

فصل ۱

تعاریف پایه

۱.۱ مقدمه

در این فصل توابع خاصی که در حساب کسری با آنها سروکار داریم را معرفی می‌کنیم. این توابع عبارتند از: تابع گاما، تابع بتا و تابع میتاگ – لفلر. این فصل از منابع [۱۵، ۱۹، ۲۰] گردآوری شده است.

۲.۱ تابع گاما

بدون شک یکی از توابع پایه‌ای حساب کسری، تابع گامای اویلر $\Gamma(z)$ است. در این بخش علاوه بر تعریف، برخی نتایج و خواص تابع گاما را بررسی می‌کنیم.

۱.۲.۱ تعریف تابع گاما

تابع گاما $\Gamma(z)$ ، بوسیله انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.2.1)$$

که در نیم صفحه راست صفحه مختلط ($Re(z) > 0$) همگراست.

۲.۲.۱ خواص تابع گاما

یکی از خصوصیات مهم تابع گاما عبارت است از:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2.2.1)$$

که بوسیله انتگرالگیری جزء به جزء، براحتی اثبات می شود:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (3.2.1)$$

اگر n یک عدد صحیح باشد، آنگاه:

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z+n+1) = (-1)^n \Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad \forall n. \quad (4.2.1)$$

بدیهی است که $\Gamma(1) = 1$ و با استفاده از (۲.۲.۱) برای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!,$$

...

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$