به نام پروردگار

۱۴۰۳۳۶-۲۰۱۸۶۹۰

دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض(جبر)

عنوان

بررسی متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور

دکتر حمید موسوی

پژوهشگر

معصومه حسن‌زاد

مهرماه ۱۳۸۸

این اثر کوچک هدیه ایست به:

پدر و مادر عزیزم

و تمام آنهایی که عاشقانه ترین لحظه ها را با آنها تجربه کرده ام...

تقدیر و تشکر:

خدای را سپاس می گویم که به من فرصتی ارزانی داشت تا بتوانم گوشه ای از خلقت باشکوهش را درک کنم و به معرفت خود بیافزایم. آموخته هایم را مدیون همه عزیزانی هستم که در این راه کمکم کردند و به من آموختند. در این میان پس از سپاس از پدر و مادر عزیزم و خانواده گرامی ام بخاطر حمایت ها و زحمات فراوان، بر خود واجب می دانم تقدیر و تشکر کنم از:

- استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر رضا نقی پور که در انجام و پیشبرد این پایان نامه مرا راهنمایی نمودند.
- اساتید گرامیم آقایان دکتر حمید موسوی و دکتر احمد خوجالی که در تمامی مراحل انجام این پایان نامه مرا یاری نمودند.
- استاد ارجمندم جناب آقای دکتر جعفر امجدی که داوری این پایان نامه را تقبل کردند.
- مسؤلین محترم کتابخانه ی دانشکده ی ریاضی و دوستان عزیزم خانم ها مینا نادری، اکرم مهدیزاده، مینا دوکوهکی، مهین موثق و آقای محمدرضا ابوعلی که همواره مرا یاری کردند.

نام خانوادگی: حسن‌زاد **نام:** معصومه

عنوان: بررسی متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما: دکتر رضا نقی‌پور **استاد مشاور:** دکتر حمید موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: مهر۸۸ **تعداد صفحه:** ۱۰۶

کلید واژه‌ها: ایده‌آل‌های اول وابسته، کوهمولوژی موضعی، دوگان ماتلیس، مدول غیریکپارچه، کانون غیرمنفرد

چکیده

در این پایان نامه متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی را در شرایط خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم.

پس از بیان مفاهیم مقدماتی در فصل اول، فصل دوم که براساس مقاله‌ی هلاس تحت عنوان «مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی دوگان ماتلیس مدول‌های کوهمولوژی موضعی» نوشته شده است، با ارایه‌ی حدسی شروع می‌شود. بر مبنای این حدس و مفهوم دوگان ماتلیس، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی دوگان ماتلیس مدول‌های کوهمولوژی موضعی را محاسبه می‌کنیم. همچنین، در این فصل نشان می‌دهیم که بعد کرول را می‌توان از طریق صفرشدن مدول‌های کوهمولوژی موضعی بیان کرد.

در فصل سوم فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی موضعی، نوتری و جابجایی از بعد d باشد. همچنین، فرض می‌کنیم I ایده‌آلی از R و M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد. ثابت می‌کنیم که مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ به ازای هر $i \geq 0$ در حالات زیر متناهی است:

(۱) $d \leq 3$؛

(۲) $d = 4$ و R یک حلقه‌ی منظم باشد؛

(۳) $d = 5$ و R یک حلقه‌ی موضعی، منظم و غیر یکپارچه بوده و M یک $R-$مدول بدون تاب باشد.

علاوه بر این، در این فصل نشان می‌دهیم که اگر $d > 0$، آنگاه به ازای هر R، I و M، مدول $H_I^{d-1}(M)$ دارای تکیه‌گاه متناهی خواهد بود.

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس دو مقاله‌ی زیر گردآوری شده است:

1. M. Hellus, *On the associated primes of Matlis dual of top local cohomology modules*. Comm. Algebra 33: 3997-4009 (2005).
2. T. Marley, *The associated primes of local cohomology modules over rings of small dimension*. Manuscripta Math. 104, 519-525 (2001).

یکی از مهمترین موضوعات در جبر جابجایی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی می‌باشد. پیرامون این مدول‌ها مسایل بسیاری مطرح است که از اساسی‌ترین آنها مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی این مدول‌ها می‌باشد.

فصل دوم از این پایان‌نامه، بر اساس مقاله‌ی اول نوشته شده است. در این فصل، R یک حلقه‌ی نوتری و جابجایی، I ایده‌آلی از آن، $H_I^i(R)$، i-امین مدول کوهمولوژی موضعی R و $E:=E_R\left(R/m\right)$ پوشش انژکتیو میدان $\frac{R}{m}$ است. فانکتور دوگان ماتلیس[1] را با $D(-)$ نشان داده و به ازای هر R-مدول M تعریف می‌کنیم:

$$D(M)=Hom_R(M,E).$$

[1] Matlis

هلاس[۱]، یکی از جبردانان برجسته، مطالعات بسیاری بر روی مدول‌های $D(H_I^i(R))$ داشته است. در این راستا مقالاتی را در سال‌های ۲۰۰۵، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ به چاپ رسانده است. در هر یک از این مقالات، متناهی بودن مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های $D(H_I^i(R))$ و $D(H_I^i(M))$ تحت شرایط خاص اثبات گردیده است.

در سال ۱۹۹۰، هانکه[۲] یکی از ریاضیدانان، در کنفرانس جبری ساندنس[۳] سؤالی مطرح کرد مبنی بر اینکه «چه زمانی مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی متناهی است». این سؤال، مبنای تحقیقات گسترده‌ای در راستای موضوع کوهمولوژی موضعی گردید بطوریکه تا به امروز نیز ادامه دارد. در سال ۱۹۹۳، هانکه به همراه شارپ[۴] و لیوبزنیک[۵] نشان دادند که اگر R یک حلقه‌ی موضعی، منظم و شامل یک میدان باشد، آنگاه i-امین مدول کوهمولوژی موضعی حلقه دارای مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی متناهی خواهد بود.

سال ۲۰۰۰، سالی پرکار برای جبردانان بود. در این سال، مقالات بسیاری توسط برادمن[۶]، روت هاوس[۷]، شارپ، لیوبزنیک و لشگری فغانی[۸] پیرامون سؤال هانکه چاپ گردید. در همین سال بود که لیوبزنیک ثابت کرد مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول کوهمولوژی موضعی یک حلقه، متناهی است اگر حلقه موضعی، منظم، غیریکپارچه و از مشخصه‌ی مخلوط یا صفر باشد. همچنین، سینگ[۹] با ارایه‌ی مثالی برای حلقه‌ی نوتری و غیرموضعی R از بعد ۶ و ایده‌آل سه مولدی I از آن، آن، توانست نشان دهد که $\operatorname{Ass}_R H_I^3(R)$ نامتناهی است.

---

۱ Hellus
۲ Huneke
۳ Sundance
۴ Sharp
۵ Lyubeznik
۶ Brodmann
۷ Rotthaus
۸ Lashgari Faghani
۹ Singh

علیرغم تحقیقات بسیار، این سؤال که آیا مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول کوهمولوژی موضعی یک مدول با تولید متناهی روی حلقه‌ی موضعی و نوتری همیشه متناهی است، همچنان به صورت یک مسئله‌ی باز باقی است.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱۰۱ تکیه‌گاه و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی یک مدول

در سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

۱۰۱۰۱ تعریف: فرض کنیم M یک R-مدول باشد. تکیه‌گاه یا محمل M را با علامت $\mathrm{Supp}_R M$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}_R M = \left\{ p \in \mathrm{Spec} R \,\middle|\, M_p \neq 0 \right\}.$$

۲۰۱۰۱ تعریف: فرض کنیم M یک R-مدول باشد. ایده‌آل اول p از R را یک ایده‌آل اول وابسته‌ی M می‌نامند، هرگاه $x(\neq 0) \in M$ موجود باشد بطوریکه $p = \mathrm{Ann}_R x$.

مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M را با علامت $\mathrm{Ass}_R M$ (به اختصار با $\mathrm{Ass}\, M$) نشان می‌دهیم.

۳۰۱۰۱ لم: فرض کنیم M یک R-مدول با تولید متناهی و S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت داریم:

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \left\{ S^{-1}p \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \,\middle|\, p \cap S = \phi, p \in \mathrm{Supp}_R M \right\}.$$

برهان. رجوع شود به تمرین ۲۲۰۹، [۲٤].

٤٠١٠١ لم: فرض کنیم M یک مدول روی حلقه‌ی نوتری R و S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)=\left\{S^{-1}p\in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)\,\middle|\, p\cap S=\phi, p\in \mathrm{Ass}_R M\right\}.$$

برهان. رجوع شود به لم ۳۸۰۹، [٢٤].

٥٠١٠١ نتیجه: اگر R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R-مدول و p یک ایده‌آل اول R باشد، آنگاه

$$p\in \mathrm{Ass}_R M \Leftrightarrow pR_p \in \mathrm{Ass}_{R_p} M_p \ .$$

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی قضیه‌ی ٢٠٦، [١٨].

٦٠١٠١ لم: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و $0\to M'\to M\to M''\to 0$ یک رشته‌ی دقیق از R-مدول‌ها و R-هومومورفیسم‌ها باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}_R M\subseteq \mathrm{Ass}_R M'\bigcup \mathrm{Ass}_R M'' \ .$$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ٣٠٦، [١٨].

٧٠١٠١ لم: فرض کنیم M یک مدول روی حلقه‌ی نوتری R و p یک ایده‌آل اول R باشد. در این صورت $p\in \mathrm{Ass}_R M$ اگر و تنها اگر نگاشت $\frac{R}{p}\to M$ یک به یک باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $p\in \mathrm{Ass}_R M$. پس $x(\neq 0)\in M$ وجود دارد بطوریکه $p=\mathrm{Ann}_R x$. لذا داریم:

$$\frac{R}{p}=\frac{R}{\mathrm{Ann}_R x}\cong Rx$$

و چون $\frac{R}{p}$ با زیرمدولی از M یعنی Rx، ایزومورف است پس نگاشت $\frac{R}{p} \to M$ یک به یک است.

حال برعکس، فرض کنیم نگاشت $\frac{R}{p} \to M$ یک به یک باشد. بنابراین زیرمدولی مانند N از M وجود دارد که $N \cong \frac{R}{p}$. با توجه به اینکه $\mathrm{Ass}_R(\frac{R}{p}) = \{p\}$ و $\mathrm{Ass}_R(\frac{R}{p}) = \mathrm{Ass}_R N$ لذا $p \in \mathrm{Ass}_R N$ و از آنجا داریم $p \in \mathrm{Ass}_R M$. □

۸.۱.۱ گزاره: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و M یک R–مدول باشد. در این صورت

(۱) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{Ass}_R M$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

(۲) $\mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Supp}_R M$.

(۳) مجموعه‌ی عناصر می‌نیمال $\mathrm{Ass}_R M$ و $\mathrm{Supp}_R M$ باهم مساویند.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۶.۵، [۱۸].

۹.۱.۱ تبصره: فرض کنیم $f: R \to T$ هومورفیسم حلقه باشد. به ازای هر $p \in \mathrm{Spec}\, T$، ایده‌آل $p \cap R (= f^{-1}(p))$، ایده‌آل اولی از $\mathrm{Spec}\, R$ می‌باشد. لذا می‌توان نگاشت $^a f : \mathrm{Spec} T \to \mathrm{Spec} R$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\left(^a f\right)(p) = p \cap R \quad ,\forall p \in \mathrm{Spec} T.$$

۱۰.۱.۱ لم: فرض کنیم $f: R \to T$ یک هومورفیسم از حلقه‌های نوتری و M یک T–مدول متناهی باشد. اگر $^a f : \mathrm{Spec} T \to \mathrm{Spec} R$ به صورت تبصره‌ی فوق تعریف شده باشد، آنگاه

$$^a f(\mathrm{Ass}_T M) = \mathrm{Ass}_R M.$$

در نتیجه، $\mathrm{Ass}_R M$ به ازای مدولی چون M، متناهی خواهد بود.

برهان. رجوع شود به تمرین ۷۰۶، [۱۸].

۱۱۰۱۰۱ تعریف: به ازای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی R، واریته‌ی I را با علامت $V(I)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$V(I)=\{\,p\in \mathrm{Spec} R \mid I\subseteq p\,\}.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که اگر J ایده‌آل دیگری از R باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} V(I)\cup V(J) &= V(I\cap J)\\ &= V(IJ)\end{aligned}$$

و اگر $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ یک خانواده از ایده‌آل‌های R باشد، آنگاه

$$\bigcap_{i\in\Lambda} V(I_i)=V(\sum_{i\in\Lambda} I_i)\ .$$

به‌علاوه $V(R)=\phi$ و $V(\phi)=\mathrm{Spec}\ R$؛ لذا $\tau=\{\,V(I)\mid I\leq R\,\}$ یک توپولوژی روی $\mathrm{Spec}\ R$ تشکیل می‌دهد که آن را توپولوژی زاریسکی[1] بر $\mathrm{Spec}\ R$ می‌نامند.

۱۲۰۱۰۱ گزاره: فرض کنیم M یک R–مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

$$\mathrm{Supp}_R M=V(\mathrm{Ann}_R M)\ .$$

برهان. رجوع شود به لم ۲۰۰۹، [۲٤].

۱۳۰۱۰۱ نتیجه: اگر I ایده‌آلی از R باشد، آنگاه $\mathrm{Supp}_R \dfrac{R}{I}=V(I)$.

برهان. با توجه به گزاره‌ی قبل، بدیهی است.

---
[1] Zariski

۱۴۰۱۰۱ گزاره: فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری، M یک R-مدول با تولید متناهی و N نیز R-مدول دلخواه باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}_R\big(Hom_R(M,N)\big)=\mathrm{Supp}_R M\bigcap \mathrm{Ass}_R N.$$

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۱۰، فصل ٤، [۳].

۲۰۱ بعد کرول و بلندی ایده‌آل

۱۰۲۰۱ تعریف: هر رشته مانند $p_0\subset p_1\subset p_2\subset\cdots\subset p_n$ از ایده‌آل‌های اول R را یک زنجیر و n را طول زنجیر می‌نامیم. یک زنجیر را اشباع گوییم هرگاه به ازای هر $1\le i\le n$، هیچ ایده‌آل اول بین p_i و p_{i-1} موجود نباشد.

همچنین، یک زنجیر برای R-مدول M عبارتست از یک خانواده‌ی متناهی مانند $\{M_i\}_{i=0}^{n}$ از زیرمدول های M بطوریکه $M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_n=(0)$. این زنجیر را اشباع گوییم هرگاه به ازای هر $0\le i\le n-1$، زیرمدولی بین M_i و M_{i+1} وجود نداشته باشد.

طول مدول M را با $l(M)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$l(M):=\min\left\{n\in\mathbb{N}_\circ \,\middle|\, \text{یک زنجیر اشباع به طول } n \text{ برای } M \text{ موجود باشد}\right\}$$

و اگر M دارای زنجیر اشباع نباشد، تعریف می‌کنیم $l(M):=\infty$.

۲۰۲۰۱ تعریف: بعد کرول[۱] (یا به اختصار بعد) R را با علامت $\dim R$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\dim R := \sup\left\{ 0 \le n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \text{یک زنجیر از ایده آل های اول } R \text{ به طول } n \text{ موجود است} \right\}$$

و اگر سوپریموم موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\dim R := \infty$.

بطور کلی، اگر M یک Rـ مدول ناصفر باشد، بعد M را با علامت $\dim M$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\dim M := \sup\left\{ 0 \le n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{یک زنجیر از ایده آل های اول } R \text{ واقع در } \operatorname{Supp}_R M \\ \text{به طول } n \text{ موجود است} \end{array} \right\}$$

و اگر این سوپریموم موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\dim M := \infty$.

۳۰۲۰۱ تبصره: اگر M یک Rـ مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه واضح است که $\dim M = \dim \frac{R}{\operatorname{Ann}_R M}$ و لذا $\dim M \le \dim R$.

همچنین اگر N یک Rـ مدول دیگر باشد بطوریکه $\operatorname{Supp}_R M \subseteq \operatorname{Supp}_R N$، آنگاه $\dim M \le \dim N$.

۴۰۲۰۱ تعریف: فرض کنیم p ایده‌آل اولی از حلقه‌ی R باشد. بلندی p را با علامت $\operatorname{ht}_R p$ (به اختصار با $\operatorname{ht} p$) نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{ht}_R p := \sup\left\{ 0 \le n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{یک زنجیر از ایده آل های اول } R \\ \text{بصورت } p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n = p \text{ موجود است} \end{array} \right\}$$

و اگر سوپریموم موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\operatorname{ht}_R p := \infty$.

---

[۱] Krull

بطور کلی، اگر M یک R-مدول باشد، آنگاه بلندی هر ایده‌آل اول $p\ (\in \mathrm{Supp}_R M)$ نسبت بـه M را با علامت $\mathrm{ht}_M p$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}_M p := \sup\left\{ 0 \le n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{زنجیری از ایده آل های اول } R \text{ واقع در } \mathrm{Supp}_R M \\ \text{بصورت } p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n = p \text{ موجود است} \end{array} \right\}$$

و اگر سوپریموم موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\mathrm{ht}_M p := \infty$.

۵۰۲۰۱ تعریف: فرض کنیم I ایده‌آل دلخواهی از حلقه‌ی R باشد. بلندی I را با علامت $\mathrm{ht}_R I$ (به اختصار با $\mathrm{ht} I$) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}_R I := \min\{\mathrm{ht}\, p \mid p \in \mathrm{Spec} R, I \subseteq p\}.$$

۶۰۲۰۱ تبصره: با توجه به مطالب قبلی، تعریفی معادل تعریف ۲۰۲۰۱ می‌توان ارائه داد:

$$\dim R := \sup\{\mathrm{ht}\, p \mid p \in \mathrm{Spec} R\},$$
$$\dim M := \sup\left\{\dim_{R_p} M_p \;\middle|\; p \in \mathrm{Supp}_R M\right\}.$$

همچنین داریم: $\mathrm{ht} I + \dim R/I \le \dim R$.

۷۰۲۰۱ لم: فرض کنیم $(R,\underline{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد. در این صورت داریم $\dim R = \mathrm{ht}\,\underline{m}$.

برهان. از تعریف بدست می‌آید.

۸۰۲۰۱ گزاره: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ متغیرهای مستقل روی R باشند. داریم:

$$\begin{aligned}\dim R[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n] &= \dim R[[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n]] \\ &= \dim R + n\,.\end{aligned}$$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۴۰۱۵، [۱۸].

۹.۲.۱ لم: اگر $(R,\underline{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد، آنگاه $\dim R < \infty$.

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۵.۱۵، [۲٤].

۳.۱ دستگاه پارامتری، رشته و درجه

۱.۳.۱ تعریف: ایده‌آل q را یک ایده‌آل اولیه در R نامند هرگاه:

(۱) $q \neq R$؛

(۲) $\forall x, y \in R, xy \in q \Rightarrow x \in q$ یا $y \in \sqrt{q}$.

واضح است که هر ایده‌آل اول، یک ایده‌آل اولیه است.

۲.۳.۱ گزاره: فرض کنیم q یک ایده‌آل اولیه در R باشد. در این صورت $\sqrt{q}$ یک ایده‌آل اول R شامل q است و به ازای هر ایده‌آل اول مانند p از R شامل q، داریم $\sqrt{q} \subseteq p$. به عبارت دیگر $\sqrt{q}$ کوچکترین ایده‌آل اول شامل q است.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ٤.١، [۲].

۳.۳.۱ تعریف: اگر q یک ایده‌آل اولیه در R باشد، دیدیم که $\sqrt{q}$ یک ایده‌آل اول در R است. اگر قرار دهیم $\sqrt{q} = p$، آنگاه q را یک ایده‌آل p-اولیه در R می‌نامند.

٤.۳.۱ گزاره: فرض کنیم $(R,\underline{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد. در این صورت

$$\dim R = \min \left\{ 0 \le n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \text{یک ایده آل } \underline{m} - \text{اولیه با } n \text{ مولد موجود است} \right\}$$

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۱۸۰۱۵، [۲٤].

۵۰۳۰۱ تعریف: فرض کنیم $(R,\underline{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری با بعد d باشد. طبق گزاره‌ی قبل $x_1,x_2,...,x_d$ در R موجودند بطوریکه $(x_1,x_2,...,x_d)$ یک ایده‌آل $\underline{m}$ـ اولیه است. در این صورت $x_1,x_2,...,x_d$ را یک دستگاه پارامتری یا به اختصار یک $s.o.p$ برای R می‌نامیم. همچنین، $x_1,x_2,...,x_d$ را یک دستگاه پارامتری منظم گوییم اگر $\underline{m}=(x_1,x_2,...,x_d)$.

۶۰۳۰۱ تعریف: فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد و $r \in R$. گوییم r یک مقسوم‌علیه صفر در R است هرگاه $a(\neq 0) \in R$ موجود باشد بطوریکه $ar = 0$.

مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R را با علامت $Zdv(R)$ (به اختصار با $Z(R)$) نشان می‌دهیم. برای یک Rـ مدول M، مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر M روی R را با $Z_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_R(M)=\{ r \in R \mid \exists x(\neq 0)\in M, rx=0 \}.$$

۷۰۳۰۱ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک Rـ مدول و $x_1,x_2,...,x_n \in R$. گوئیم $x_1,...,x_n$ یک Mـ رشته‌ی منظم (به اختصار Mـ رشته) از اعضای R است هرگاه:

(۱) $M \neq (x_1,...,x_n)M$،

(۲) برای هر $i=1,...,n$، عضو x_i یک مقسوم‌علیه صفر روی Rـ مدول $\dfrac{M}{(x_1,...,x_{i-1})M}$ نباشد.

۸۰۳۰۱ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و M یک R-مدول باشد. همچنین I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $M \neq IM$ و $x_1,\dots,x_n$، یک M-رشته از اعضای I باشد. گوئیم $x_1,\dots,x_n$ یک M-رشته‌ی ماکسیمال در I است هرگاه به ازای هر عضو b از I، $x_1,\dots x_n,b$ یک M-رشته در I نباشد. به عبارت معادل، $I \subseteq Zdv\left(\frac{M}{(x_1,\dots,x_n)M}\right)$.

۹۰۳۰۱ گزاره: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R-مدول غیرصفر با تولید متناهی و I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $M \neq IM$. در این صورت طول همه‌ی M-رشته‌های ماکسیمال روی I، با هم برابرند.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۵۰۲۰۱، [۸].

۱۰۰۳۰۱ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R-مدول غیرصفر با تولید متناهی و I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $M \neq IM$. در این صورت طول مشترک همه‌ی M-رشته‌های ماکسیمال در I را، درجه‌ی I نسبت به M نامیده و با علامت $\operatorname{grade}_M I$ یا $\operatorname{grade}(I,M)$ نشان می‌دهیم.

همچنین درجه‌ی مدول M را با علامت $\operatorname{grade} M$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{grade} M = \operatorname{grade}_R(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{grade}(\operatorname{Ann} M, R).$$

درصورتیکه $(R,\underline{m})$ موضعی باشد، درجه‌ی $\underline{m}$ نسبت به M را با علامت $\operatorname{depth} M$ نشان می‌دهیم.