بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

حل دوگان مسأله شبکه جریان صحیح با هزینهٔ محدب

نگارش : زهرا عبداللهی

استاد راهنما : دکتر حسن صالحی فتح آبادی

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

مهر ۱۳۸۱

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی خانم زهرا عبداللهی** تحت عنوان:

حل دوگان مسئله شبکه جریان صحیح با هزینهٔ محدب

در تاریخ ۸۱/۷/۲۵ در **گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد** در رشته **ریاضی کاربردی** معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹/۳ نوزده و سه دهم با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	**دکترحسن صالحی فتح آبادی**	دانشیار	تهران	
۲. استاد مشاور	**دکتر منوچهر پارسایی**	استادیار	تهران	
۳. استاد داور	**دکتر اسماعیل خرم**	استادیار	صنعتی امیرکبیر	

معاون تحصیلات تکمیلی گروه
سیامک یاسمی

مدیر گروه
عمید رسولیان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

۸۱/۱۰/۲۵

تقدیم به دو اسطورهٔ عشق و فداکاری

پدر و مادر عزیزم.

چکیده

در این پایان نامه مسأله بهینه‌سازی صحیح و محدبی را در نظر می‌گیریم که تابع هدف آن مجموع توابع محدب مجزا به شکل $\sum_{(i,j)\in Q}\overline{F}_{ij}(W_{ij})+\sum_{i\in p}\overline{\beta}_{i}(\mu_{i})$ و قیدها، شبیه قیدهای به کار رفته در دوگان مسألهٔ جریان کراندار با حداقل هزینه می‌باشد ($\mu_i-\mu_j\le W_{ij}$). فرض می‌کنیم $m=|Q|, n=|p|$ و u بیشترین ظرفیت در کمان‌ها باشد. این مسأله را دوگان مسألهٔ شبکه جریان با هزینهٔ صحیح و محدب می‌نامیم. در این پایان‌نامه، چندین کاربرد از این مسأله مثل مسألهٔ آژانس مسافربری، درخت پوشای معکوس، مدیریت پروژه و تحلیل رگرسیون را شرح می‌دهیم. نشان می‌دهیم که با استفاده از روش تخفیف لاگرانژ این مسأله قابل تبدیل به مسألهٔ شبکه جریان اصلی با هزینه محدب می‌باشد که در آن تابع هزینه، توابع قطعه‌ای خطی محدب با شیبهای صحیح می‌باشد. ساختار ویژهٔ آن اجازه می‌دهد که، مسألهٔ شبکهٔ جریان اصلی با هزینهٔ محدب با به‌کارگیری الگوریتم مقیاس‌بندی هزینه در زمان $O(nm\log n\log(nu))$ حل شود. بدین طریق بهترین کران زمان برای حل دوگان مسألهٔ شبکهٔ جریان با هزینهٔ صحیح محدب، فراهم می‌آید.

به نام نخستین معلم آفرینش

سپاس و ستایش خدایی را که مرا هستی بخشید و توانایی یادگیری عطا کرد و راه آموختنم را به نعمت حضور خانوادهٔ مهربان و اساتید بزرگوارم روشن ساخت.

در آغاز کلام از عزیزترین عزیزانم، پدر و مادر بزرگوارم که سالیان سال با شکیبایی،بار زحمات مرا بر دوش کشیدند بهترینم بودند و بهترینم خواسته اند تشکر و قدردانی می کنم.

صمیمانه از حضور استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسن صالحی فتح آبادی که از آغاز تا انجام راهنمائیها و دلسوزی هایشان را همراهم کردند،راه گشای بستگی کارهایم بودند و بدون لطف ایشان به انجام رساندن این مهم ممکن نبود سپاسگزاری می نمایم.

از اساتید ارجمند،جناب آقای دکتر اسماعیل خرم و جناب آقای دکتر منوچهر پارسایی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر جهانشاهلو و جناب آقای دکتر علیرضایی که مرا به این مسیر رهنمون گشتند سپاسگزاری می نمایم.

از خواهران عزیز و برادران مهربان و دوستان خوبم که در این راه مرا یاری رساندند و کلام گرمشان همیشه امید بخش من بود صمیمانه،تشکر می کنم.

از خداوند منان توفیق روز افزون را برای یکایک این بزرگواران خواستارم.

زهرا عبداللهی

عنوان	صفحه

صفحه

فهرست اشکال

فصل اول

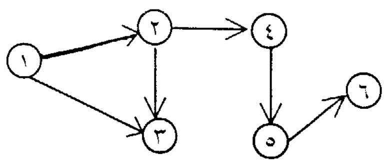
مفاهیم و تعاریف اساسی

فصل اول

۱. ۱- مفاهیم پایه‌ای و تعاریف:

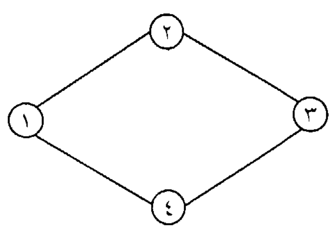
گراف جهت‌دار[1]: گراف جهت‌دار $G=(N,\mathcal{A})$ شامل مجموعهٔ N از گره‌ها[2](رئوس) و مجموعهٔ $\mathcal{A}$ از کمان‌هایی[3] است که به صورت زوجهای مرتب از گره‌های متمایز N می‌باشند. شکل ۱-۱ نمایش یک گراف جهت‌دار است که در آن:

$$N=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \text{ و } \mathcal{A}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}.$$



شکل ۱-۱ گراف جهت‌دار

گراف بدون جهت[4]: گراف بدون جهت $G=(N,\mathcal{A})$، شامل مجموعهٔ N از گره‌ها(رئوس) و مجموعهٔ A از کمان‌هاست که به صورت دوتایی‌هایی نه لزوماً مرتب از گره‌های متمایز N می‌باشند. کمان موجود بین دو گرهٔ j,i را می‌توان به صورت (i,j) یا (j,i) نمایش داد. شکل ۱-۲ نمایش دهنده یک گراف بدون جهت است.



شکل ۱-۲ گراف بدون جهت

---

[1]-directed graph

[2]-nodes

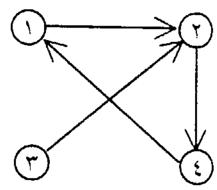
[3]-arcs

[4]-undirected graph

ماتریس وقوع گـــره- کمـــان[1]: مـاتریس وقـوع گـره- کمـان گـراف جـهت‌دار $G=(N,\mathcal{A})$ کـه در آن $|N|=n$,$|\mathcal{A}|=m$. ماتریسی با n سطر و m ستون است که هر سطر آن متناظر با یک گره و هـــر ستون آن متناظر با یک کمان است. هرستون شامل دقیقاً دو عنصر غیر صفر متناظر کمان (i,j) بـــوده. که در سطر iام، عدد ۱+ ودر سطر jام، عدد ۱− ودر بقیهٔ سطرهای این ستون، عدد صفـــر قـرار دارد. به‌عبارت دیگر a_{ij} ۱ گو ستون مربوط به کمان (i,j) و e_i نمایندهٔ بردار ستونی واحد که در سطر iام آن عدد ۱+ است؛ باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$a_{ij}=e_i-e_j \quad e_i\ ,e_j\in E^n \tag{۱-۱}$$

شکل ۱-۳ نمایش دهندهٔ یک گراف و ماتریس وقوع گره- کمان متناظر با آن می‌باشد.



G

$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a_{12} & a_{24} & a_{32} & a_{41} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

شکل ۱-۳ ماتریس وقوع گره- کمان گراف (G)

ماتریس هنگ کامل (رتبهٔ کامل)[2]: ماتریس A را ماتریس هنگ کامل گویند هرگاه، دترمینان هر زیـــر ماتریس مربع آن ± 1 یا صفر باشد.

---

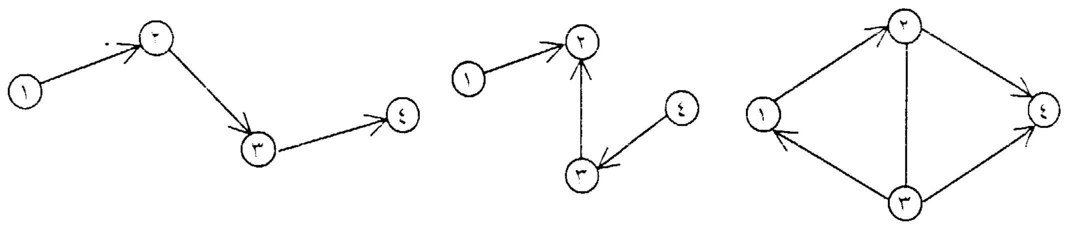
[1]: node- arc incidence matrix

[2]-tatally unimodular matrix

مسیر: در گراف جهت‌دار $G=(N,\mathcal{A})$، مسیر p از رأس i_0 به رأس i_p دنباله‌ای از کمان‌ها به صورت $P=\{(i_0,i_1),(i_1,i_2),\dots,(i_{p-1},i_p)\}$ می‌باشد به‌طوریکه رأس ابتدایی هرکمان، همان رأس انتهایی کمان قبل است. اگر رئوس i_0 و i_p متمایز باشند، آنگاه مسیر را مسیر ساده نامند.

زنجیر: زنجیر ساختاری مشابه مسیر دارد که در آن جهت کمان‌ها مهم نیست.

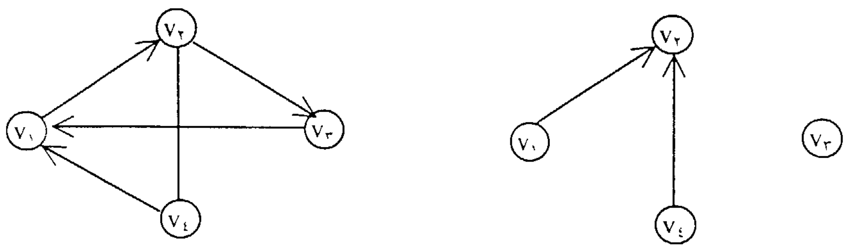
دور: یک زنجیر بسته[1] (زنجیری که رأس ابتدا و انتهای آن یکی باشد.) را دور گوئیم.



۱-۴ (الف) مسیر ۱ -۴ (ب) زنجیر ۱-۴ (ج) دور

شکل ۱-۴ نمایشی از مسیر، زنجیر و دور

گراف همبند(مرتبط)[2]: گراف $G=(N,\mathcal{A})$، را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه از N، حداقل یک زنجیر وجود داشته باشد. شکل ۱-۵ یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند را نمایش می‌دهد.



۱-۵ (الف) گراف همبند ۱-۵ (ب) گراف ناهمبند

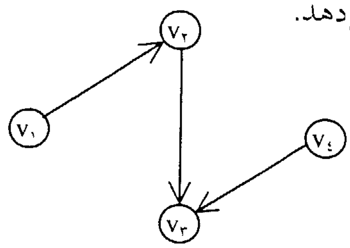
شکل ۱-۵

[1]-close chain

[2]-connected graph

درخت: یک گراف همبند و فاقد دور را درخت گوئیم که معمولاً با T نمایش داده می‌شود.

شکل ۱-۶یک درخت را نمایش می‌دهد.



شکل ۱-۶ نمایش یک درخت

درخت T با m گره $(m \geq 2)$ دارای سه خاصیت زیر است:

۱- با حذف هرکمان $(i,j) \in T$، درخت T به دو درخت T_1 و T_2 تجزیه می‌شود.

۲- هر درخت حداقل شامل دو رأس از درجهٔ ۱ می‌باشد که به این رئوس، رئوس پایانی یا برگ گویند.

۳- هر درخت با m گره، دارای $m-1$ کمان است.

سه خاصیت فوق به سادگی از تعریف درخت نتیجه می‌شوند [۱].

شبکه[1]: شبکه، گرافی جهت‌دار است مانند $G=(N,\mathcal{A})$ که به هر گرهٔ i یک عدد b_i به نام عرضه/تقاضا و به هر کمان (i,j) آن، مقدار حقیقی x_{ij} به نام جریان نسبت داده می‌شود. اگر $b_i > 0$، i را گرهٔ عرضه[2] واگر $b_i < 0$، i را گره تقاضا[3] ودر غیراینصورت i را گرهٔ انتقالی[4]یا میانی[5] می‌نامند. $\underline{x}=(x_{ij})_{(i,j)\in \mathcal{A}}$ را جریان شبکه نامند. هزینهٔ هر واحد جریان روی کمان (i,j) را با c_{ij}نمایش می‌دهیم. معمولاً فرض می‌کنیم که مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر است. یعنی: $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ اگر چنین نباشد در صورتیکه عرضه بیشتر از تقاضا باشد، یعنی: $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$، یک گرهٔ تقاضای فرضی با

---

[1]-network
[2]-supply node
[3]-deman-node
[4]-transshipment node
[5]-intermediate node

شمارهٔ $n+1$ و عدد $b_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n} b_i$ به شبکه افزوده می‌شود و از هر گرهٔ عرضه کمان‌هایی با هزینهٔ صفر به این گرهٔ جدید اضافه می‌کنیم.

در صورتیکه تقاضا بیش از عرضه باشد، یعنی: $\sum_{i=1}^{n} b_i < 0$، آنگاه یک گرهٔ عرضهٔ فرضی با شمارهٔ $n+1$ و عدد $b_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n} b_i$ به شبکه افزوده می‌شود و از آن به هرگرهٔ تقاضا کمانهایی با هزینهٔ صفر اضافه می‌کنیم.

جریان متعادل و شدنی: جریان $\underline{x}$ را متعادل گوئیم، هرگاه در قیدهای زیر صدق کند:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+b_i \qquad i\in N \tag{۱-۲}$$

و آنرا شدنی گوئیم هرگاه در قیود زیر صدق کند:

$$l_{ij}\le x_{ij}\le u_{ij} \qquad (i,j)\in \mathcal{A} \tag{۱-۳}$$

قیدهای (۱-۲)شرط تعادل و قیدهای(۱-۳) شرط کرانداری یاشدنی نامیده می‌شوند.

جریان $\underline{x}$ را که حداقل در یکی از قیدهای (۱-۲)یا (۱-۳) صدق نکند، جریان نشدنی نامیده می‌شود.

شبه جریان: جریان $\underline{x}$ که در قیود کرانداری صدق کند، شبه جریان است و ممکن است شرایط تعادل جریان روی گره‌ها را حفظ نکند.

لم ۱-۱: ماتریس وقوع گره-کمان شبکه، یک ماتریس هنگ کامل است.

برهان: اثبات به استقراء روی مرتبهٔ زیر ماتریس مربع B از ماتریس وقوع گره - کمان A می‌باشد. ابتدا فرض می‌کنیم B_1، یک زیر ماتریس مربع از مرتبهٔ یک باشد. چون تمام درایه‌های ماتریس A برابر ۱± یا ۰ هستند، بدیهی است که در این حالت ۱± یا ۰ = $\det\ B_1$. حال فرض می‌کنیم این خاصیت برای تمام زیرماتریس‌های مربع از مرتبهٔ $k-1$ درست باشد. و فرض می‌کنیم B_k یک زیرماتریس مربع دلخواه A از مرتبهٔ k باشد، و باید نشان دهیم که ۱± یا ۰ = $\det\ B_k$.