دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

نگاشت‌های تقریبا حافظ تعامد روی C^*- مدول‌ها

استاد راهنما

دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا عبداله‌پور

پژوهشگر

سیده منصوره عبداله‌زاده

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر عزیزم،

مادر مهربانم

و خواهران خوبم.

سپاسگزاری ...

سپاس خدای را که اول است و پیش از او اولی نبوده و آخر است و پس از او آخری نباشد و سپاس خدای را به هر چه که او را نزدیکترین فرشتگانش و گرامیترین آفریدگانش و پسندیده ترین ستایش کنندگانش ستوده اند. سپاسی که حد آن را انتها، عدد آن را شمارش، به پایان آن دسترسی و مدت آن را بریدنی نیست.

بعد از حمد و سپاس خدای منان که توفیق کسب علم و دانش را تا به امروز روزی ام قرار داده، بر خود لازم می دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همیشه دعای خیرشان بدرقه راهم بوده است، صمیمانه تشکر کنم و بر دستان پر مهرشان به نشانه سپاس، بوسه می زنم. از خواهران عزیزم که همواره حامی و راهنمای من بوده اند تشکر می کنم.

از استاد ارجمندم جناب دکتر نجاتی که با تجارب گرانمایه خود راهنما و راه گشای اینجانب بوده اند نهایت سپاسگزاری و قدردانی را دارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت روز افزون می کنم. از جناب آقای دکتر عبداله پور که زحمت مشاوره این پایان نامه را داشته اند نیز کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوستان خوبم خانم ها حافظی، رنجبریان، تقی نژاد، فدایی، همتی، قدیمی به خاطر دلگرمی ها و همفکری های بی دریغشان تشکر می کنم.

سیده منصوره عبداله زاده

مهر ۱۳۹۱

نام خانوادگی: عبداله زاده نام: سیده منصوره

عنوان پایان‌نامه: نگاشت‌های تقریبا حافظ تعامد روی C^*- مدول‌ها

استاد راهنما: دکتر عباس نجاتی
استاد مشاور: دکتر محمد رضا عبداله پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۵۹

کلیدواژه‌ها: C^*- مدول هیلبرت، تعامد تقریبی، نگاشت حافظ تعامد، پایداری

چکیده :
در این پایان‌نامه نگاشت‌های حافظ تعامد و تقریبا حافظ تعامد را در محیط C^*- مدول‌های ضرب داخلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بویژه هرگاه V, W، C^*- مدول‌های ضرب داخلی روی C^*- جبر $\mathcal{A}$ باشند، هر مضرب اسکالر از یک ایزومتری $\mathcal{A}-$ خطی، یک نگاشت حافظ تعامد $\mathcal{A}-$ خطی است. عکس این مطلب تنها در حالتی که $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{A}$ باشد، برقرار خواهد بود.
همچنین برآوردی از $\|\langle Tx, Ty\rangle - \|T\|^2\langle x, y\rangle\|$ را برای یک نگاشت تقریبا حافظ تعامد $\mathcal{A}-$ خطی $T : V \to W$ که V, W، C^*- مدول‌های ضرب داخلی روی یک C^*- جبر شامل $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ می‌باشند، ارائه می‌دهیم.
علاوه بر این نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ و V, W، C^*- مدول‌های هیلبرت باشند، یک نگاشت تقریبا حافظ تعامد $\mathcal{A}-$ خطی را به وسیله‌ی یک نگاشت حافظ تعامد $\mathcal{A}-$ خطی می‌توان تقریب زد.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیشینه

فضای C^*- مدول هیلبرت اولین بار توسط کاپلانسکی [۱] [۱۱] در سال ۱۹۵۳ معرفی شد. کاپلانسکی این تئوری را تنها با مدول‌هایی که روی C^*- جبرهای جابجایی و یکال تعریف شده بودند، ارائه داد.

در سال ۱۹۷۰ این تئوری به طور مستقل توسط پاشک [۲] [۱۵] و ریفل [۳] [۱۷] برای فضای C^*- جبر غیر جابجایی گسترش یافت.

فضاهای C^*- مدول هیلبرت ابزار بسیار مفیدی در تئوری عملگرهای جبری، عملگر $K-$ تئوری، تئوری گروه نمایش و تئوری فضاهای عملگر هستند. همچنین این فضاها نقش کلیدی را در هم‌ارزی موریتا [۴] از یک C^*- جبر، $K-$ تئوری از C^*- جبرها و تئوری گروه‌های کوانتوم C^*- جبر ایفا می‌کنند.

در مکانیک کوانتوم، حاصلضرب سیستم از فضای C^*- مدول هیلبرت که توسط بت [۵] و اسکید [۶] معرفی شده‌اند، به صورت حاصلضرب سیستم‌ها از فضای هیلبرت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این حاصلضرب سیستم‌ها برای

[۱] Kaplansky
[۲] Paschke
[۳] Rieffel
[۴] Morita
[۵] Bhat
[۶] Skeide

توسعه‌ی تئوری آروسون [۷] از $B(\mathcal{H})$ به یک C^*- جبر کلی بسیار مهم هستند.

نگاشت‌های تقریبا حافظ تعامد نیز اولین بار توسط چمیلاینسکی [۸] مورد بررسی قرار گرفت. او ابتدا نگاشت‌های خطی تقریبا حافظ تعامد را در فضای هیلبرت مورد تحقیق قرار داد [۶] و نشان داد در حالتی که فضا متناهی بعد باشد، نگاشت خطی $\varepsilon - OP$ نسبت به نگاشت خطی OP بسته است و برآوردی از $\|\langle Tx, Ty\rangle - \|T\|^{۲}\langle x, y\rangle\|$ را برای یک نگاشت تقریبا حافظ تعامد $A-$ خطی ارائه داد، همچنین این سوال را مطرح کرد که «آیا نگاشت‌های $\varepsilon - OP$ در فضای هیلبرت نامتناهی بعد نیز پایدارند؟» [۷] سپس ترنسک [۹] نگاشت‌های تقریبا حافظ تعامد را در C^*- مدول‌های هیلبرت مطرح کرد و مقدار دقیق پایداری این نگاشت‌های را بدست آورد [۲۰]. این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی

- $D.\ Ilisevic,\ A.\ Turnsek,\ Approximately\ orthogonality\ preserving\ mappings\ on\ C^* - modules,\ J.\ Math.\ Anal.\ Appl$ ۳۴۱(۲۰۰۸) ۳۰۸ − ۲۹۸

نوشته شده است.

[۷] Arveson
[۸] Chmielinski
[۹] Turnsek

۲.۱ تعاریف و قضایای اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری مختلط $\mathcal{A}$ را همراه با عمل ضرب $(.)$، یک جبر مختلط می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

۱) $x.(y.z) = (x.y).z$؛

۲) $(x + y).z = x.z + y.z$ و $x.(y + z) = x.y + x.z$؛

۳) $\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$.

تعریف ۲.۲.۱. نگاشت $\|.\| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ را یک نرم جبری روی جبر $\mathcal{A}$ می‌نامیم هرگاه علاوه بر برقراری شرایط نرم به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|.$$

اگر جبر نرمدار $\mathcal{A}$ با نرم تعریف شده کامل باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ گویند.

تعریف ۳.۲.۱. هرگاه $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار با نرم واحد باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ را یکال [۱۰] می‌نامیم. معمولا عضو یک $\mathcal{A}$ را با e نمایش می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱. عمل $*$ یا برگشت [۱۱] از جبر مختلط $\mathcal{A}$ به روی $\mathcal{A}$ به صورت $*(x) = x^*$ تعریف می‌شود و به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ دارای ویژگی‌های زیر است

۱) $(x + y)^* = x^* + y^*$؛

۲) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$ ؛

۳) $(xy)^* = y^* x^*$؛

۴) $(x^*)^* = x$.

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را همراه با عمل برگشت، یک $*-$ جبر باناخ می‌نامند.

---

[۱۰] Unital

[۱۱] Involution

تعریف ۵.۲.۱. هرگاه $\mathcal{A}$ یک $*-$ جبر باناخ باشد و برای هر عضو $x \in \mathcal{A}$ شرط $\|x^*x\| = \|x\|^۲$ برقرار باشد آنگاه $\mathcal{A}$ را یک B^*- جبر یا C^*- جبر می‌نامند.

مثال ۶.۲.۱. *میدان اعداد مختلط با عمل برگشت $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ یک C^*- جبر یکال می‌باشد، همچنین هرگاه Ω یک فضای هاسدورف موضعا فشرده باشد، $C_۰(\Omega)$ با عمل برگشت $f \mapsto \overline{f}$ یک C^*- جبر می‌باشد.*

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد. عضو $x \in \mathcal{A}$ را معکوس‌پذیر می‌نامیم هرگاه عضوی مانند $x^{-۱} \in \mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که

$$x^{-۱}x = xx^{-۱} = e.$$

مجموعه‌ی عناصر معکوس‌پذیر $\mathcal{A}$ را با $Inv(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد. طیف [۱۲] عنصر $a \in \mathcal{A}$ با نماد $\sigma(a)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda e - a \notin Inv(\mathcal{A})\}.$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*-$ جبر باشد. عضو $a \in \mathcal{A}$

- خودالحاق است اگر $a = a^*$؛
- نرمال است اگر $a^*a = aa^*$؛
- تصویر است اگر $a^۲ = a = a^*$؛
- خودتوان است اگر $a^۲ = a$؛
- مثبت است اگر a خودالحاق بوده و $\sigma(a) \subseteq [۰, \infty)$.

مجموعه‌ی عناصر مثبت و مجموعه‌ی عناصر خودالحاق $\mathcal{A}$ را به ترتیب با $\mathcal{A}^+$ و $\mathcal{A}_{sa}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. هرگاه $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر باشد، $\mathcal{A}-$ مدول چپ W همراه با یک ضرب داخلی $\mathcal{A}-$ مقداری

---
[۱۲] Spectrum

$$\langle .,. \rangle : W \times W \longrightarrow \mathcal{A} \qquad (x, y \in W)$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی یا C^*- مدول ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in W$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

۱) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$؛

۲) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$؛

۳) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$؛

۴) $\langle x, x \rangle \geqslant 0,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ضرب داخلی تعریف شده نسبت به مولفه‌ی اول خطی و نسبت به مولفه‌ی دوم مزدوج خطی می‌باشد. زیرا به ازای هر $x, y \in W,\ a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\langle x, ay \rangle = \langle ay, x \rangle^* = (a \langle y, x \rangle)^* = \langle y, x \rangle^* a^* = \langle x, y \rangle a^*.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. فضای W یک $\mathcal{A}-$ مدول نیم ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه شرایط ۳ ,۲ ,۱ از تعریف فوق برقرار بوده و علاوه بر آن شرط زیر نیز برقرار باشد

$'$۴) به ازای هر $x \in W$، $\langle x, x \rangle \geqslant 0$.

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر W یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی باشد، نگاشت $\|.\|_W : W \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\|x\|_W = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}},\ \ (x \in W)$ یک نرم روی W می‌باشد(خواص نرم را دارا می‌باشد). بنابراین $(W, \|.\|_W)$ یک فضای نرمدار می‌باشد.

نکته ۱.۲.۱۳. *اگر W یک $\mathcal{A}-$ مدول نیم ضرب داخلی باشد، آنگاه $\|.\|_W$ یک نیم نرم روی W است.*

- اگر فضای $(W,\ \|.\|_W)$ با نرم تعریف شده کامل باشد، آنگاه W یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت یا C^*- مدول هیلبرت [۱۳] روی C^*- جبر $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود.

[۱۳] Hilbert C^*- Module

گزاره ۱۴.۲.۱. [۱۳، گزاره ۱.۱] *اگر W یک $\mathcal{A}-$ مدول نیم ضرب داخلی باشد و $x, y \in W$، آنگاه*

$$\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leqslant \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle. \qquad (۱.۱)$$

اثبات. در ابتدا فرض می‌کنیم $\|\langle x,x\rangle\| = ۱$. بنابراین به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned} \circ \leqslant \langle ax-y, ax-y\rangle &= \langle ax,ax\rangle - \langle ax,y\rangle - \langle y,ax\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= a\langle x,x\rangle a^* - a\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle a^* + \langle y,y\rangle. \end{aligned}$$

از آنجائیکه در هر C^*- جبر $\mathcal{A}$ $(a,b \in \mathcal{A})$ $\quad a^*ba \leqslant \|b\|a^*a,$ می‌باشد، با فرض $a = \langle y,x\rangle$ داریم

$$\begin{aligned} &\circ \leqslant aa^* - aa^* - aa^* + \langle y,y\rangle \\ &\Rightarrow aa^* \leqslant \langle y,y\rangle \\ &\Rightarrow \langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leqslant \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle. \end{aligned}$$

حال اگر $\alpha \neq ۱, \quad \|\langle x,x\rangle\| = \alpha$، آنگاه $\|\langle \frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \frac{x}{\sqrt{\alpha}}\rangle\| = ۱$. در نتیجه با فرض $x_۱ = \frac{x}{\sqrt{\alpha}}$ و با استفاده از آنچه که ثابت شد، نابرابری (۱.۱) برقرار خواهد بود.

□

لم ۱۵.۲.۱. *اگر W یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in W$، آنگاه نابرابری زیر برقرار است*

$$\|\langle x,y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

نابرابری فوق به نابرابری کوشی- شوارتز [۱۴] در فضای $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی معروف است.

اثبات. فرض کنید $a = \langle x,y\rangle$، آنگاه با استفاده از نابرابری (۱.۱) داریم

$$a^*a \leqslant \alpha c.$$

[۱۴] Caushy - Schwartz Inequality

که در آن $\alpha = \|\langle x,x\rangle\|$ یک مقدار حقیقی بوده و $c = \langle y,y\rangle$ یک عضو در $\mathcal{A}$ است، لذا

$$\|a^*a\| \leqslant \|\alpha c\| = |\alpha|\|c\|.$$

از آنجائیکه $a^*a \in \mathcal{A}$ و $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر است، پس $\|a^*a\| = \|a\|^۲$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\|a\|^۲ \leqslant |\alpha|\|c\| \quad &\Longrightarrow \quad \|a\| \leqslant |\alpha|^{\frac{۱}{۲}}\|c\|^{\frac{۱}{۲}}\\ &\Longrightarrow \quad \|\langle x,y\rangle\| \leqslant \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}\|\langle y,y\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}\\ &\Longrightarrow \quad \|\langle x,y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

نکته ۱۶.۲.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر باشد. از آنجائیکه $\langle x,x\rangle$ یک عضو مثبت در $\mathcal{A}$ می‌باشد، لذا ریشه دوم مثبت آن وجود دارد و با $|x|$ نشان داده می‌شود.*

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید W یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی باشد. همانند فضاهای ضرب داخلی معمولی می‌توان یک فضای خارج قسمتی از W را ساخت که یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی باشد. در حقیقت فرض کنید $N = \{x \in W :\ \langle x,x\rangle = ۰\}$. به وضوح N یک زیر مدول بدیهی از W می‌باشد. پس W/N یک $\mathcal{A}-$ مدول و با تعریف ضرب داخلی $\mathcal{A}-$ مقداری

$$\langle x+N, y+N\rangle = \langle x,y\rangle, \qquad (x,y \in W),$$

یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی خواهد بود.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر و W یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت باشد. W یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت تام [15] نامیده می‌شود هرگاه ایده‌آل دو طرفه $Span\{\langle x,y\rangle :\ x,y \in W\}$ در $\mathcal{A}$ چگال باشد، یعنی

$$\mathcal{A} = \overline{Span}\{\langle x,y\rangle :\ x,y \in W\}.$$

در ادامه به ذکر چند مثال از $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت می‌پردازیم.

[15] Full

۱) اگر $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ با ضرب داخلی $\langle a,b\rangle = ab^*, \quad (a,b\in\mathcal{A})$ یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت می‌باشد. همچنین اگر J یک ایده‌آل راست بسته در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه J یک زیر $\mathcal{A}-$ مدول از $\mathcal{A}$ بوده و در نتیجه یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت است.

۲) اگر $\{E_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه‌ی متناهی از $\mathcal{A}-$ مدول‌های هیلبرت باشد، آنگاه $\oplus E_i = \{(x_i)_i : \ x_i\in E_i\}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول، و با ضرب داخلی زیر یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت می‌باشد.

$$\langle x,y\rangle = \sum_i \langle x_i,y_i\rangle : \quad x=(x_i)_i,\ y=(y_i)_i.$$

همچنین اگر $\{E_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathcal{A}-$ مدول‌های هیلبرت باشد، آنگاه

$$\oplus E_i = \{(x_i)_i : \quad x_i\in E_i\ ,\ \textstyle\sum_i^n \langle x_i,x_i\rangle \quad \text{همگرا در } \mathcal{A}\ \},$$

یک $\mathcal{A}-$ مدول، و با ضرب داخلی تعریف شده در حالت متناهی یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت می‌باشد.

برای مشاهده‌ی خوش تعریف بودن این ضرب داخلی فرض کنید J زیر مجموعه‌ی متناهی از I باشد، آنگاه طبق نابرابری کوشی- شوارتز برای $\mathcal{A}-$ مدول‌های ضرب داخلی داریم

$$\|\langle x,y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad (x,y\in\oplus_J E_i) \quad \Rightarrow \quad \|\langle x,y\rangle\| \leqslant \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}\|\langle y,y\rangle\|^{\frac{1}{2}},$$

و با توجه به ضابطه‌ی ضرب داخلی خواهیم داشت

$$\|\sum_{i\in J}\langle x_i,y_i\rangle\|^{2} \leqslant \|\sum_{i\in J}\langle x_i,x_i\rangle\|\|\sum_{i\in J}\langle y_i,y_i\rangle\|.$$

از آنجائیکه $x,y\in\oplus_J E_i$، لذا طرف راست نابرابری فوق همگرا در $\mathcal{A}$ می‌باشد. بنابراین $\sum_{i\in J}\langle x_i,y_i\rangle$ در $\mathcal{A}$ همگراست.

۴) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر و $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. ضرب تانسوری $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول، و با ضرب داخلی $\mathcal{A}-$ مقداری

$$\langle \xi\otimes a, \eta\otimes b\rangle = \langle\xi,\eta\rangle ab^*, \qquad (\xi,\eta\in\mathcal{H},\ a,b\in\mathcal{A}),$$

یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت می‌باشد.

نکته ۱۹.۲.۱. C^*- مدول‌های هیلبرت در برخی موارد مانند فضاهای هیلبرت رفتار می‌کنند. برای مثال اگر W یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت باشد و $x \in W$ ، آنگاه

$$\|x\| = \sup\left\{\|\langle x, y\rangle\| : \ y \in W, \ \|y\| \leqslant ۱\right\}.$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید W یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت و N زیر مدول بسته از آن باشد. تعریف می‌کنیم

$$N^{\perp} = \{y \in W : \ \langle x, y\rangle = ۰, \ x \in N\}.$$

$N^{\perp}$ نیز یک زیر مدول بسته از W می‌باشد، اما بر خلاف فضای هیلبرت همواره $W = N \oplus N^{\perp}$ نیست و حتی ممکن است $N^{\perp\perp}$ خیلی وسیع‌تر از N باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۱.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A} = C(X)$ ، C^*- جبر تمام توابع پیوسته از X به $\mathbb{C}$ باشد. به ازای هر $g \in \mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم

$$\|g\| = \sup_{\|x\|=۱} |g(x)| \,, \quad g^* = \overline{g}.$$

واضح است که $\mathcal{A}$ خود یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت است. فرض کنید Y زیر مجموعه‌ی ناتهی و بسته از X باشد به طوری که $\overline{Y^c} = X$ و $F = \left\{f \in \mathcal{A} : \ f(Y) = \{۰\}\right\}$. برای محاسبه‌ی $F^{\perp}$ ابتدا نشان می‌دهیم که F بسته است. فرض کنید $f \in \overline{F}$ ، آنگاه دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{A}$ مانند $\{f_n\}$ وجود دارد به طوری که $f_n \to f$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t \in Y$ ، $f_n(t) = ۰$ است. با توجه به اینکه

$$۰ = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

پس $f \in F$ و در نتیجه F بسته است. لذا

$$F^{\perp} = \left\{g \in \mathcal{A} : \ \langle f, g\rangle = ۰, \ f \in F\right\} = \{۰\},$$

$$F^{\perp\perp} = \left\{g \in \mathcal{A} : \ \langle f, g\rangle = ۰, \ f \in F^{\perp} = \{۰\}\right\} = \mathcal{A}.$$

روابط فوق نشان می‌دهند که رابطه‌ی $\mathcal{A} = F \oplus F^{\perp}$ برقرار نیست، از طرفی $F^{\perp\perp} = \mathcal{A}$ نیز خیلی وسیع‌تر از F است.

قضیه ۲۲.۲.۱. [*باناخ- اشتاین هاوس*] [۱۶] *فرض کنید X یک فضای باناخ و Y فضای خطی نرمدار باشد. اگر $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از تبدیلات خطی و کراندار از X به توی Y باشد، آنگاه عددی مانند $M < \infty$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\alpha \in I$*

$$\|\Lambda_\alpha\| \leq M,$$

یا به ازای هر x در G_δ چگال در X

$$\sup \|\Lambda_\alpha x\| = \infty.$$

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*– جبر باشد و V, W فضاهای $\mathcal{A}$– مدول هیلبرت باشند. $L(V, W)$ را مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های $T : V \to W$ تعریف می‌کنیم که، یک نگاشت الحاقی $T^* : W \to V$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in V,\ y \in W$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

به آسانی بررسی می‌شود که هر عضو $L(V, W)$ یک نگاشت $\mathcal{A}$– خطی و کراندار است.

- به ازای هر $x_1, x_2 \in V,\ y \in W$

$$\begin{aligned}\langle T(x_1 + x_2), y\rangle &= \langle (x_1 + x_2), T^*y\rangle = \langle x_1, T^*y\rangle + \langle x_2, T^*y\rangle \\ &= \langle Tx_1, y\rangle + \langle Tx_2, y\rangle = \langle Tx_1 + Tx_2, y\rangle.\end{aligned}$$

- به ازای هر $x \in V,\ y \in W,\ a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\langle T(ax), y\rangle &= \langle ax, T^*y\rangle = a\langle x, T^*y\rangle \\ &= a\langle T(x), y\rangle = \langle aT(x), y\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین T، $\mathcal{A}$– خطی است. حال فرض کنید $V_1 = \{x \in V :\ \|x\| \leqslant 1\}$ گوی واحد در V باشد. به ازای هر $x \in V_1$ و $T \in L(V, W)$، نگاشت w_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w_x : W \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad w_x(y) = \langle Tx, y\rangle, \quad (y \in W).$$

[۱۶] Banach - Steinhaus Theorem

در این صورت خواهیم داشت

$$\|w_x(y)\| = \|\langle Tx, y\rangle\| = \|\langle x, T^*y\rangle\| \leqslant \|x\|\|T^*y\| \leqslant \|T^*y\| \leqslant \|T^*\|\|y\|.$$

پس $\{w_x\}$ دنباله‌ای از تبدیلات خطی و کراندار است، لذا طبق قضیه‌ی باناخ- اشتاین هاوس عددی مانند $M < \infty$ وجود دارد به طوری که $\{\|w_x\| : x \in V_۱\}$ کراندار است. بنابراین نگاشت T کراندار می‌باشد، زیرا

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=۱} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=۱} \|\langle Tx, y\rangle\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=۱} \|w_x(y)\| = \|w_x\| \leqslant M.$$

$L(V,W)$ را مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های الحاقی‌پذیر [۱۷] از V به W می‌نامیم.

بدیهی است اگر $T \in L(V,W)$، آنگاه $T^* \in L(W,V)$ است. همچنین اگر Z یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت باشد و $S \in L(W,Z)$، آنگاه $ST \in L(V,Z)$ (همانند فضای هیلبرت، ترکیب دو عملگر الحاقی‌پذیر، الحاقی‌پذیر است).

$L(V,V)$ را که به اختصار با $L(V)$ نشان می‌دهیم یک C^*- جبر است، زیرا به وضوح فضای $(L(V),+)$ به همراه عمل ترکیب توابع یک جبر است و چون به ازای هر $T,S \in L(V)$

$$\begin{aligned}\|TS\| &= \sup\{\|TSx\| : x \in V_۱\}\\ &\leqslant \sup\{\|T\|\|Sx\| : x \in V_۱\}\\ &= \|T\|\sup\{\|Sx\| : x \in V_۱\} = \|T\|\|S\|,\end{aligned}$$

پس $L(V)$ یک جبر باناخ است. همچنین با عمل برگشت $T^* = \overline{T}$، $L(V)$ یک $*-$ جبر باناخ می‌باشد. با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &\geqslant \sup\{\|\langle T^*Tx, x\rangle\| : x \in V_۱\}\\ &= \sup\{\|\langle Tx, Tx\rangle\| : x \in V_۱\}\\ &= \sup\{\|Tx\|^۲ : x \in V_۱\} = \|T\|^۲\end{aligned}$$

[۱۷] Adjointable

و نیز $\|T^*T\| \leqslant \|T\|^{۲}$، بنابراین $\|T\|^{۲} = \|T^*T\|$. پس $L(V)$، C^* – جبر تمام عملگرهای الحاقی‌پذیر روی $\mathcal{A}$ – مدول V می باشد.

همان طور که مطرح شد هر عضو $L(V,W)$ یک نگاشت $\mathcal{A}$ – خطی و کراندار است، اما عکس این مطلب همیشه برقرار نیست. ممکن است یک نگاشت $\mathcal{A}$ – خطی و کراندار باشد اما لزوما الحاقی‌پذیر نباشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۴.۲.۱. فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده و Y زیر مجموعه‌ی بسته و ناتهی از X باشد به طوری که $\overline{Y^c} = X$. همچنین $\mathcal{A} = C(X)$، C^* – جبر تمام نگاشت‌های پیوسته از X به $\mathbb{C}$ باشد. ۱ را عضو همانی $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $F = \{f \in \mathcal{A} :\ f(Y) = \{۰\}\}$ و $i : F \to \mathcal{A}$ نگاشت شمول باشد. نشان می‌دهیم i الحاقی‌پذیر نیست.

فرض می‌کنیم i الحاقی‌پذیر باشد. به ازای هر $f \in F,\ g \in \mathcal{A}$ داریم

$$\langle if, g\rangle = \langle f, i^*g\rangle.$$

از آنجائیکه $۱ \in \mathcal{A}$، قرار دهید $g = ۱$. چون i نگاشت شمول است، لذا

$$\langle f, ۱\rangle = \langle if, ۱\rangle = \langle f, i^*(۱)\rangle.$$

بنابراین به ازای هر $f \in F$، $\langle f, ۱ - i^*(۱)\rangle = ۰$. در نتیجه $۱ - i^*(۱) \in F^{\perp}$. اما با توجه به مثال ۲۱.۲.۱، $F^{\perp} = ۰$. پس $۱ - i^*(۱) = ۰$، بنابراین $i^*(۱) = ۱$، لذا $۱ \in F$ که این یک تناقض است.

حال رده‌ای از عملگرها را روی C^* – مدول‌ها معرفی می‌کنیم که مشابه با عملگرهای با رتبه متناهی روی یک فضای هیلبرت می‌باشند.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^* – جبر و V, W، $\mathcal{A}$ – مدول‌های هیلبرت باشند. $K_۰(V,W)$ را مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های

$$\theta_{x,y} : V \to W, \qquad \theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle, \quad (x \in W,\ y, z \in V),$$

در نظر می‌گیریم. به وضوح $K_\circ(V,W)$ زیر فضای خطی از $L(V,W)$ است که تنها به الحاقی‌پذیر بودن عناصر $K_\circ(V,W)$ اشاره می‌کنیم

$$\left\langle \big(\theta_{x,y}(z)\big)^*, e\right\rangle = \left\langle z, \theta_{x,y}(e)\right\rangle = \left\langle z, x\langle y,e\rangle\right\rangle$$

$$= \langle z,x\rangle\langle y,e\rangle = \langle y\langle x,z\rangle, e\rangle$$

$$= \left\langle \theta_{y,x}(z), e\right\rangle.$$

اگر G یک $\mathcal{A}-$ مدول هیلبرت باشد و $\theta_{x,y}\in K_\circ(V,W),\ \theta_{u,v}\in K_\circ(W,G)$ آنگاه روابط زیر را داریم

۱) $\theta_{x,y}.\theta_{u,v} = \theta_{x\langle y,u\rangle,v} = \theta_{x,v\langle u,y\rangle}$.

۲) به ازای هر $T\in L(W,G)$، $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$.

۳) به ازای هر $S\in L(G,V)$، $\theta_{x,y}S = \theta_{x,S^*y}$.

تعریف کنید

$$K(V,W) = \overline{Span}\ K_\circ(V,W) = \overline{Span}\ \{\theta_{x,y}:\ \ x\in W,\ y\in V\}.$$

$K(V,W)$ را مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده از V به W می‌نامند. نرم در این فضا به صورت

$$\|\theta_{x,y}\| = \sup\{\|\theta_{x,y}(z)\|:\ z\in V_1\},$$

می‌باشد. $K(V,V)$ را مختصرا با $K(V)$ نشان داده و یک ایده‌آل دو طرفه از $L(V)$ می‌باشد، زیرا

- به ازای هر $T\in L(V)$، $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$، زیرا

$$T\theta_{x,y}(z) = T(x\langle y,z\rangle) = T(x)\langle y,z\rangle = \theta_{Tx,y}(z), \qquad (z\in V).$$

- به ازای هر $S\in L(V)$، $\theta_{x,y}S = \theta_{x,S^*y}$، زیرا

$$\theta_{x,y}S(z) = \theta_{x,y}(S(z)) = x\langle y,S(z)\rangle = x\langle S^*y,z\rangle = \theta_{x,S^*y}(z), \qquad (z\in V).$$

مشابه با فضای $L(V)$ می‌توان نشان داد فضای $K(V)$، C^*- جبر تمام عملگرهای فشرده می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۲۶. [۱۳، ص ۱۰] هرگاه $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. عملگر رتبه واحد روی $\mathcal{H}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\xi.\eta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad \xi.\eta(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta \rangle, \quad (\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{H}).$$

تعریف ۱.۲.۲۷. نگاشت $T : V \to W$ که V, W، $\mathcal{A}-$ مدول‌های ضرب داخلی هستند، $\mathcal{A}-$ خطی نامیده می‌شود هرگاه T خطی باشد و

$$T(ax) = aT(x), \qquad (x \in V,\ a \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۱.۲.۲۸. بردارهای u, v در یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی $(W, \langle .,. \rangle)$ متعامد نامیده می‌شوند و به صورت $u \perp v$ نشان داده می‌شوند هرگاه $\langle u, v \rangle = ۰$.

تعریف ۱.۲.۲۹. بردارهای u, v در یک $\mathcal{A}-$ مدول ضرب داخلی $(W, \langle .,. \rangle)$ تقریبا متعامد یا $\varepsilon-$ متعامد نامیده می‌شوند و به صورت $u \perp^{\varepsilon} v$ نشان داده می‌شوند هرگاه

$$\|\langle u, v \rangle\| \leqslant \varepsilon \|u\| \|v\|, \qquad \varepsilon \in [۰, ۱).$$

تعریف ۱.۲.۳۰. نگاشت $T : V \to W$ که V, W، $\mathcal{A}-$ مدول‌های ضرب داخلی هستند، حافظ تعامد یا به اختصار OP نامیده می‌شود هرگاه

$$x, y \in V, \quad \langle x, y \rangle = ۰ \quad \Rightarrow \quad \langle Tx, Ty \rangle = ۰.$$

تعریف ۱.۲.۳۱. نگاشت $T : V \to W$ که V, W، $\mathcal{A}-$ مدول‌های ضرب داخلی هستند، اکیدا حافظ تعامد یا به اختصار SOP نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in V$

$$\langle x, y \rangle = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad \langle Tx, Ty \rangle = ۰.$$

تعریف ۱.۲.۳۲. نگاشت $T : V \to W$ که V, W، $\mathcal{A}-$ مدول‌های ضرب داخلی هستند، تقریبا حافظ تعامد [۱۸] یا به اختصار $\varepsilon - OP$ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر

$$x, y \in V, \quad \langle x, y \rangle = ۰ \quad \Rightarrow \quad \big\|\langle Tx, Ty \rangle\big\| \leqslant \varepsilon \|Tx\| \|Ty\|, \qquad \varepsilon \in [۰, ۱).$$

[۱۸] Approximately Orthogonality Preserving

پس بنا به تعریف فوق رده‌ای از نگاشت‌های تقریبا حافظ تعامد را می‌توان در نظر گرفت از این جهت که تمام آنها در شرط $x \perp y \quad \Rightarrow \quad Tx \perp^{\varepsilon} Ty$ صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۲.۳۳. فرض کنید $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ در معادله‌ی تعامد صدق می‌کند هرگاه

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad (x, y \in \mathcal{H}).$$

به وضوح تمام جواب‌های معادله‌ی فوق ایزومتری‌های خطی هستند و رده‌ی جواب‌های تقریبی از آن را به ازای $\varepsilon \geqslant ۰$ با نامساوی زیر نشان می‌دهند.

$$\left|\big\langle f(x), f(y) \big\rangle - \langle x, y \rangle\right| \leqslant \varepsilon \|x\| \|y\|, \qquad (x, y \in \mathcal{H}).$$

نکته ۱.۲.۳۴. *اتحاد قطبی برای ضرب داخلیA− مقداری $\langle .,. \rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$۴\langle x, y \rangle = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle.$$

تعریف ۱.۲.۳۵. فرض کنید X یک فضای نرمدار مختلط باشد. نگاشت $[.,.] : X \times X \to \mathbb{C}$ یک نیم ضرب داخلی [۱۹] روی X نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in X$ داشته باشیم

- $[x, x] = \|x\|^۲$؛
- $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda [x, z] + \mu [y, z]$؛
- $\big|[x, y]\big|^۲ \leqslant [x, x][y, y]$؛

علاوه بر این همیشه می‌توان یک نیم ضرب داخلی $[.,.]$ را طوری انتخاب کرد که

- $[x, \lambda y] = \overline{\lambda}[x, y], \quad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C})$.

قضیه ۱.۲.۳۶. [۱۲ ، قضیه ۱] *فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار(حقیقی یا مختلط) باشد و $U : X \to X$. نگاشت U یک ایزومتری است اگر و تنها اگر یک نیم ضرب داخلی $[.,.]$ موجود باشد به طوری که*

$$[Ux, Uy] = [x, y], \qquad (x, y \in X).$$

[۱۹] Semi – Inner Product