دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی محض

توپولوژی زاریسکی بر روی مدولها

استاد راهنما:

دکتر ناصر زمانی

اساتید مشاور:

دکتر محمدباقرمقیمی

دکتر احمد خوجالی

توسط:

زینب مهمدی کرتلایی

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۰

دانشگاه : **محقق اردبیلی**	دانشکده: **علوم**	گروه : **ریاضی**
تاریخ آغاز طرح : **۸۹/۹/۳**	تاریخ خاتمه طرح : **۹۰/۴/۲۸**	تعداد صفحات : **۹۱**

کلید واژه:

چکیده :

فهرست مندرجات

مقدمه

شبکه‌های برداری، شبکه‌های خطی هستند که برای اولین بار توسط ریس[1]، کانتوریچ[2] و فردهال[3] در اواسط سال ۱۹۳۰ مورد بررسی قرار گرفتند[۴]. پس از آن مراکزی برای تحقیق روی شبکه‌های برداری در اتحاد جماهیر شوروی و ژاپن تأسیس شد.

کانتوریچ و شاگردانش برای اولین بار به اهمیت مطالعه‌ی شبکه‌های برداری در ارتباط با تئوری باناخ از فضاهای برداری نرمدار پی بردند. آن‌ها شبکه‌های برداری نرمدار و همچنین عملگرهای خطی بین چنین شبکه‌های برداری را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً کتاب‌های مهم دیگری مربوط به این موضوع توسط شوارز[4] (۱۹۸۴) و علی پرانتیز[5] و بورکین شاو[6] ۱۹۸۵ به چاپ رسیده است. موضوع $b-$ خاصیت را نخستین بار آلپای[7] در سال (۲۰۰۳) بر روی فضاهای ریس مورد مطالعه قرار داد [۱]. و نشان داد که فضاهای ریس تحت چه شرایطی دارای $b-$ خاصیت هستند. آلپای موضوع $b-$ خاصیت را بر روی عملگرهای کراندار مرتب نیز مورد مطالعه قرار داد[۲] ,[۱]. او مثال‌های زیادی را که دارای $b-$ خاصیت هستند ذکر کرد، به عنوان نمونه فضاهای دوگان مرتب، فضاهای کامل،$KB-$ فضاها. و همچنین مثالی از فضاهایی که دارای $b-$ خاصیت نیستند مانند c_0 ذکر کرد.

---

[1] Riesz
[2] Kantorovic
[3] Freudenthal
[4] Schwarz
[5] Aliprantis
[6] Burkinshaw
[7] Alpay

این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل می‌باشد که فصل اول شامل تعاریف و مقدمات اولیه و فصل دوم فضاهای ریس می‌باشد. فصل سوم شامل نتایجی در مورد $b-$ خاصیت و مثال‌های از فضاهایی می‌باشد که دارای خاصیت مذکور می‌باشند. این نامه بر اساس منبع [۱] نگارش شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱. فضای برداری E را فضای برداری مرتب گوییم هر گاه دارای رابطه‌ی ترتیبی $\geq$ باشد. (یعنی رابطه‌ی $\geq$، دارای خاصیت‌های بازتابی، تعدی و پادمتقارن باشد) و در شرایط زیر صدق کند

۱) اگر $x \geq y$ باشد، آنگاه برای هر $z \in E$، $x + z \geq y + z$؛

۲) اگر $x \geq y$ باشد، آنگاه برای هر $\alpha \geq 0$، $\alpha x \geq \alpha y$.

به جای نماد $x \geq y$ می‌توانیم از نماد $y \leq x$ نیز استفاده کنیم.

تعریف ۲.۱. عضو x از فضای برداری مرتب E را مثبت نامیم هرگاه $x \geq 0$ باشد. مجموعه‌ی تمام عضوهای مثبت E را با نماد E^+ نشان خواهیم داد، یعنی

$$E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}.$$

تعریف ۳.۱. فرض کنیم E و F دو فضای برداری باشند. در این‌صورت عملگر $T : E \to F$ را خطی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و هر $\alpha, \beta \in R$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

تعریف ۴.۱. مجموعه‌ی جهت‌دار یک مجموعه‌ی غیرتهی مانند I با رابطه‌ی $\preceq$ می‌باشد به‌طوریکه

۱. هرگاه $\alpha \in I$، $\alpha \preceq \alpha$؛

۲. اگر $\alpha \preceq \beta$، $\beta \preceq \gamma$ آنگاه: $\alpha \preceq \gamma$؛

۳. برای هر $\alpha\ ,\ \beta \in I$ یک $\gamma_{\alpha,\beta}$ در I موجود باشد به‌طوریکه

$$\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta} \text{ و } \beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}.$$

مثال ۵.۱ اعداد طبیعی، اعداد حقیقی، بازه $(۰,۱)$ نمونه‌هایی از مجموعه‌های جهت‌دار با رابطه‌ی $\leq$ هستند. همچنین مجموعه توانی و مجموعه $\{\{۱\},\{۱,۲\},\{۱,۲,۳\},...\}$ با رابطه زیرمجموعه بودن مجموعه‌های جهت‌دار هستند.

تعریف ۶.۱. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه بوده و I یک مجموعه جهت دار باشد. تابع از یک مجموعه‌ی I به X را یک تور گوییم. مجموعه‌ی I، مجموعه‌ی اندیس‌گذار برای تور در X نامیده می شود. دنباله‌ها حالت خاصی از تورها هستند. اندیس‌ها می تواند در R یا در N باشد. اگر در N باشد می‌شود دنباله. اگر $f : I \longrightarrow X$ یک تور باشد، آنگاه برای هر α در I می‌نویسیم $f(\alpha) = x_\alpha$ و تور $f : I \to X$ را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ نشان می‌دهیم. گوییم x_α قبل از x_β قرار دارد هرگاه $\alpha \preceq \beta$.

تعریف ۷.۱. زیرمجموعه‌ی A از یک فضای نرمدار، نسبت به نرم کراندار گوییم اگر $M > ۰$ای موجود باشد به‌طوریکه $\| x \| \leq M$ به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد.

تعریف ۸.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. زیرمجموعه‌ی غیرتهی A از X

۱.محدب نامیده می‌شود، اگر $x, y \in A$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$، آنگاه $\lambda x + (۱ - \lambda)y \in A$؛

۲.دایره‌ای نامیده می‌شود، اگر $x \in A$ و $|\lambda| \leq ۱$، آنگاه $\lambda x \in A$.

زیرمجموعه‌ی A از X محدب است اگر و تنها اگر در خاصیت زیر صدق کند.
به ازای هر $x_۱, ... x_n$ دلخواه عضو A و اسکالرهای مثبت $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n$ دلخواه که $\lambda_۱ + ... + \lambda_n = ۱$ داشته باشیم:

$$\lambda_۱ x_۱ + ... + \lambda_n x_n \in A.$$

تعریف ۹.۱. پوسته‌ی محدب A، کوچکترین مجموعه‌ی محدب که شامل A می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$co(A) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

و بطور مشابه پوسته‌ی دایره‌ای محدب A کوچکترین مجموعه‌ی محدب و دایره‌ای است که شامل A می‌باشد و به‌صورت $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid \leq 1\}$ می باشد.

تعریف ۱۰.۱. اگر X یک مجموعه دلخواه باشد، مجموعه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X نامیم هرگاه

۱) $\emptyset, X \in \tau$؛

۲) اشتراک هر گردایه از اعضای τ، عضو τ باشد؛

۳) هرگاه A_α گردایه‌ای از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

اعضای τ را زیرمجموعه‌های باز X می‌نامیم. (X, τ) و یا به اختصار، X را فضای توپولوژیکی می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱. توپولوژی τ روی فضای برداری X، توپولوژیک خطی نامیده می‌شود هرگاه دو تابعک زیر پیوسته باشند

$$X \times X \longrightarrow X \ \ , \ \ (x, y) \mapsto x + y$$
$$R \times X \longrightarrow X \ , \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

در این‌صورت $(X.\tau)$ فضای برداری توپولوژیک نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید X فضای نرمدار باشد. در این‌صورت

۱) کوچکترین توپولوژی بر X را که هر $x^* \in X^*$ نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف بر X گوییم و با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

۲) کوچکترین توپولوژی بر X^* را که $\varphi(x) \in \varphi(X)$ نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف ستاره بر X^* گوییم و با $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم. در این جا نگاشت φ را از X به X^{**} به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم

$$\varphi : X \to X^{**} \quad \varphi(x)(x^*) = x^*(x) \ , \ x^* \in X^* \ , \ x \in X.$$

تعریف ۱۳.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای برداری E را از بالا کراندار گوییم هرگاه $x \in E$ وجود داشته باشد به‌طوریکه به ازای هر $y \in A$، $y \leq x$.

تعریف ۱۴.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای برداری E را از پایین کراندار گوییم هرگاه $x \in E$ وجود داشته باشد به‌طوریکه به ازای هر $y \in A$، $x \leq y$.

فصل ۲

فضاهای ریس

تعریف ۱.۲. فضای برداری مرتب E با خاصیت جمع‌پذیری یک فضای ریس یا شبکه‌ی برداری نامیده می شود هرگاه برای هر $x, y \in E$، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ در E موجود باشند. نمادهای جدید را به شرح زیر تعریف می‌کنیم و در ادامه از آنها استفاده می‌کنیم.

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

$$x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

مثال ۲.۲ مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک فضای ریس است.

مثال ۳.۲ اگر K یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، در این‌صورت $C(K)$ که فضای تمام توابع پیوسته روی K است یک فضای ریس است.

$C(K)$ با اعمال جمع و ضرب زیر یک فضای برداری است. اگر $f, g \in C(K)$ و $\alpha \in R$ باشد آنگاه $f + g \in C(K)$ و $\alpha f \in C(K)$.

$C(K)$ با رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ یک فضای برداری مرتب است. که در آن رابطه‌ی ترتیبی $f \leq g$ معادل است با این‌که به ازای هر $x \in K$، داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$. رابطه ترتیبی مذکور دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) اگر $f \leq g$، آنگاه به ازای هر $\alpha > 0$ رابطه‌ی $\alpha f \leq \alpha g$ برقرار است؛

۲) اگر $f \leq g$ و $h \in C(K)$، آنگاه $f + h \leq f + h$.

پس $C(K)$ یک فضای برداری مرتب است. اگر قرار دهیم $h = \sup\{f, g\}$ در این‌صورت $h \in C(K)$ می‌باشد و لذا $C(K)$ یک فضای ریس است.

تعریف ۴.۲. فرض کنید E و F دو شبکه‌ی برداری باشند. عملگر خطی $T : E \longrightarrow F$ را مثبت می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in E^+$، $T(x) \geq 0$ برقرار باشد.

گزاره ۵.۲ $T : E \to F$ مثبت است اگر و تنها اگر $x \leq y$ نتیجه دهد $T(x) \leq T(y)$.

اثبات. فرض کنید T مثبت و $x \leq y$ باشد نشان می‌دهیم $T(x) \leq T(y)$. از این‌که $x \leq y$، آنگاه $y - x \geq \circ$. در نتیجه چون T عملگر مثبت است پس $T(y-x) \geq \circ$. از این‌که T خطی است در نتیجه $T(y) - T(x) \geq \circ$ پس $T(x) \leq T(y)$.

برعکس: در نظر بگیریم $x \leq \circ$، از مثبت بودن T نتیجه می‌شود که $T(\circ) \leq T(x)$، در نتیجه خواهیم داشت $\circ \leq T(x)$. ■

تعریف ۶.۲. یک فضای تابعی، فضایی برداری مانند E از توابع حقیقی مقدار روی مجموعه‌ی Ω است، به‌طوری‌که به ازای هر دو عضو $f, g \in E$ توابع $f \vee g(\omega) := \max\{f(\omega), g(\omega)\}$ و $f \wedge g(\omega) := \min\{f(\omega), g(\omega)\}$ در E واقع شوند.

قضیه ۷.۲ به ازای هر x, y, z از فضای ریس E، اتحادهای زیر برقرار هستند.

۱) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ و $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$؛

۲) $x + y = x \wedge y + x \vee y$؛

۳) $x + (y \vee z) = (x+y) \vee (x+z)$ و $x + (y \wedge z) = (x+y) \wedge (x+z)$؛

۴) برای هر $\alpha \geq \circ$، $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ و $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$.

اثبات. از این‌که $x \leq x \vee y$ و $y \leq x \vee y$ داریم $-(x \vee y) \leq -x$ و $-(x \vee y) \leq -y$، بنابراین $-(x \vee y) \leq (-x) \wedge (-y)$. از طرف دیگر اگر $z \leq -x$ و $z \leq -y$، آنگاه $x \leq -z$ و $y \leq -z$. بنابراین $x \vee y \leq -z$. در این‌صورت رابطه‌ی $z \leq -(x \vee y)$ برقرار است. این روابط نشان می‌دهند که $-(x \vee y)$ اینفمم مجموعه‌ی $\{-x, -y\}$ است. بنابراین $-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$. اگر در رابطه $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$، x را با $-x$ و y را با $-y$ جایگزین کنیم قسمت دوم از (۱) نتیجه می‌شود.

۲) از این‌که $\inf\{x, y\} = x \wedge y \leq y$ داریم $x \leq x + y - x \wedge y$. بطور مشابه $y \leq x + y - x \wedge y$، بنابراین $\sup\{x, y\} = x \vee y \leq x + y - x \wedge y$ لذا $x \wedge y + x \vee y \leq x + y$. از طرف دیگر از این‌که $y \leq x \vee y$ است داریم $x + y - x \vee y \leq x$. بطور مشابه $x + y - x \vee y \leq y$، بنابراین $x + y - x \vee y \leq x \wedge y$ لذا $x + y \leq x \wedge y + x \vee y$. در نتیجه اتحاد برقرار است.

۳) واضح است که $x+y \leq x+\sup\{y,z\} = x+y\vee z$ و $x+z \leq x+\sup\{y,z\} = x+y\vee z$، بنابراین $(x+y)\vee(x+z) \leq x+y\vee z$. از طرف دیگر $y = -x+(x+y) \leq -x+(x+y)\vee(x+z)$ و $z = -x+(x+z) \leq -x+(x+y)\vee(x+z)$، در نتیجه $y\vee z \leq -x+(x+y)\vee(x+z)$ لذا $x+y\vee z \leq (x+y)\vee(x+z)$. بنابراین اتحاد برقرار است. اتحاد بعدی به همین روش اثبات می‌شود.

۴) $\alpha > ۰$ را ثابت در نظر بگیرید. از این‌که $\alpha x \leq \alpha\sup\{x,y\}$ و $\alpha y \leq \alpha\sup\{x,y\}$ است داریم $\sup\{\alpha x,\alpha y\} = (\alpha x)\vee(\alpha y) \leq \alpha\sup\{x,y\} = \alpha(x\vee y)$. اگر $\alpha x \leq z$ و $\alpha y \leq z$ باشد آنگاه $x \leq \alpha^{-۱}z$ و $y \leq \alpha^{-۱}z$ بنابراین $x\vee y \leq \alpha^{-۱}z$، لذا $\alpha(x\vee y) \leq z$، این نشان می‌دهد که $\alpha(x\vee y)$ سوپریمم مجموعه‌ی $\{\alpha x,\alpha y\}$ است. در نتیجه $\alpha(x\vee y) = (\alpha x)\vee(\alpha y)$. اتحاد بعدی به همین روش ثابت می‌شود. ■

تعریف ۸.۲. به ازای هر بردار x در فضای ریس E عناصر ذیل را تعریف می‌کنیم

۱) $x^+ := x\vee ۰$؛

۲) $x^- := (-x)\vee ۰$؛

۳) $|x| := x\vee(-x)$.

که x^+ را قسمت مثبت و x^- را قسمت منفی و $|x|$ را قدرمطلق x گوییم.

قضیه ۹.۲ اگر x یک عضو از فضای ریس E باشد آنگاه

۱) $x = x^+ - x^-$.

۲) $|x| = x^+ + x^-$.

۳) $x^+ \wedge x^- = ۰$.

اثبات. ۱) بنا به قضیه‌ی ؟ داریم

$$\begin{aligned} x = x+۰ = x\vee ۰ + x\wedge ۰ &= x\vee ۰ - (-x)\vee ۰ \\ &= x^+ - x^-. \end{aligned}$$

۲)

$$\begin{aligned} |x| = x \vee (-x) = (-x + 2x) \vee (-x + 0) &= (2x) \vee 0 - x \\ &= 2(x \vee 0) - x = 2x^+ - x \\ &= 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-. \end{aligned}$$

۳)

$$\begin{aligned} x^+ \wedge x^- &= (x^- + (x^+ - x^-)) \wedge (x^- + 0) \\ &= x^- + (x^+ - x^-) \wedge 0 \\ &= x^- + x \wedge 0 \\ &= x^- - [(-x) \vee 0] = x^- - x^- = 0. \end{aligned}$$

■

توجه: اگر $T : E \to F$ یک عملگر مثبت بین دو فضای ریس باشد آنگاه از این‌که $\pm x \leq |x|$ داریم که $\pm Tx \leq T|x|$. بنابراین به ازای هر $x \in E$ خواهیم داشت

$$|Tx| \leq T|x|.$$

تعریف ۲.۱۰. در فضای ریس E، دو عضو x و y را مجزا گوییم هر گاه $|x| \wedge |y| = 0$ و در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp y$. زیر مجموعه‌های A و B از فضای ریس را مجزا نامیم هر گاه به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$ داشته باشیم $a \perp b$.

اگر A یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از فضای ریس E باشد، آنگاه متمم مجزای A را که با A^d نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A^d := \{x \in E : x \perp y \quad \forall y \in A\}.$$

$(A^d)^d$ را با A^{dd} نشان می‌دهیم.

فرض کنید $\{E_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای ریس باشد. در این‌صورت ضرب دکارتی E_iها که به‌صورت $\Pi_{i\in I}E_i$ نشان داده می‌شود، تحت ترتیب زیر، یک فضای ریس است.

به ازای هر $i \in I$، هرگاه $x_i \geq y_i$، آنگاه $(x_i) \geq (y_i)$.

جمع مستقیم $\sum_{i\in I} \oplus E_i$، فضای برداری تمام اعضای (x_i) از $\Pi_{i\in I}E_i$ است که فقط تعداد متناهی از x_iها مخالف صفر است.

قضیه ۱۱.۲ اگر x و y اعضای دلخواه فضای ریس باشند آنگاه داریم

۱) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + \mid x - y \mid)$ و $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - \mid x - y \mid)$.

۲) $\mid x - y \mid = x \vee y - x \wedge y$.

۳) $\mid x \mid \vee \mid y \mid = \frac{1}{2}(\mid x + y \mid + \mid x - y \mid)$.

اثبات. ۱)

$$\begin{aligned} x + y + \mid x - y \mid &= x + y + (x - y) \vee (y - x) \\ &= [(x + y) + (x - y)] \vee [(x + y) + (y - x)] \\ &= (2x) \vee (2y) = 2(x \vee y). \end{aligned}$$

۲) با تفاضل دو اتحاد اول بدست می آید.

۳)

$$\begin{aligned} \mid x + y \mid + \mid x - y \mid &= [x + y] \vee [-x - y] + \mid x - y \mid \\ &= [x + y + \mid x - y \mid] \vee [-x - y + \mid x - y \mid] \\ &= 2([x \vee y] \vee [(-x) \vee (-y)] \\ &= 2([x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)]) \end{aligned}$$

$$= ۲(\mid x \mid \vee \mid y \mid).$$

■

نکته: قسمت (۱) قضیه‌ی قبلی نشان می‌دهد که فضای برداری مرتب E، فضای ریس است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in E$، داشته باشیم

$$\mid x \mid = x \vee (-x).$$

تعریف ۱۲.۲. اگر A و B زیر مجموعه‌های فضای ریس باشند تعریف می‌کنیم:

۱) $\mid A \mid := \{\mid a \mid ; a \in A\}$؛

۲) $A^+ := \{a^+ ; a \in A\}$؛

۳) $A^- := \{a^- ; a \in A\}$؛

۴) $A \vee B := \{a \vee b ; a \in A, b \in B\}$؛

۵) $A \wedge B := \{a \wedge b ; a \in A, b \in B\}$؛

٦) $x \vee A := \{x \vee a, a \in A\}$؛

۷) $x \wedge A := \{x \wedge a, a \in A\}$.

قضیه ۱۳.۲ (کانتوریچ)[1] اگر $T : E^+ \longrightarrow F^+$ جمعی باشد (یعنی به ازای هر $x, y \in E^+$، $T(x+y) = T(x) + T(y)$)، آن‌گاه می‌توانیم عملگر T را به‌طور منحصربفرد به یک عملگر مثبت از E به روی F توسیع دهیم. به‌عبارت دیگر، توسیع یکتایی از T به‌صورت زیر موجود می‌باشد

$$T(x) = T(x^+) - T(x^-) \quad , \quad \forall x \in E.$$

اثبات. واضح است که است که اگر $S : E \longrightarrow F$ توسیعی از T باشد، آن‌گاه S باید عملگر مثبت باشد و به ازای هر $x \in E$، $S(x) = T(x^+) - T(x^-)$. در ابتدا جمع‌پذیری S را ثابت می‌کنیم.

[1] kantorovic

برای این‌کار به خاصیت ذیل نیاز داریم.

اگر به ازای هر $y, z \in E^+$، $x = y - z$، آنگاه رابطه‌ی $S(x) = T(y) - T(z)$ برقرار است. در واقع از $x = x^+ - x^- = y - z$ نتیجه می‌شود $x^+ + z = y + x^-$. از جمع‌پذیری $T : E^+ \longrightarrow F^+$ داریم

$$T(x^+) + T(z) = T(x^+ + z) = T(y + x^-) = T(y) + T(x^-).$$

بنابراین داریم

$$S(x) = T(x^+) - T(x^-) = T(y) - T(z).$$

بنابراین اگر $u, v \in E$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} S(u+v) &= S([u^+ + v^+] - [u^- + v^-]) \\ &= T(u^+ + v^+) - T(u^- + v^-) \\ &= [T(u^+) - T(u^-)] + [T(v^+ - T(v^-)] \\ &= S(u) + S(v) \end{aligned}$$

از طرف دیگر اگر $x \geq y \geq 0$ در E برقرار باشد، آنگاه $T(y) \leq T(x)$ در F برقرار است. در واقع از $x \geq y \geq 0$، نتیجه می‌شود که

$$T(y) \leq T(y) + T(x - y) = T(y + (x - y)) = T(x).$$

حال فرض کنیم $x \in E^+$, $\lambda \geq 0$ باشد. دو دنباله از اعداد گویا مانند $\{t_n\}$ و $\{r_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 \leq r_n \uparrow \lambda$, $t_n \downarrow \lambda$. در این‌صورت با استفاده از جمع‌پذیری T روی E^+ داریم