دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

عنوان

تشکیل دوسیتر ناجابجایی با استفاده از حالت‌های همدوس

استاد راهنما

دکتر اردشیر رابعی

نگارش

آسیه ایزدی

اسفند۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

جانبازان و شهدا

از وجود نفس هایی که من را زنده نگه داشته اند، پدر و مادر عزیزم نهایت سپاسگزاری را دارم.

همچنین از فرشته ای که در مسیر علمی من قرار گرفت استاد عزیز و مهربانم جناب دکتر اردشیر رابعی و وجود مهربان خواهرهای عزیزم راضیه و شهرزاد و برادرم حسین، کمال تشکر را دارم.

چکیده

دوسیتر ۱ + ۱ یک هذلولی‌وار دوبعدی است که در فضای مینکوفسکی سه‌بعدی شناور می‌باشد. این رویه حالت تقلیل‌یافته جواب معادله اینشتین برای خلا با ثابت کیهان‌شناسی مثبت می‌باشد. در این پایان‌نامه قصد داریم با استفاده از حالت‌های همدوس و کوانتش به‌روش برزین، ناجابجایی عملگرهای وابسته به این فضا را مورد بررسی قرار دهیم.

گروه تقارنی متناظر با دوسیتر ۱ + ۱، گروه غیرفشرده $SU(1,1)$ می‌باشد که فضای همگن آن شامل سه ناحیه داخل، بیرون و روی حلقه واحد می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که در این مورد نمایش کاهش‌ناپذیر یکانی گروه براساس سه سری اصلی، گسسته و تکمیلی بیان می‌شود که بررسی حرکت ذره جرم‌دار روی دوسیتر ۱ + ۱ براساس سری اصلی و روی حلقه واحد بیان می‌شود. در این کار ما فقط بحث خود را معطوف این مورد می‌نماییم.

بدین‌منظور ابتدا حالت‌های همدوس این ذره را در فضای فاز مربوطه تعیین می‌نماییم. نشان خواهیم داد که با استفاده از روش اربیت کیریلوو، فضای فاز مربوط به ذره جرم‌دار اسکالر(براساس نمایش کاهش‌ناپذیر یکانی) معادل فضای کتانژانت $T^*(S^1)$ می‌باشد که این نیز یکریخت با حلقه مختلط $S^1_{\mathbb{C}}$ می‌باشد. به‌بیان دیگر می‌بایستی حالت‌های همدوس روی حلقه مختلط $S^1_{\mathbb{C}}$ را به‌دست آوریم. در این کار روش جدیدی برای تعیین این حالت‌ها ارائه می‌دهیم که آن‌را روش هماهنگ‌های کروی مختلط می‌نامیم. مزیت این روش آن است که قاعده‌مند بوده و می‌توان آن‌را برای دوسیتر واقعی ۳ + ۱ نیز به‌کار برد. بعد از تعیین حالت‌های همدوس، کوانتش مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی روی دوسیتر ۱ + ۱ به‌روش برزین را انجام خواهیم داد و سپس با استفاده از این عملگرها(مشاهده‌پذیرهای کوانتمی) ناجابجایی روی این فضا را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\cong$	یکریختی
$\lfloor x \rfloor$	قسمت صحیح عدد حقیقی x
$\langle \mid$	برا
$\{\ ,\ \}$	براکت پواسون
$[\ ,\ ]$	جابه‌جاگر
tr	رد
O	عملگر کوانتومی
$\Re$	قسمت حقیقی عدد مختلط
$\Im$	قسمت موهومی عدد مختلط
I_d	عملگر یکه
$\mathbf{H}$	فضای هیلبرت
$\mid \rangle$	کت
S^d	کره d بعدی
$S^d_{\mathbb{C}}$	کره مختلط d بعدی
G	گروه لی
σ_i	ماتریس‌های پاؤلی
$\in$	متعلق به
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{C}$	مجموعه اعداد مختلط
$\mathbf{M}$	رویه

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

نظریه گروه‌های متناهی که در ابتدا به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات مطرح گردید دارای سرگرمی‌های جالب و زیبایی بود که با روی آوردن فیزیکدان‌ها به این عرصه از علم ریاضی، نظریه گروه بدون از دست دادن زیبایی‌اش، ابزار فوق‌العاده برای استفاده از تقارن‌ها و مفاهیم نیمه‌شهودی تشخیص داده‌شد. این نظریه به‌کمک ماتریس‌ها و خواص آن‌ها ابزار بسیار مفیدی در شاخه‌های مختلف فیزیک می‌باشد. هم‌زمان با تکامل نظریه‌گروه، گروه‌های پیوسته و به‌ویژه گروه‌لی به‌وسیله اشخاص بزرگی ازجمله لی [1] ، انگل [2] ، کیلینگ [3] ، کی‌لی [4] و هامیلتون [5] با ریاضیات مدرن و زیبا معرفی گردید که در نظریه کوانتمی و فیزیک ذرات بنیادی کاربرد فراوان دارد.

از طرفی دیگر می‌دانیم اینشتین برای یافتن تعمیمی از معادله پواسون برای پتانسیل گرانشی که در فضا - زمان خمیده نیز صادق می‌باشد به معادله خود که به‌صورت زیر نوشته می‌شود رسید

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \; . \qquad (۱.۱)$$

و با اعمال معادله خود به کیهان‌شناسی متوجه شد که جهان در حال انبساط است ولی بنا بر فلسفه آن زمان که تصور می‌شد جهان ایستا باشد جمله‌ای ثابت به معادله خود اضافه کرد

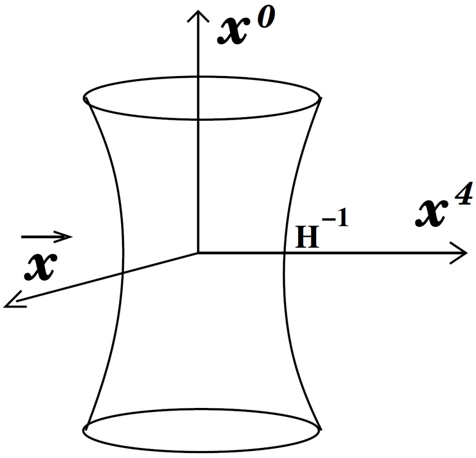
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = 2\pi G T_{\mu\nu} \; . \qquad (۲.۱)$$

اینشتین طرف راست معادله را برابر صفر قرار داد

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \; . \qquad (۳.۱)$$

و چون نتوانست معادله را حل کند استدلال کرد اگر ماده نباشد، فضا - زمان هم نیست. در همان سال دانشمندی به‌نام دوسیتر معادله اینشتین را با طرف دوم صفر حل کرد و متریکی به‌نام متریک دوسیتر پیدا کرد.

[1] M.S.Lie
[2] F.Engel
[3] W.Killing
[4] A.Cayley
[5] W.R.Hamilton



شکل ۱.۱: *هذلولی وار دوسیتر*

فضا - زمان دوسیتر یک هذلولی‌وار چهاربعدی که در فضای مینکوفسکی پنج‌بعدی شناور است می‌باشد (شکل۱.۱)که جوابی با بیشینه تقارن برای معادله اینشتین می‌باشد [۱]. گروه تقارنی فضای دوسیتر گروه ده‌پارامتری $SO(۱,۴)$ (گروه دوسیتر) و یا گروه پوششی آن یعنی $SP(۲,۲)$ می‌باشد. با کم کردن دو بعد از این فضا یک هذلولی‌وار دوبعدی در یک فضای مینکوفسکی سه‌بعدی داریم که فضای دوسیتر ۱ + ۱ می‌باشد. گروه متقارن دینامیکی متناظر آن گروه $SO(۱,۲)$ است که اصولا از گروه پوششی آن یعنی $SU(۱,۱)$ استفاده می‌شود. ما نیز در این پایان‌نامه از این گروه استفاده می‌نماییم.

بررسی مفاهیم مکانیک‌کوانتمی روی این فضا از مباحث بسیار مهم برای فیزیکدان‌ها محسوب می‌شود. اصولا با توجه به این‌که رویه مورد بحث یک فضای انحنادار در فضای مینکوفسکی می‌باشد بررسی کوانتش برای این مورد به‌روش معمولی امکان‌پذیر نمی‌باشد. یکی از روش‌هایی که در دهه‌های اخیر توجه زیادی به آن شده‌است روش کوانتش به‌کمک حالت‌های همدوس می‌باشد. مزیت این روش آن است که برای انجام کوانتش فقط نیاز به ویژه‌بردار(که آن‌را حالت‌های همدوس می‌نامیم) و اندازه مناسب برای این ویژه‌بردار است. لازم به‌ذکر است که در سال ۱۹۲۶ شرودینگر [۶]و سپس در دهه ۱۹۶۰ گلوبر [۷](پدر علم حالت‌های همدوس و برنده جایزه نوبل در سال ۲۰۰۵)، کلودر [۸]و سادرشان [۹]حالت‌های همدوس را معرفی نمودند. بحث حالت‌های همدوس که در حقیقت ویژه‌بردارهایی در فضای هیلبرت می‌باشند، در ابتدا در اپتیک کوانتمی مطرح گردید و سپس در شاخه‌های مختلف فیزیک از جمله فیزیک هسته‌ای، اتمی، ماده‌چگال و مخصوصا فیزیک نظری گسترش پیدا کرد طوری‌که کلودر اشاره نمود که حالت‌های همدوس زبان اصلی

---
[۶] E.Schrodinger
[۷] R.J.Glauber
[۸] J.R.Klauder
[۹] E.C.G.Sudarshan

فیزیک کوانتمی [10] می‌باشد.

همان‌طوری‌که عنوان نمودیم موضوع اصلی این پایان‌نامه کوانتش مشاهدپذیرهای کلاسیکی روی دوسیتر ۱ + ۱ و در نتیجه بررسی ناجابجایی مشاهده‌پذیرهای کوانتمی مربوط به این فضا می‌باشد.

یکی از روش‌های بسیار جالب برای به‌دست‌آوردن حالت‌های همدوس استفاده از بحث نظریه‌گروه می‌باشد. در این‌راستا افراد برجسته‌ای از قبیل پرلموو [11]، باروت و جیرادلو [12] حالت‌های همدوس مربوط به گروه $SU(۲)$ را با استفاده از عملگر خلق ونابودی به‌دست آورده‌اند. البته بایستی یادآوری نماییم که فضای همگن مربوط به این گروه، کره $S^۲$ می‌باشد که می‌توان حالت‌های همدوس روی این کره را از روی حالت‌های همدوس گروه $SU(۲)$ استخراج نمود. ما نیز در این پایان‌نامه قصد داشتیم که حالت‌های همدوس روی دوسیتر ۱ + ۱ که گروه تقارنی‌اش $SU(۱,۱)$ می‌باشد را به‌همین منوال به‌دست آوریم. مضاف بر این‌که با استفاده از ارتباط جبرلی گروه $SU(۲)$ و $SU(۱,۱)$ بتوانیم حالت‌های همدوس روی دوسیتر را استخراج نماییم ولی متأسفانه متوجه شدیم که این امر به‌صورت مستقیم امکان‌پذیر نمی‌باشد زیرا که گروه $SU(۲)$ یک گروه فشرده و نمایش کاهش‌ناپذیر آن محدود، در صورتی‌که گروه $SU(۱,۱)$ غیرفشرده و نمایش کاهش‌ناپذیر آن نامحدود می‌باشد که در غالب سه سری اصلی، گسسته و تکمیلی بیان می‌شود. به‌عبارت بهتر متوجه گردیدیم که با بحث بسیار گسترده‌ای روبرو هستیم. لذا تمام بحث خود را متمرکز روی سری اصلی نمودیم که مختص حرکت یک ذره جرم‌دار روی دوسیتر می‌باشد. لازم به‌ذکر است به‌دلیل این‌که هذلولی‌وار دوسیتر ۱ + ۱ مرتبط‌ساده نمی‌باشد فضای همگن(اربیت) آن سه ناحیه داخل دیسک واحد، روی حلقه واحد و بیرون حلقه واحد را تشکیل می‌دهد که در مورد ذره جرم‌دار فضای همگن، روی حلقه واحد می‌باشد. بر این اساس فصل دوم پایان‌نامه به معرفی دو گروه فشرده $SU(۲)$ و غیرفشرده $SU(۱,۱)$ و نمایش‌های کاهش‌ناپذیر و یکانی آن‌ها اختصاص یافته‌است. در فصل سوم حالت‌های همدوس گروه $SU(۲)$ و کره $S^۲$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل چهارم به روشی جدید برای تعیین حالت‌های همدوس برای ذره جرم‌داری که روی دوسیتر ۱ + ۱ حرکت می‌کند ارائه می‌دهیم. این حالت‌های همدوس مربوط به فضای فاز دوسیتر می‌باشد. از این‌رو در این فصل نشان خواهیم داد که فضای فاز مربوطه همان فضای کتانژانت $T^*(S^۱)$ است. هم‌چنین با استفاده از روش مختلط‌سازی تیمن نشان خواهیم داد که فضای $T^*(S^۱)$ یکریخت با حلقه‌مختلط $S^۱_{\mathbb{C}}$

[10] در مکانیک کلاسیک یک سیستم فیزیکی به‌وسیله نقاطی روی فضای فاز توصیف می‌شوند. در مکانیک کوانتمی سیستم به‌وسیله حالت‌هایی بیان می‌شوند که ویژه‌بردارهای فضای هیلبرت مربوطه می‌باشند. برهمکنشی از حالت‌های کوانتمی که ظاهری شبیه به همتای کلاسیکی آن‌ها دارد را حالت‌های همدوس می‌نامیم.

[11] Perelomov

[12] Barut-Giradello

می‌باشد. لذا حالت‌های همدوس موردنظر ما همان حالت‌های همدوس حلقه مختلط $S^1_{\mathbb{C}}$ می‌باشد.

در فصل پنجم به کوانتش مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی روی رویه‌های S^2 و دوسیتر ۱ + ۱ به‌روش برزین خواهیم پرداخت. هم‌چنین با استفاده از عملگرهای حاصل از کوانتش ناجابجایی روی این دو رویه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل دوم

بررسی گروه‌های $SU(۲)$ و $SU(۱,۱)$

مقدمه

در این فصل ابتدا به‌معرفی دو گروه $SU(2)$ و $SU(1,1)$ که گروه‌های پوششی مربوط به گروه‌های $SO(3)$ و $SO(1,2)$ می‌باشند پرداخته‌ایم. سپس نمایش‌های کاهش‌ناپذیر و یکانی مربوط به این دو گروه را مورد بررسی قراردادیم. لازم به‌ذکر است که گروه $SU(2)$ فشرده بوده و فضای همگن آن کره S^2 است. بنابراین نمایش کاهش‌ناپذیر آن با بعد محدود می‌باشد. در صورتی‌که گروه $SU(1,1)$ یک گروه غیرفشرده بوده و فضای همگن آن نقاط داخل، بیرون و روی حلقه واحد می‌باشد. نمایش کاهش‌ناپذیر آن نامحدود بوده و در غالب سه سری اصلی، گسسته و تکمیلی بیان می‌شود. در این فصل فقط به دو سری اصلی و گسسته می‌پردازیم.

۱.۲ معرفی گروه $SU(2)$

مجموعه ماتریس‌های یکانی 2×2 با عناصر مختلط گروه $SU(2)$ را تشکیل می‌دهند. هر عضو g از این گروه توسط زوج اعداد مختلط α و β به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

از نظر ساختاری گروه $SU(2)$ گروهی فشرده[1] و ساده[2] می‌باشد. همچنین بخاطر یکریختی [3] با کره S^3 مرتبط ساده[4] نیز هست.

[1] گروهی که محدود و بسته باشد.

[2] گروهی که تنها زیرگروه‌های ناوردایش زیرگروه بدیهی و خود گروه می‌باشد. یک گروه لی ساده بودن همچنین به‌معنی این است که جبر لی مرتبط، ساده و گروه لی غیرآبلی است.

[3] Isomorphism

[4] فضای مرتبط، مرتبط ساده می‌باشد اگر منحنی‌ای که هر دو نقطه در فضا را به‌هم وصل می‌کند بتواند به‌طور پیوسته تغییر شکل پیدا کند به منحنی دیگری که همان دو نقطه را بهم وصل می‌کند. یعنی تغیر شکل در منحنی تماما در داخل فضای توپولوژیک است.

۱.۱.۲ پارامتریزاسیون گروه $SU(2)$

باتوجه به این‌که بعد گروه $SU(2)$ سه می‌باشد؛ این گروه با سه پارامتر به‌طور کامل مشخص خواهد شد. در این‌جا از سه پارامتر θ، ψو ϕ برای این منظور استفاده می‌کنیم [۲]:

$$
\begin{aligned}
|\alpha| &= \cos\frac{\theta}{2}\,, & 0 < \theta < \pi \,, \\
\arg\alpha &= \frac{\phi+\psi}{2}, & 0 \le \phi < 2\pi \,, \\
\arg\beta &= \frac{\phi-\psi+\pi}{2}\,, & -2\pi \le \psi < 4\pi \,.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

با این انتخاب ماتریس g به‌صورت زیر خواهد شد:

$$
g = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\phi+\psi}{2})} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\phi-\psi}{2})} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\phi-\psi}{2})} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\phi+\psi}{2})} \end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

پارامتریزاسیون گروه به‌صورت زیر می‌شود:

$$
g = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}, \tag{4.2}
$$

که ماتریس اول و سوم چرخش حول محور z و ماتریس دوم حول محور y را نشان می‌دهند (متناظر با چرخش‌های اویلر).

۲.۱.۲ جبر لی گروه $SU(2)$

همان‌طوری‌که اشاره گردید بعد گروه $SU(2)$ سه می‌باشد بنابراین سه زیرگروه تک‌پارامتری می‌توان برای این گروه به‌صورت زیر معرفی نمود:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ isin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
w_2 &= \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
w_3 &= \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-it}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

بردارهای پایه مربوط به این زیرگروه‌ها به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left.\frac{dw_1}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_1 \,, \\
a_2 &= \left.\frac{dw_2}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_2 \,, \\
a_3 &= \left.\frac{dw_3}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_3 \,.
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

a_1، a_2 و a_3 مستقل خطی هستند که پایه‌های جبر لی $su(2)$ را شکل می‌دهند. جبر هر گروه روابط جابجایی پایه‌های جبری آن گروه است .

روابط جابجایی بین بردارهای پایه

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= a_3 \ , \\ [a_2, a_3] &= a_1 \ , \\ [a_3, a_1] &= a_2 \ . \end{aligned} \tag{7.2}$$

باتوجه به رابطه $[a_i, a_j] = C_{ij}^k a_k$ می‌توان گفت که ثابت‌های ساختار این گروه (C_{ij}^k) همگی یک می‌باشند.

عملگر کازمیر[5]

قبل از این‌که این قسمت را به پایان برسانیم لازم می‌باشد اشاره‌ای به عملگر کازمیر که در بحث نمایش گروه استفاده می‌شود داشته باشیم. این عملگر که با تمام مولدهای گروه (a_i) جابجا می‌شود، برای گروه $SU(2)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ , \\ [\mathfrak{c}, a_i] &= 0 \ , \quad i = 1, 2, 3 \ , \end{aligned} \tag{8.2}$$

که متعلق به جبر پوششی جهانی $su(2)$ می‌باشد.

3.1.2 نمایش گروه $SU(2)$

در بحث گروه‌ها اصولا مفهوم گروه به‌شکل مطلق یا نمایش $T(g)$ گروه بیان می‌شود. به این $T(g)$ تابع عملگر گفته می‌شود که روی فضای برداری خاصی اثر می‌گذارد. بررسی این نمایش در ریاضیات بسیار وسیع است. از بین تمام نمایش‌ها، نمایش یکانی و کاهش‌ناپذیر [6] از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد که فیزیکدان‌ها نیز از این نوع نمایش استفاده می‌نمایند. لازم به ذکر است که فضای برداری این عملگر فضای هیلبرت $\boldsymbol{H}$ می‌باشد.

نمایش یکانی

این نمایش برای $x, y \in \boldsymbol{H}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(x, y) = (T(g)x, T(g)y) = (x, T^\dagger(g)T(g)y). \tag{9.2}$$

[5] Casimir Operator
[6] Irreducible Representation

در واقع نمایش یکانی یعنی نمایش یکانی نسبت به ضرب داخلی به‌عبارت بهتر ضرب داخلی دو بردار تحت عمل گروه در غالب نمایش، ناوردا بماند.

نمایش کاهش ناپذیر

اصولا هر فضایی که نتوان آن‌را به زیرفضاهایی تقسیم نمود به آن فضای ناوردا می‌گوییم. برای هر فضایی دو زیرفضای ناوردا وجود دارد که یکی زیرفضای تهی و دیگری خود آن فضا می‌باشد. اگر فضای برداری فقط دو زیرفضای ناوردا داشته باشد آن فضا کاهش‌ناپذیر است.
در این‌جا لازم می‌باشد فضای کاهش‌ناپذیر برای یک گروه خاص مشخص شود. در آن فضای برداری خاص، نمایشی که به آن گروه نسبت داده می‌شود نمایش کاهش‌ناپذیر گروه نامیده می‌شود.
در مورد گروه $SU(2)$ فضای کاهش‌ناپذیری که وجود دارد فضای چندجمله‌ای‌های همگن درجه $2l$ می‌باشد. تمام چندجمله‌ای‌های همگن دو متغیره تحت $T(g)$ به‌صورت چندجمله‌ای‌های همگن هم درجه باقی می‌مانند، پس برای تعیین فضای کاهش‌ناپذیر باید به فضای چندجمله‌ای همگن رفت. توابع در این فضا به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n} . \qquad (۱۰.۲)$$

عمل گروه در این فضا نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T(g)f(z_1, z_2) = f(u_1, u_2) = f(\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2, \beta z_1 + \bar{\alpha} z_2) . \qquad (۱۱.۲)$$

چون هر چند جمله‌ای f به‌طور یکتا توسط مقادیرش روی خط $z_2 = 1$ تعیین می شود و هم‌چنین در طول $z_2 = 1$ تابع یک مقدار ثابت دارد، از این‌رو حالت $z_2 = 1$ اختیار می‌شود یعنی:

$$F(z_1) = f(z_1, 1) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} , \qquad (۱۲.۲)$$

عمل عملگرهای $T_l(g)$ در این فضا به‌صورت زیر بیان می‌شود[۲] :

$$T_l(g)f(z_1, 1) = f(u_1, u_2) = u_2^{2l} F(\frac{u_1}{u_2}) = (\beta z_1 + \bar{\alpha})^{2l} F(\frac{\alpha z_1 - \bar{\beta}}{\beta z_1 + \bar{\alpha}}) . \qquad (۱۳.۲)$$

۴.۱.۲ عملگرهای بی‌نهایت کوچک نمایش $T_l(g)$

برای به‌دست آوردن عملگرهای بی‌نهایت کوچک زیرگروه‌های تک‌پارامتری را در رابطه (۱۳.۲) قرار داده و نسبت به t مشتق گرفته و سپس t را مساوی صفر قرار می‌دهیم.