فهرست

فصل اول: مقدمه

۱-۱- آشنایی با برخی مفاهیم و تعاریف:

تعریف۱-۱-۱. یک گراف مجموعه ای از رأس‌هاست که توسط خانواده‌ای از زوج های مرتب که همان یالها هستند به هم وصل شده اند. یک گراف را با$G= (V(G), E(G))$ نمایش می‌دهیم که در آن $V(G)$ رئوس گراف و $E(G)$ تعداد یالهای گراف G می باشند.

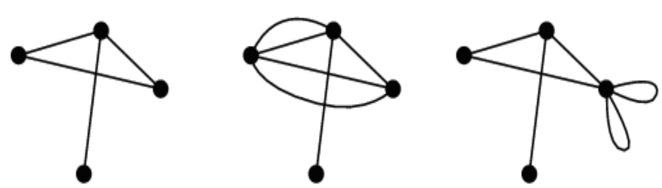
تعریف۱-۱-۲. اندازه گراف G، تعداد یالهای این گراف است وبصورت $|E(G)|$ نمایش داده می‌شود.

تعریف۱-۱-۳. درجه یک رأس از گراف G، به تعداد یالهای متصل به آن رأس گفته شده که برای رأس u از گراف G با نماد δ_uنمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۴. گرافی که مجموعه رئوس و یالهای آن متناهی باشد، گراف متناهی نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۵. هر یال از یک رأس به خودش را یک طوقه می‌نامیم. اگردو رأس با بیش از یک یال به هم مرتبط شوند، آنگاه این یالها را یالهای چندگانه گویند.

تعریف ۱-۱-۶. گراف بدون طوقه و یالهای چندگانه، گراف ساده نامیده می‌شود.

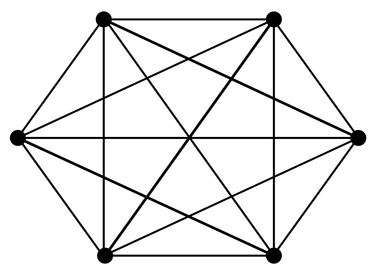


شکل ۱-۱- مثالی از گراف های ساده و غیر ساده

تعریف ۱-۱-۷. هر یال بوسیله یک جفت رأس مشخص می‌شود، دورأسی که توسط یک یال به هم متصل می‌شوند را رئوس مجاور می‌گویند.

مجموعه رئوس مجاور به رأس u از گراف G را با N(u) نمایش می‌دهیم.

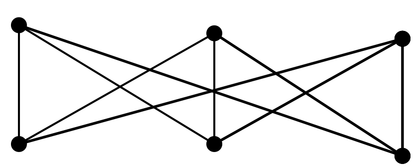
تعریف ۱-۱-۸. گراف کامل، گراف ساده‌ای است که در آن هر رأس به تمامی رأس‌های دیگر بوسیله یک یال متصل است. یک گراف کامل از مرتبه n، دارای n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است و آن را با K_n نشان می‌دهند.



شکل ۱-۲- گراف کامل K_6

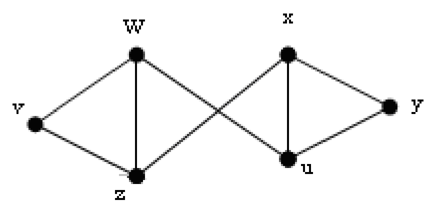
یک گراف کامل ،یک گراف منتظم از درجه n-1 است.

تعریف ۱-۱-۹. گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ به گرافی گفته می‌شود که در آن مجموعه رأس ها را بتوان به دو زیر مجموعه متمایز m و n عضوی افراز کرد به گونه ای که یک یال ما بین دو رأس وجود دارد هرگاه یکی از رئوس در مجموعه اول و دیگری در مجموعه دوم باشد.



شکل ۱-۳- گراف کامل دوبخشی$K_{3,3}$

تعریف ۱-۱-۱۰. گراف G را در نظر بگیرید یک گشت در G، دنباله‌ای متناهی از یالها به صورت $v_0v_1, v_1v_2, ...v_{m-1}v_m$ است (آن را بصورت $v_0 \to v_1 .. \to v_m$ نیز نشان می دهند). یک گشت را که تمام یالهای آن مجزا باشند یک گذر می‌نامند. حال اگر رئوس v_0، v_1،... v_m مجزا باشند (احتمالا به استثنای $v_0 = v_m$) گذر را یک مسیر می‌نامند. اگر $v_0 = v_m$ مسیر را بسته می‌نامیم و مسیر بسته ای که حداقل یک یال دارد مدارگویند.



شکل۱-۴- گرافی برای آشنایی با تعریف مسیر و گذر

در گراف بالا $w \to u \to x \to y \to u \to w$ یک گذر است و $v \to z \to x \to y \to u \to w \to v$ یک مسیر را نشان می دهد.

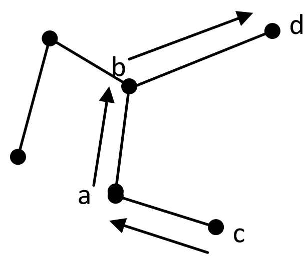
تعریف ۱-۱- ۱۱. طول کوتاهترین مسیر بین رئوس v, u، d(u,v) فاصله بین دو رأس نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۲. طول مسیر، تعداد یال های آن می‌باشد. یک مسیر با طول n دارای n+1 رأس می‌باشد .

تعریف ۱-۱-۱۳. دو رأس را متصل می‌گویند اگر مسیری بین آنها وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۴. یک مسیر ساده، مسیری است که همه رئوس آن بجز احتمالا رأس آغازی و پایانی تکراری نباشد.

مثال: در شکل زیر یک مسیر نشان داده شده است که از رأسc آغاز و به رأس d ختم می‌شود.



شکل ۱-۵- مسیر ساده

تعریف ۱-۱-۱۵. دو گراف $G_1(V_1,E_1)$ و $G_2(V_2,E_2)$ را با فرض مجزا بودن V_1 وV_2 در نظر می گیریم، آنگاه اجتماع آنها G_1UG_2، عبارتست از گرافی که مجموعه رئوس آن E_1UE_2 و خانواده یالهای آن بصورت V_1UV_2 می‌باشد.

تعریف۱-۱-۱۶. یک گراف را همبند گویند اگر نتوان آن را بصورت اجتماع دو گراف در نظر گرفت.

تعریف ۱-۱-۱۷. یک درخت گرافی است همبند که مدار ندارد.

تعریف ۱-۱-۱۸. گراف مولکولی یک ترکیب شیمیایی گرافی است که رئوس آن را اتمها و یالهای آن را پیوند کووالانسی بین اتمها تشکیل می‌دهند. یک گراف مولکولی می تواند یک مسیر، یک درخت و یا در حالت کلی یک گراف باشد.

تعریف ۱-۱-۱۹. دو گراف G_1 و G_2 را یکریخت گویند هرگاه بین مجموعه رئوس آنها تناظری یک به یک موجود باشد بطوریکه دو رأس در گراف G_1 مجاورند هرگاه رئوس متناظر آنها در گراف G_2 مجاور باشند.

تعریف ۱-۱-۲۰. فرض کنیم G یک گراف با n رأس باشد، ماتریس مجاورت آن را که با $A(G)$ نمایش می‌دهیم ماتریسی $n{\times}n$ است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ مجاور باشند} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۲۱. اندیس‌های توپولوژیکی، اعداد حقیقی هستند که به ساختار یک گراف مولکولی نسبت داده می‌شوند و وابسته به نحوه برچسب‌گذاری و شکل ظاهری گراف نیست. دو گراف یکریخت اندیس‌های توپولوژیکی یکسان دارند.

۱-۲- تاریخچه و اهمیت اندیس توپولوژیکی شولتز

ثابت‌های گرافی، خاصیت‌های مربوط به یک گراف می‌باشند که تحت ایزومرفیسم گرافها ثابتند. در واقع دو گراف که با یکدیگر یکریخت هستند دارای ثابت گرافی یکسان می‌باشند. ثابت گرافی می‌تواند چندجمله‌ای یا یک دنباله از اعداد و یا یک عدد حقیقی باشد.

مثلا ماتریس مجاورت یک گراف ثابت گرافی نمی‌باشد زیرا وابسته به برچسب گذاری رئوس است اما دترمینان آن ثابت گرافی است. دنباله درجات رئوس گراف ثابت گرافی می‌باشند. عکس مطلب درست نیست. بنابراین اگر دو گراف دارای ثابتهای گرافی مختلف باشند آنگاه آنها یکریخت نمی باشند پس بدست آوردن ثابت گرافی وسیله خوبی در اثبات غیریکریخت بودن دو گراف به حساب می‌آید. مثلا ایزومرهای فولرن $C_{۸۰}$. همگی گرافهای ۳ منظم با ۸۰ رأس و ساختار بسیار مشابه می‌باشند اما دارای اندیس وینر (که یک ثابت گرافی می‌باشد) متفاوت می‌باشند. لذا با بدست آوردن اندیس وینر آنها می‌توان نشان داد که یکریخت نیستند.

اندیس‌هایی که بر پایه فاصله درگراف هستند در بسیاری از جاها ، برای اثبات روابط بین ساختار یک گراف مولکولی و خواص فیزیک- شیمی آنها استفاده می‌شوند. استفاده از اندیس‌های توپولوژیکی در زیست و شیمی در سال ۱۹۴۷با معرفی اندیس وینر، توسط شیمیدانی با نام هارولد وینر آغاز شد که به منظور اثبات ارتباط بین خواص فیزیک – شیمی ترکیبات آلی بود.

فرض کنیم G یک گراف همبند ساده با مجموعه رئوس$V(G)$ و مجموعه یال های$E(G)$ باشد، فاصله هر دو راس u و v از گراف G را که با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم ، طول کوتاهترین مسیر همبندی بین دو راس u و v است.

اندیس شولتز، توسط هارولد شولتز معرفی شد:

$$S(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}(\delta_u+\delta_v)\,d(u,v)$$

کلاوزار و گوتمان اندیس شولتز تعمیم یافته را این‌گونه تعریف کردند:

$$S^*(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} (\delta_u \delta_v)\, d(u,v)$$

چند جمله ای شولتز و چند جمله ای شولتز تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$H_1(G,x) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} (\delta_u + \delta_v)\, x^{d(u,v)}$$

$$H_2(G,x) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} (\delta_u \delta_v)\, x^{d(u,v)}$$

فصل دوم: چندجمله‌ای‌های شولتز گراف‌های ترکیبی

مقدمه

در این فصل ، ابتدا گراف‌های ترکیبی را معرفی می‌کنیم و سپس اندیس‌ها و چند جمله‌ای‌های شولتز و شولتز تعمیم یافته را برای آنها بدست می‌آوریم. مطالب این فصل از مقالات [2] و [4] گرفته شده است.

۲-۱- اندیس شولتز و چند جمله‌ای شولتز

فرض کنید G یک گراف همبند ساده باشد. مجموعه رئوس و یال‌های گراف G را بترتیب با V(G) و E(G) و فاصلهٔ بین دو رأس u وv از G را با d(u,v) نمایش می‌دهیم که طول کوتاهترین مسیر همبندی بین u و v می‌باشد.

اندیس وینرگراف G [18]،به عنوان مجموع فواصل میان همهٔ رئوس آن تعریف می‌شود:

$$\mathrm{W(G)} = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$$

اندیس شولتز بوسیلهٔ هری شولتز [15] معرفی شد.

$$\mathrm{S(G)} = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} (\delta_u+\delta_v)\, d(u,v) \qquad (۲-۱-۱)$$

که δ_u ، درجهٔ رأس u است.

اگر G یک درخت با n رأس باشد اندیس شولتز ارتباط نزدیکی با اندیس وینر دارد: [13]

$$\mathrm{S}(\mathrm{G}) = 4\mathrm{W}(\mathrm{G}) - \mathrm{n}(\mathrm{n}-1) \qquad (۲-۱-۲)$$

کلاوزار و گوتمان اندیس شولتز تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف کردند: [12]

$$S^*(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}(\delta_u\delta_v)\,d(u,v) \qquad (۲-۱-۳)$$

گوتمان [3] نشان داد که اگر G یک درخت با n رأس باشد آن گاه:

$$S^*\left(G\right)=8W\left(G\right)-2\left(2n-1\right)\left(n-1\right) \qquad (۲-۱-۴)$$

وی چند جمله ای‌های جدیدی را معرفی کرد به طوریکه مشتق آنها در $x=1$ مساوی با اندیس شولتز و شولتز تعمیم یافته است[4]. این چند جمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف شده اند:

$$H_1(G,x)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}(\delta_u+\delta_v)\,x^{d(u,v)} \qquad (۲-۱-۵)$$

$$H_2(G,x)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}(\delta_u\delta_v)\,x^{d(u,v)} \qquad (۲-۱-۶)$$

هوسویا چندجمله ای وینر را که بر پایه فاصله در گراف می‌باشد بصورت زیر معرفی کرد: [7]

$$H(G,x)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}x^{d(u,v)} \qquad (۲-۱-۷)$$

اولین مشتق از H(G,x) در $x=1$، مساوی با اندیس وینر از گراف G است.

۲-۲- معرفی ترکیب، الحاق و جمع دو گراف

فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف همبند باشند:

جمع دو گراف G_1 و G_2 (G_1+G_2) دارای مجموعه رئوس $V\left(G_1+G_2\right)=V_1\times V_2$ است و دو رأس (u_1,u_2) و (v_1,v_2) از G_1+G_2 مجاورند اگر و فقط اگر

$$[u_2=v_2 \quad , \ \left(u_1,v_1\right)\in E(G_1)] \qquad [u_1=v_1 \quad , \ \left(u_2,v_2\right)\in E(G_2)]$$

تفاضل دو گراف G_1 و G_2، $G_1\nabla G_2$ دارای مجموعه رئوس $V(G_1\nabla G_2)=V_1\bigcup V_2$ و مجموعه یال‌های

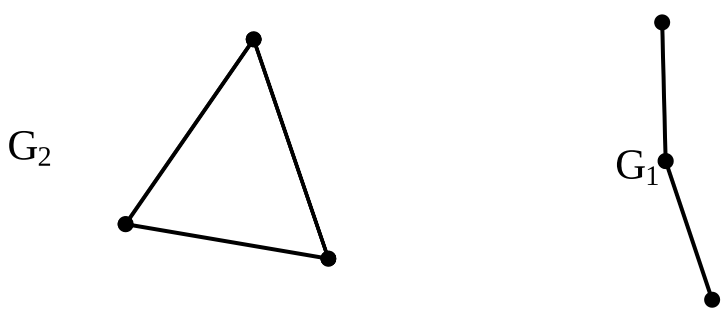
$$E(G_1\nabla G_2)=E(G_1)\bigcup E(G_2)\bigcup\{(u_1,u_2)\big|u_1\in V_1,u_2\in V_2\}$$

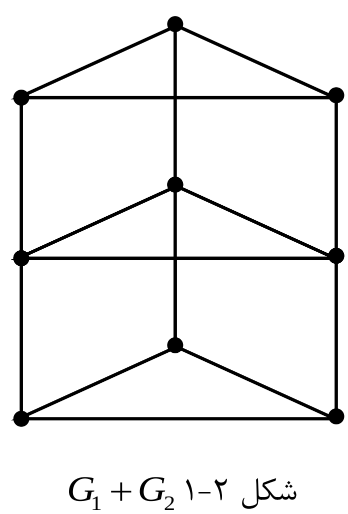
است.

ترکیب دو گراف G_1 و G_2 $(G_1[G_2])$ دارای مجموعه رئوس $V\left(G_1\left[G_2\right]\right)=V_1\times V_2$ است و دو رأس $(u_1\ u_2)$ و (v_1,v_2) از $G_1[G_2]$ مجاورند اگر و فقط اگر

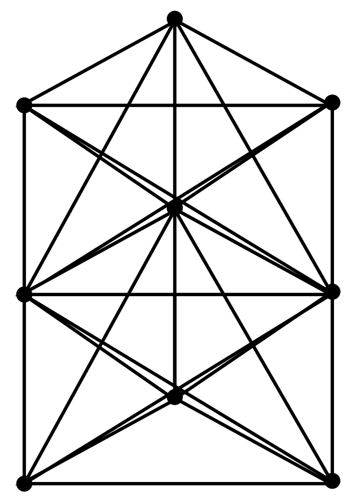
$$u_1=v_1,(u_2,v_2)\in E(G)\quad or\quad (u_1,v_1)\in E(G)$$

مثال۲-۲-۱. فرض کنیم G_1 گراف P_3 و G_2 گراف K_3 باشد در اینصورت ترکیب این دو گراف به شکل زیر می‌باشد:

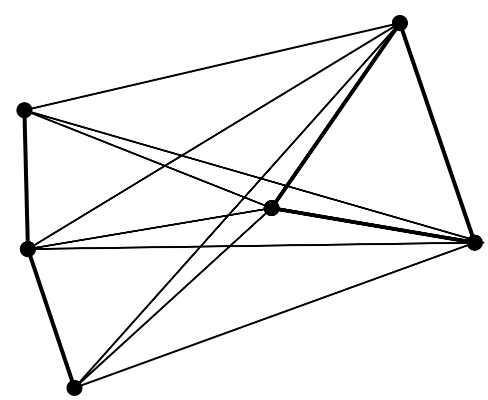




شکل ۲-۱ G_1+G_2



شکل ۲-۲ $G_1[G_2]$



شکل ۲-۳ $G_1 \nabla G_2$

۲-۳- اندیس شولتز و چندجمله‌ای شولتز گراف‌های ترکیبی

دراین بخش چند جمله‌ای‌های شولتز و شولتز تعمیم یافته ترکیب گراف‌ها، جمع و الحاق آنها محاسبه می‌شود.

در قضایای زیر فرض می‌کنیم که :

$V_i=V(G_i), \quad n_i=|V_i|, e_i=|E(G_i)| \quad i=1,2$

همچنین می‌دانیم که : $$\sum_{u\in V_i}\delta_u = 2e_i$$

قضیهٔ۲ -۳-۱. برای دو گراف همبند G_1 و G_2 داریم:

$$H_1(G_1+G_2,x) = 2H_1(G_1,x)H(G_2,x) + 2H(G_1,x)H_1(G_2,x) + 2n_1H_1(G_2,x) + 4e_1H(G_2,x) + 2n_2e_1 + 2e_2n_1.$$

اثبات: فرض کنید که $u=(u_1 , u_2)$ و $v = (v_1,v_2)$ به آسانی می بینیم که $\delta_u = \delta_{u_1} + \delta_{u_2}$ و مطابق با اثبات قضیهٔ ۱در مرجع [16] داریم: $d(u,v|G_1+G_2)= d(u_1 , v_1|G_1)+d(u_2 , v_2|G_2)$ بنابراین:

$$H_1(G_1+G_2,x) = \frac{1}{2}\sum_{u\neq v}\left\{(\delta_u+\delta_v)x^{d(u,v|G_1+G_2)} \middle| u,v\in V(G_1+G_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{u\neq v}\left\{(\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)} \middle| u_1,v_1\in V_1,\, u_2,v_2\in V_2,\ u_1\neq v_1 \,or\, u_2\neq v_2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)}x^{d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2=v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)}x^{d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1=v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)}x^{d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{v_1})x^{d(u_1,v_1|G_1)}x^{d(u_2,v_2|G_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_2}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)}x^{d(u_2,v_2|G_2)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1=v_1}\sum_{u_2\in V_2}(\delta_{u_1}+\delta_{v_1}+2\delta_{u_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\neq v_2}(2\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{v_2})x^{d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$= \left(2H_1(G_1,x)H(G_2,x)+2H(G_1,x)H_1(G_2,x)\right)$$

$$+2n_1H_1(G_2,x)+4e_1H(G_2,x)+2n_2e_1+2e_2n_1.$$

واثبات تمام شد.

قضیهٔ بعدی مشابه قضیهٔ ۲-۳-۱ است و رابطهٔ بین چند جمله ای شولتزتعمیم یافته جمع دو گراف و چند جمله‌ای‌های وینر، شولتز، و شولتز تعمیم یافته آنها را نشان می دهد.

قضیهٔ ۲-۳-۲. برای هر دو گراف همبند G_1 و G_2 داریم:

$$\begin{aligned}H_2\left(G_1+G_2,x\right)&=2H_2\left(G_1,x\right)H\left(G_2,x\right)+H_1\left(G_1,x\right)H_1\left(G_2,x\right)\\&+2H\left(G_1,\ x\right)H_2\left(G_2,x\right)\ +n_2H_2\left(G_1,x\right)+\ 2e_2H_1\left(G_1,x\right)\\&+D_2H\left(G_1,x\right)+n_1H_2\left(G_2,x\right)\ +\ 2e_1H_1\left(G_2,x\right)+D_1H\ \left(G_2,x\right)\end{aligned}$$

که :

$$D_1=\sum_{u_1\in V_1}\delta_{u_1}^2\ ,\quad D_2=\sum_{u_2\in V_2}\delta_{u_2}^2$$

اثبات : مشابه با اثبات قضیهٔ ۲-۳-۱ داریم:

$$H_2(G_1+G_2,x)=\frac{1}{2}\sum\left\{\delta_u\delta_v x^{d(u,v|G_1+G_2)}\,\middle|\,u,v\in V(G_1+G_2),u\neq v\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum\left\{(\delta_{u_1}+\delta_{u_2})(\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\,\middle|\,u_1,v_1\in V_1,u_2,v_2\in V_2,u_1\neq v_1\,or\ u_2\neq v_2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2})(\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2=v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2})(\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1=v_1}\sum_{u_2\neq v_2}(\delta_{u_1}+\delta_{u_2})(\delta_{v_1}+\delta_{v_2})x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}$$

با توسیع سه جمع آخر، داریم:

$$H_2(G_1+G_2,x)=\left(\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_1}\delta_{v_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_1}\delta_{v_2}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_2}\delta_{v_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_2}\delta_{v_2}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\in V_2}\delta_{u_1}\delta_{v_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\in V_2}\delta_{u_1}\delta_{v_2}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\in V_2}\delta_{u_2}\delta_{v_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}+\frac{1}{2}\sum_{u_1\neq v_1}\sum_{u_2\in V_2}\delta_{u_2}^2x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_1}^2x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}+\frac{1}{2}\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_1}\delta_{v_2}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_2}\delta_{v_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\frac{1}{2}\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_2}\delta_{v_2}x^{d(u_1,v_1|G_1)+d(u_2,v_2|G_2)}\right)$$

اما :

$$\sum_{u_1\neq v_1}\delta_{u_1}x^{d(u_1,v_1|G_1)}=H_1(G_1,x),\qquad \sum_{u_2\neq v_2}\delta_{u_2}x^{d(u_2,v_2|G_2)}=H_1(G_2,x)$$

که با استفاده از این واقعیت‌ها بدست می‌آوریم :

$$
\begin{aligned}
H_2(G_1+G_2,x) &= \Big(2H_2(G_1,x)H(G_2,x)+\frac{1}{2}H_1(G_1,x)\ H_1(G_2,x)\\
&\quad +\frac{1}{2}H_1(G_2,x)\ H_1(G_1,x)+\ 2H(G_1,x)H_2(G_2,x)\Big)\\
&\quad +\big(n_2\,H_2\ (G_1,x)+e_2H_1(G_1,x)+e_2H_1(G_1,x)+D_2H(G_1,x)\big)\\
&\quad +\big(D_1H(G_2,x)+e_1H_1(G_2,x)\ )+e_1H_1(G_2,x)+n_1H_2(G_2,x)\big)\\
&= 2H_2(G_1,x)H(G_2,x)+H_1(G_1,x)H_1(G_2,x)\\
&\quad +2H(G_1,x)\ H_2(G_2,x)+n_2H_2(G_1,x)+2e_2H_1(G_1,x)\\
&\quad +D_2H(G_1,x)+n_1H_2(G_2,x)+2e_1H_1(G_2,x)+D_1H(G_2,x).
\end{aligned}
$$

و اثبات تمام شد.

از حالا برای گراف‌های مربوط به G_1 و G_2 ، مجموعه‌های A_2 و A_1 و B_2 و B_1 را که بصورت زیر تعریف شده در نظر می‌گیریم:

$$A_1 := \{\{u,v\}\subseteq V_1 | u\neq v,\ uv\notin E(G_1)\},\ \ A_2 := \{\{z,t\}\subseteq V_2 | z\neq t,\ zt\notin E(G_2)\}$$

$$B_1 := \{\{u,v\}\subseteq V_1 | u\neq v,\ uv\in E(G_1)\},\ \ B_2 := \{\{z,t\}\subseteq V_2 | z\neq t,\ zt\in E(G_2)\}$$

حال در این دو قضیه چند جمله‌ای‌های شولتز و شولتزتعمیم یافته از $G_1\nabla G_2$ را مشخص می کنیم. از آنجا که دو رأس از $G_1\nabla G_2$ مجاورند یا فاصلهٔ ۲ دارند، چند جمله ای‌های شولتز و شولتزتعمیم یافته از $G_1\nabla G_2$ از درجهٔ ۲ هستند. بنابراین آنچه باقی می ماند محاسبه ضرایب x و x^2 است. از حالا ما قرار می دهیم:

$$\bar{e}_i=\binom{n_i}{2}-e_i\ ,\quad i=1,2$$

قضیهٔ ۲-۳-۳. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف همبند باشند آن‌گاه :

$$H_1(G_1\nabla G_2,x)=\left[\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+\delta_v)+2n_2\bar{e}_1+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)+2n_1\bar{e}_2\right]x^2$$
$$+\left[\sum_{\{u,v\}\in B_1}(\delta_u+\delta_v)+\sum_{\{z,t\}\in B_2}(\delta_z+\delta_t)\ +2n_1e_2+4n_2e_1+2n_1e_2+(n_1+n_2)n_1n_2\right]x.$$

اثبات : دو رأس از $G_1\nabla G_2$ یا مجاورند و یا فاصله آنها ۲ است. جفت رئوس با فاصلهٔ ۲ در $A_1\cup A_2$ هستند. همچنین اگر δ_u درجهٔ رأس u از G_1 باشد آن گاه درجهٔ u در $G_1\nabla G_2$ برابر δ_u+n_2 است.

به طور مشابه هر $z\in V_2$ دارای درجهٔ δ_z+n_1 در $G_1\nabla G_2$ است.

بنابراین ضریب x^2 در $H_1(G_1\nabla G_2,x)$ برابر است با :

$$\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+n_2+\delta_v+n_2)+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+n_1+\delta_t+n_1)$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+\delta_v)+\sum_{\{u,v\}\in A_1}2n_2+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)+\sum_{\{z,t\}\in A_2}2n_1$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+\delta_v)+2n_2\bar{e}_1+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)+2n_1\bar{e}_2$$

به طور مشابه ضریب x در $H_1(G_1\nabla G_2,x)$ برابر است با :

$$\sum_{\{u,v\}\in B_1}(\delta_u+n_2+\delta_v+n_2)+\sum_{\{z,t\}\in B_2}(\delta_z+n_1+\delta_t+n_1)+\sum_{u\in V_1,\,z\in V_2}(\delta_u+n_2+\delta_z+n_1)$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in B_1}(\delta_u+\delta_v)+\sum_{\{u,v\}\in B_1}2n_2+\sum_{\{z,t\}\in B_2}(\delta_z+\delta_t)$$
$$+\sum_{u\in V_1,t\in V_2}(\delta_u+\delta_z)+\sum_{\{z,t\}\in B_2}2n_1+\sum_{u\in V_1,t\in V_2}(n_1+n_2)$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in B_1}(\delta_u+\delta_v)+\sum_{\{z,t\}\in B_2}(\delta_z+\delta_t)+2n_1e_2+4n_2e_1+2n_1e_2+(n_1+n_2)n_1n_2.$$

و اثبات تمام شد .

به روش مشابه می‌توانیم چند جمله‌ای شولتزتعمیم یافته را برای $G_1\nabla G_2$ بدست آوریم.

قضیهٔ ۲-۳-۴. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف همبند باشند آن گاه :

$$H_2(G_1\nabla G_2,x)=\left[\sum_{\{u,v\}\in A_1}\delta_u\delta_v+n_2\sum_{\{u,v\}\in A_1}\left(\delta_u+\delta_v\right)+n_2^2\bar{e}_1+\sum_{\{z,t\}\in A_2}\delta_z\delta_t+n_1\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)+n_1^2\bar{e}_2\right]x^2$$
$$+\left[\sum_{\{u,v\}\in B_1}\delta_u\delta_v+n_2\sum_{\{u,v\}\in B_1}\left(\delta_u+\delta_v\right)+n_2^2e_1+\sum_{\{z,t\}\in B_2}\delta_z\delta_t\right.$$
$$\left.+n_1\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)\ +n_1^2e_2+4e_1e_2+2e_1n_1n_2+2e_2n_1n_2+n_1^2n_2^2\right]x.$$

اثبات: از اثبات قضیهٔ ۲-۳-۳ پیروی می‌کنیم.

ضریب x^2 در $H_2(G_1\nabla G_2,x)$ مساوی است با :

$$\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+n_2)(\delta_v+n_2)+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+n_1)(\delta_t+n_1)$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u\delta_v)+\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+\delta_v)n_2+\sum_{\{u,v\}\in A_1}n_2^2+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z\delta_t)$$
$$+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)n_1+\sum_{\{z,t\}\in A_2}n_1^2$$
$$=\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u\delta_v)+n_2\sum_{\{u,v\}\in A_1}(\delta_u+\delta_v)+n_2^2\bar{e}_1+\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z\delta_t)$$
$$+n_1\sum_{\{z,t\}\in A_2}(\delta_z+\delta_t)+n_1^2\bar{e}_2.$$