بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

۱۳۸۰ /۱۲/ ۲۰

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلها

نگارش : مهدی رضا خورسندی

استاد راهنما : دکتر رحیم زارع نهندی

استاد مشاور: دکتر سیامک یاسمی

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

بهمن ۱۳۸۰

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی آقای مهدی رضا خورسندی** تحت عنوان:

تعداد مولدهای مینیمال یک ایده آل

در تاریخ ۸۰/۱۱/۱۳ در **گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد** در رشته ریاضی محض معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹٫۲۵ [illegible] با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	**دکتر رحیم زارع نهندی**	استاد	تهران	
۲. استاد مشاور	**دکتر سیامک یاسمی**	دانشیار	تهران	
۳. استاد داور	**دکتر حسن حقیقی**	استادیار	خواجه نصیرالدین طوسی	

معاون تحصیلات تکمیلی گروه
سیامک یاسمی

مدیر گروه
حمید پزشک

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رسول اخروی

تقدیم به پدرومادر عزیزم

چکیده

هدف این پایان‌نامه تعیین تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلها در یک حلقه (جابجایی، یکدار، موضعی و نوتری) است، هر چند تعیین دقیق تعداد مولدها در حالتهایی خاص امکان‌پذیر است اما در حالتهای کلی روش‌های موجود بدست آوردن کرانهای مختلف برای تعداد مولدها است.

مرجع اصلی این پایان‌نامه [1] می‌باشد، به علاوه از نتایج جدیدی که در مرجع [2] نیز آمده استفاده کرده‌ایم.

[1] J. Sally, *Numbers of Generators of Ideals in Local Rings*, Lect. Notes in Pure and Appl Math. **35**, M.Dekker, 1978.

[2] T. Sharif and S. Yassemi, Bounds for numbers of generators for class of submodules of a finitely generated module, to appear in *Comm. in Algebra.*

کلمات کلیدی. تعداد مولدهای مینیمال، حلقه‌ها(مدولها)ی کوهن-مکالی، ایده‌آل کوهن-مکالی، ایده‌آل گورنشتاین و چندگانگی.

رده‌بندی موضوعی AMS. 13C99، 13E15، 13H10، 13H15 و 13H99.

پس سُستی دل را با استقامت درمان کن وخواب زدگی چشمانت را با بیداری ازمیان برداروطاعت خدا را بپذیر وبا یاد خدا اُنس گیر و یاد آر که تواز خدا روی گردانی و د رهمان لحظه او روی به تو دارد و تو را به عفوخویش می خواند درحالیکه تو ازخدا بریده وبه غیراو توجّه داری! پس چه نیرومند و بزرگواراست خدا!

حضرت علی(ع)- خطبه ۲۲۳

سپاسگزاری

خداوند را سپاس می گزارم که بی یاری اواین پژوهش به ثمرنمی رسید.

کمکهای بی دریغ پدر و مادرم وصبوری آنها در دوران تحصیلات به ویژه درانجام این پژوهش پشتیبان اصلی من بوده است، سپاسگزاری خود را از آنها ابزار می دارم ومحبت های ایشان راارج می نهم.

از معلمان واساتید دلسوزوبزرگوارتمام دوران تحصیلم که مرا بدین مرحله از دانش رساندند سپاسگزاری می کنم.

موضوع این پایان نامه راآقای‌دکترسیامک یاسمی انتخاب نمودندو مراجع اصلی این پایان نامه را نیز ایشان در اختیار من قرا ر دادند، اما به دلیل مسافرت ایشان به خارج از کشور آقای دکتر رحیم زارع نهندی بر من منّت گذاشتند و راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند،از این دواستاد محترم کمال تشکر وقدردانی را دارم. از آقای دکترحسن حقیقی نیز که داوری این پایان نامه را برعهده داشتند، تقدیرمی کنم. همچنین از آقای تیرداد شریف به خاطرراهنماییهای مفیدشان تشکر می کنم.

از خانمها توکّلی و کاویانی که تایپ پایان نامه را بر عهده داشتند قدردانی می کنم.

از خانم باشوکی به خاطر ارائه برخی خدمات کامپیوتری متشکرم.

در آخر نیز از تمام کسانی که درجلسه دفاع از پایان نامه اینجانب حضور داشتند قدردانی و تشکر می کنم.

فهرست

مقدمه

یکی از مهمترین مطالبی که در جبر جابجایی مورد بحث قرار می‌گیرد موضوع ایده‌آلها است و تعیین تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلها گامی در جهت شناخت و رده‌بندی ایده‌آلها است. بدست آوردن کرانهای مختلف برای تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلها و در صورت امکان تعیین دقیق تعداد مولدها در ایده‌آلهایی خاص از مصادیق کارهای تحقیقاتی جاری در این زمینه است. تحقیقات عمیقی روی مسأله اخیر انجام شده است، اما ایده‌های اصلی کارهای انجام شده تعمیم طبیعی چهار قضیه کلاسیک زیر در ارتباط با تعداد مولدهای مینیمال است:

۱) قضیه ایده‌آل اصلی تعمیم‌یافته کرول[1] (۱۹۲۸) یک کران پایین برای تعداد مولدهای مینیمال یک ایده‌آل در یک حلقه نوتری بدست می‌دهد یعنی اگر I ایده‌آلی با ارتفاع 'n' باشد $(\mathrm{ht}\, I = n)$ آنگاه I حداقل 'n' مولد لازم دارد.

۲) مکالی[2] [15] (۱۹۱۶) ثابت کرد که کران یکنواختی برای تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلهای اول حلقه $\mathbb{C}[x,y,z]$ و حلقهٔ $\mathbb{C}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ وجود ندارد که در آن $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط است.

۳) در سال ۱۹۳۸ آکیزوکی[3] [2] ثابت کرد که در حوزه‌های موضعی نوتری با بعد 'یک' کران

1) Krull's generalized principal ideal theorem 2) Macaulay 3) Akizuki

یکنواختی برای تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلهای آن وجود دارد. در سال ۱۹۵۰ کوهن[4] [9] اثبات جدیدی برای این مطلب آورد و نشان داد که وجود چنین کران یکنواختی، حوزه‌های موضعی نوتری با بعد 'یک' را مشخص می‌کند.

۴) شوالی[5] [8] (۱۹۴۳) نشان داد که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی منظم و I ایده‌آلی از آن باشد آنگاه $\frac{R}{I}$ منظم است اگر و تنها اگر I توسط بخشی از یک دستگاه از پارامترهای منظم R تولید شود (یعنی زیر مجموعه‌ای از یک مولد مینیمال $\mathfrak{m}$).

در این پایان‌نامه به مطالعه و تشریح مطالبی در زمینه فوق خواهیم پرداخت، در ضمن R را حلقه‌ای جابجایی، یکدار و در اکثر موارد موضعی و نوتری فرض خواهیم کرد.

در فصل اول ابزارهای لازم برای بیان و فهم مطالب را خواهیم آورد. در فصل دوم بررسی می‌کنیم که چه موقع یک مولد مینیمال برای ایده‌آل $J \subseteq I$ می‌تواند به یک مولد مینیمال برای I توسیع یابد. در فصل سوم به بررسی شرایط وجود کران یکنواخت برای تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آلهای یک حلقه می‌پردازیم و نشان خواهیم داد که این کران یکنواخت فقط و فقط در حلقه‌های موضعی و نوتری با بعد 'یک' وجود دارد و در حلقه‌های با بعد بالاتر باید به رده خاصی از ایده‌آلها محدود شویم، مطالب این فصل در حقیقت تعمیم قضایای کلاسیک (۲) و (۳) است. در فصل آخر خواهیم دید که چطور خواص حلقه $\frac{R}{I}$ اطلاعاتی در مورد تعداد مولدهای مینیمال ایده‌آل I می‌دهد که قضیه کلاسیک (۴) نمونه‌ای از آن است. در این فصل همچنین خواهیم دید که چه موقع کران داده شده در قضیه کرول (قضیه کلاسیک (۱)) بدست می‌آید، یعنی چه موقع ایده‌آل I در یک حلقه می‌تواند توسط '$\operatorname{ht} I$' عنصر تولید شود.

آنچه در این پایان‌نامه آمده است اکثراً نتایج کارهای آبیانکار[6] [1] بوراتینسکی، آیزن‌باد و ریز[7] [3]،

4) Cohen 5) Chevally 6) Abhyankar 7) Boratynski, Eisenbud and Rees

بوکسباوم و آیزن‌باد[8] [6],[7]، دیویس[9] [10]، کِربی[10] [14]، مَتلیس[11] [16]، نورثکات و ریز[12] [19]، ریز[13] [20]، سَلی[14] [21] و [22]، سلی و وسکون‌سیلوس[15] [24] و سِر[16] [7] است. که ما آنها را از کتاب سَلی [23] اقتباس کرده‌ایم، به علاوه مجموعه‌ای از نتایج جدیدتر که در مراجع [12] و [25] آمده نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

مهدی‌رضا خورسندی
بهمن ۱۳۸۰

8) Buchsbaum and Eisenbud 9) Davis 10) Kirby 11) Matlis 12) Northcott and Rees 13) Rees 14) Sally 15) Sally and Vasconcelos 16) Serre

فصل اول

ابزارهای اساسی

در این فصل ابزارهای لازم در این پایان‌نامه را بیان خواهیم کرد، در بخش اول نمادها، تعریف‌ها و قضایای مورد استفاده در پایان‌نامه را خواهیم آورد، در بخش دوم مختصری در مورد تجزیه اولیه توضیح خواهیم داد، در بخش سوم حلقه‌ها ومدولهای مدرج را معرفی خواهیم کرد، در بخش چهارم در مورد چندگانگی بحث خواهیم کرد، در بخش پنجم عناصر سطحی را تعریف و چند گزاره در مورد آنها بیان خواهیم کرد، در بخش ششم در مورد تغییر حلقه بحث خواهیم کرد، در بخش هفتم نکاتی اساسی در مورد Ext و Tor خواهیم آورد و بالاخره در بخش هشتم همبافت کزول را معرفی و چند گزاره در مورد آن بیان خواهیم کرد.

۱.۱. تعریف‌ها، نمادها و پیش‌نیازها

در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و ناصفر است و Rـمدولها یکانی فرض می‌شوند. هرگاه نماد $(R, \mathfrak{m}, k)$ یا $(R, \mathfrak{m})$ را به‌کار برديم منظور حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ و حلقه خارج‌قسمتی $k = \dfrac{R}{\mathfrak{m}}$ است، از فصل سوم به بعد منظور از $(R, \mathfrak{m}, k)$ یا $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری نیز خواهد بود. عمده تعریفها، نمادگزاریها و قضیه‌های ثابت نشده از مراجع [5]، [13] و [17] گرفته شده است.

فرض کنید R یک حلقه و M یک R−مدول باشد. منظور از $\ell_R(M)$ طول R− مدول M است و معمولاً در نمادهایی مشابه این در صورتی که اشتباهی پیش نیاید زیرنویسها را حذف می‌کنیم، اگر R حلقه‌ای موضعی باشد و M یک R−مدول متناهی مولد باشد تعداد مولدهای مینیمال M را با $\mu_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ ایده‌آلهای اول R را با $\operatorname{Spec} R$ نشان می‌دهیم، $\operatorname{Ass}_R M$ که مجموعه مقسوم علیه‌های صفر M روی R است به صورت $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R | \exists x \in M : \mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(x)\}$ و $Z_R(M)$ را به‌صورت $\{r \in R | \exists x \in M : x \neq 0, rx = 0\}$ تعریف می‌کنیم. در ضمن اگر N_1 زیرمدولی از M باشد آن را با نماد $N_1 \leq M$ نمایش می‌دهیم و $\operatorname{Ann}_R(N_1)$ همان $\{r | rN_1 = 0\}$ است، به‌علاوه اگر N_2 زیرمدولی دیگری از M باشد $(N_1 :_R N_2)$ را برابر $\{r \in R | rN_2 \subseteq N_1\}$ تعریف می‌کنیم.

اگر I ایده‌آلی سره از R باشد، $\operatorname{Min}(I)$ مجموعه ایده‌آلهای اولی از R است که به‌طور مینیمال شامل I هستند، اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I)$ آنگاه می‌گوئیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول مینیمال I است.

طول بلندترین زنجیر از ایده‌آلهای اول یک حلقه مانند R را بعد کرول[1] R می‌نامیم و با نماد $\dim R$ نمایش می‌دهیم، اگر M یک R−مدول متناهی مولد باشد بعد کرول M را برابر بعد کرول حلقهٔ $\dfrac{R}{\operatorname{Ann}(M)}$ تعریف می‌کنیم و با $\dim_R M$ نمایش می‌دهیم و منظور از بُعد همان بعد کرول است.

اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ آنگاه ارتفاع $\mathfrak{p}$ را برابر با

$$\sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists\ \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R \ :\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\},$$

تعریف می‌کنیم و با نماد $\operatorname{ht}\mathfrak{p}$ نمایش می‌دهیم، بدیهی است که اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد آنگاه $\dim R = \operatorname{ht}\mathfrak{m}$. درضمن ارتفاع ایده‌آل دلخواه I از R را به‌صورت $\inf\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} \mid I \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}$ تعریف می‌کنیم و با نماد $\operatorname{ht} I$ نمایش می‌دهیم، به‌وضوح می‌توان دید که

$$\operatorname{ht} I = \inf\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(I)\}.$$

1) Krull

۱.۱.۱ قضیه. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک R−مدول متناهی مولد باشد در این صورت $\mu(M) = \ell_R(\frac{M}{\mathfrak{m}M})$.

برهان. به نتیجهٔ ۳.۲ رجوع کنید.

۲.۱.۱ قضیه. فرض کنید R یک حلقه و M یک R−مدول باشد در این صورت

(۱) $\ell_R(M) < \infty$ اگر و تنها اگر M یک R−مدول نوتری و آرتینی باشد.

(۲) اگر $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از R−مدولها باشد آنگاه $\ell_R(L) < \infty \Longleftrightarrow \ell_R(K) < \infty, \ell_R(N) < \infty$ و در این صورت $\ell_R(L) = \ell_R(N) + \ell_R(K)$.

(۳) فرض کنید $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$ در این صورت $\ell_R(M) = \ell_{\frac{R}{I}}(M)$.

برهان. برای اثبات (۱) و (۲) به [۲۹، ۳۶.۷ قضیه] و [۲۹، ۴۱.۷ قضیه] رجوع کنید.

(۳) چون ساختار $\frac{R}{I}$ مدولی M به صورت $\begin{array}{c}\frac{R}{I} \times M \longrightarrow M \\ (r+I, x) \mapsto rx\end{array}$ تعریف می‌شود لذا هر زیرمجموعه از M، R−زیرمدول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$−زیرمدول باشد و حکم به‌راحتی با استفاده از این مطلب ثابت خواهد شد. ■

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری و M یک R−مدول متناهی مولد با بعد 'd' باشد آنگاه رشتهٔ $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ را یک دستگاه از پارامترها روی M گوئیم[۲] هرگاه $\ell(\frac{M}{\boldsymbol{x}M}) < \infty$ که بنابر قضیهٔ بُعد هرگاه بُعد M متناهی باشد همواره وجود خواهد داشت. اگر '$\boldsymbol{x}$'، $\mathfrak{m}$ را تولید کند آنگاه به آن یک دستگاه از پارامترهای منظم می‌گوییم.

ایده‌آل I از R را یک ایده‌آل پارامتری روی M گوئیم هرگاه توسط یک دستگاه از پارامترها روی M تولید شود.

۲) در بعضی موارد اصطلاحات دستگاهی از پارامترهای M و دستگاهی از پارامترها برای M را نیز بکار می‌بریم.