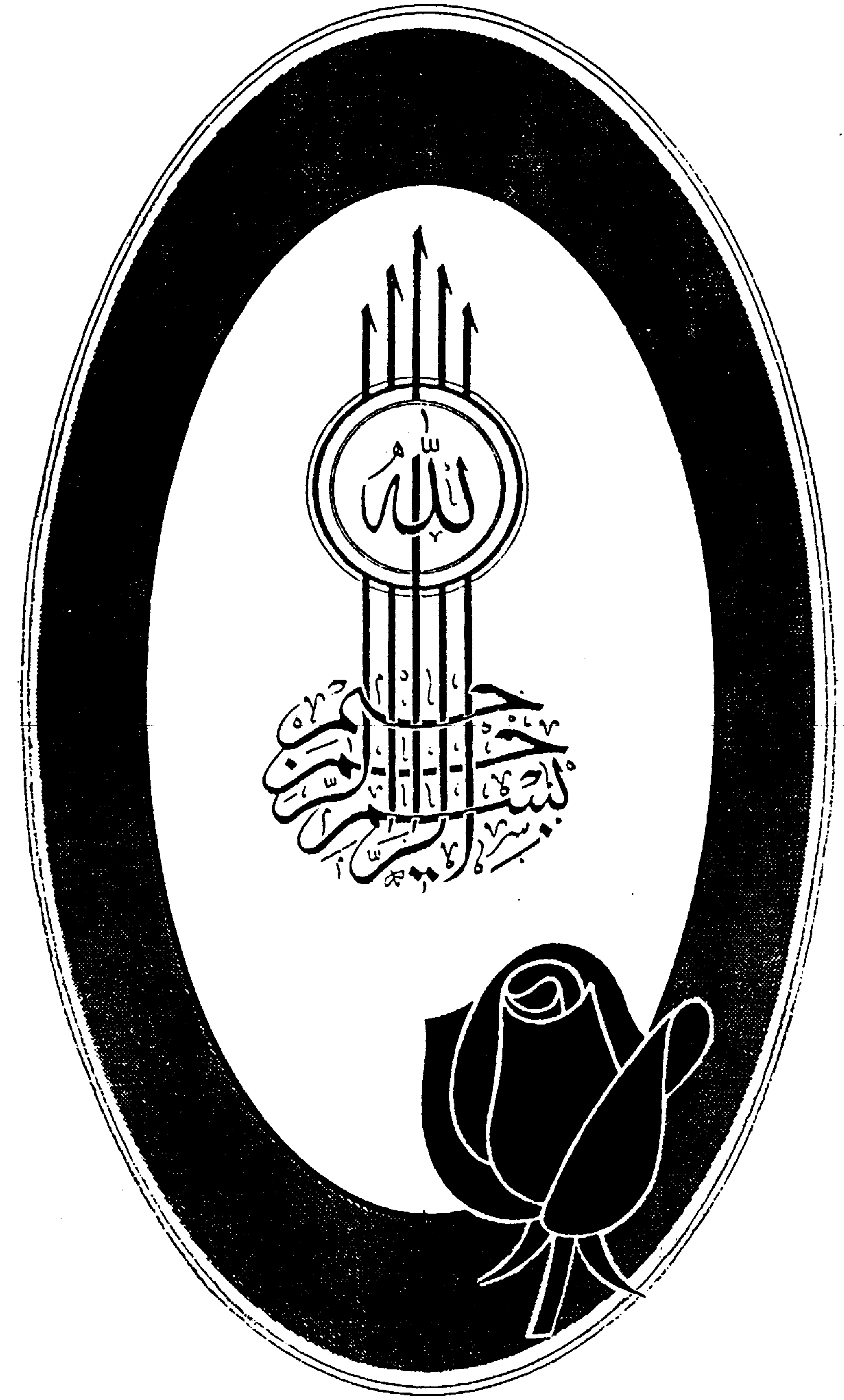
الله
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه به عنوان بخشی از شرایط احراز درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

تحت عنوان:

جبرهای BCK

استاد راهنما:
دکتر محمدمهدی زاهدی

مولف :
محمد طلائی

بهمن ۱۳۷۴

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : محمد طلائی

استاد راهنما: آقای دکتر محمدمهدی زاهدی

داور ۱ : آقای دکتر ماشاالله ماشین‌چی

داور ۲ : آقای دکتر یوسف بهرامپور

تقدیم به

روح در پرواز همسر مرحومه‌ام

بهاره

تقدیر و تشکر

لم یشکرالمخلوق، لم یشکرالخالق

شکر و سپاس خدای را که توفیق کسب علم و معرفت عطا فرمود و قطره‌ای از دریای علم و دانش بر کویر تشنه دل فروبارید.

اکنون که به توفیق و عنایت پروردگار، رساله کارشناسی ارشد ریاضی را فراهم آورده، با توجه به حدیث لم یشکرالمخلوق، لم یشکرالخالق برخود لازم می‌دانم که از همه مربیان و اساتیدی که به نحوی حق تربیت و تعلیم به گردن حقیر دارند تشکر و سپاسگزاری نمایم. بخصوص از استاد ارجمند آقای دکتر محمد مهدی زاهدی که هدایت این رساله را بر عهده داشته و وقت و بیوقت از راهنمائیهای عالمانه ایشان بهره جسته و نه تنها از علم بلکه از تواضع و حلم و روحیه دانش‌پژوهی ایشان بهره‌مند بوده‌ام تقدیر و تشکر نمایم. انشاءاله که خداوند بر توفیقات روزافزون ایشان بیافزاید. همچنین از دیگر اساتید بخش ریاضی بخصوص دکتر ماشین‌چی و دکتر بهرامپور که داوری این رساله را بر عهده داشته‌اند سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از آقای عباس حسن‌خانی بخاطر همکاریهای بیدریغ ایشان سپاسگزارم. از اساتید بخش ریاضی دانشکده علوم دانشگاه فردوسی مشهد که در ادامه تحصیل از محضر درسشان استفاده کرده و همکاری بیدریغانه‌ای مبذول فرمودند تشکر می‌کنم.

از همسر مرحومه‌ام و فرزندانم (حسین و فاطمه و حسن) که در ایام تحصیل با شکیبایی روزگار گذرانده و مرا و مشکلات ناشی از تحصیلم را تحمل نمودند قدردانی و تشکر می‌نمایم و از خداوند متعال برای روح همسرم علو درجات را آرزومندم.

از پدر و مادرم که با زحمت طاقت‌فرسا اسباب تحصیل اینجانب و دیگر برادرانم را فراهم آورده‌اند تشکر می‌کنم و از خدای منان شادی روح پدرم و توفیقات روزافزون مادرم را مسئلت دارم.

در خاتمه از خانمها باقری و مانی که زحمت تایپ کامپیوتری این رساله را بر خود هموار نمودند تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

محمد طلائی

بهمن ۱۳۷۴

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریه جبرهای BCK

مقدمه

در تئوری مجموعه‌ها، یک راه برای ساختن یک مجموعه جدید از مجموعه‌های داده شده، استفاده از برخی عملها می‌باشد. در بین اعمال مختلف، سه عمل مقدماتی و پایه‌ای وجود دارد که عبارتند از: اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه داده شده، با در نظر گرفتن سه عمل فوق و شناخت خواص آنها، می‌توان سیستمهایی از قبیل جبرهای بولی را معرفی نمود. اگر دو عمل اجتماع و اشتراک را مد نظر قرار دهیم، می‌توانیم از شبکه‌های توزیعی به عنوان نمونه‌ای از یک جبر عمومی ساخته شده توسط آنها، نام ببریم، همچنین به عنوان مثال می‌توانیم مفهوم نیم‌حلقه‌ها را تعمیمی از مفهوم بالا بنامیم. علاوه براین، صرفاً با در نظر گرفتن مفهوم اجتماع یا اشتراک دو مجموعه می‌توانیم یک نیم مشبکه پایینی یا نیم مشبکه بالائی را به عنوان یک جبر ساخته شده توسط آنها معرفی نمائیم.

جبرهایی که تاکنون معرفی شده‌اند اساساً با در نظر گرفتن خواص اجتماع و اشتراک بوده است. در سال ۱۹۶۶، Y.Imai و K.Iseki، مفهوم جبر BCK را معرفی نمودند. معرفی نمودن این مفهوم جدید دو منشاء داشت، یکی مد نظر قرار دادن تفاضل دو مجموعه و خواص آنها، منشاء دیگر، محاسبات روی گزاره‌های منطقی کلاسیک و غیر کلاسیک.

می‌دانیم یک ارتباط نزدیک و تنگاتنگ، بین مفهوم تفاضل مجموعه‌ها در نظریه مجموعه‌ها و عملگر استنتاجی در سیستمهای منطقی وجود دارد که ذیلاً بدان اشاره می‌شود.

در نظریه کلاسیک مجموعه‌ها، چندین رابطه جالب درباره تفاضل مجموعه‌ها وجود دارد. یکی از ساده‌ترین و مفیدترین روابطی که فقط شامل تفاضل مجموعه‌هاست عبارت است از:

$$(A-B)-(A-C)\subseteq C-B \tag{1}$$

یا

$$(B-A)-(C-A)\subseteq B-C \tag{2}$$

در حساب گزاره‌ها نظیر روابط فوق، فرمولهای درستی وجود دارند که عبارتند از :

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \qquad (۳)$$

یا

$$(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r)) \qquad (۴)$$

در زیر اثبات متناظر بودن (۱) با (۳) و (۲) با (۴) آورده می‌شود.

$$x \in ((A - B) - (A - C)) \to x \in (C - B)$$

$$\equiv \sim (x \in (C - B)) \to \sim [x \in ((A - B) - (A - C))] \quad \text{(عکس نقیض)}$$

$$\equiv \sim (x \in C \wedge x \notin B) \to \sim [x \in (A - B) \wedge x \notin (A - C)]$$

$$\equiv x \notin C \vee x \in B \to [\sim (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)]$$

$$\equiv x \in B \vee x \notin C \to (x \notin A \vee x \in B) \vee \sim (x \notin A \vee x \in C)$$

اگر $x \notin B$ را گزاره p و $x \notin C$ را گزاره q و $x \notin A$ را گزاره r بنامیم، داریم:

$$\equiv (\sim p \vee q) \to (r \vee \sim p) \vee \sim (r \vee \sim q)$$

$$\equiv (p \to q) \to (p \to r) \vee \sim (q \to r)$$

$$\equiv (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) / \blacksquare$$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که (۲) متناظر با (۴) است.

از ساده‌ترین حسابهای گزاره‌ای شامل فرمولهای درست فوق، می‌توان سیستمهای BCI و BCK را که توسط ث.آ.مَرَدیت معرفی شده‌اند را نام برد. در این سیستم‌ها، مَرَدیت بر فرمول مهم زیر تأکید نموده است.

$$p \to ((p \to q) \to q) \qquad (۵)$$

که متناظر با فرمول زیر در تئوری مجموعه‌ها می‌باشد:

$$A-(A-B)\subset B \qquad (۶)$$

در زیر چگونگی متناظر بودن این دو فرمول را بیان می‌کنیم:

$$x\in [A-(A-B)]\rightarrow x\in B$$

$$\equiv \sim (x\in B)\rightarrow \sim [x\in [A-(A-B)]]$$

$$\equiv x\notin B\rightarrow \sim [x\in A\wedge x\notin (A-B)]$$

$$\equiv x\notin B\rightarrow x\notin A\vee x\in (A-B)$$

$$\equiv x\notin B\rightarrow x\notin A\vee (x\in A\wedge x\notin B)$$

$$\equiv x\notin B\rightarrow x\notin A\vee \sim (x\notin A\vee x\in B)$$

اگر عبارت $x\notin B$ را گزاره p و عبارت $x\notin A$ را گزاره q بنامیم، خواهیم داشت:

$$\equiv p\rightarrow (q\vee \sim (q\vee \sim p))$$

$$\equiv p\rightarrow (q\vee \sim (p\rightarrow q))$$

$$\equiv p\rightarrow ((p\rightarrow q)\rightarrow q)\cdot \blacksquare$$

۱.۱ جبرهای BCK و خواص کلی آنها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه همراه با عمل دوتائی $*$ و رابطه ترتیب $\leq$ و ثابت o باشد. در اینصورت X را جبر BCK گوئیم هرگاه در شرایط زیر صدق نماید:

$(x * y) * (x * z) \leq z * y$ (I)

$x * (x * y) \leq y$ (II)

$x \leq x$ (III)

$o \leq x$ (IV)

$x \leq y, y \leq x \implies x = y$ (V)

$x \leq y \iff x * y = o$ (VI)

مثال ۲.۱.۱. اگر A یک مجموعه ناتهی دلخواه و X مجموعه توانی آن و ثابت صفر همان مجموعه $\emptyset$ و عمل $*$ تفاضل مجموعه‌ها و رابطه $\leq$ همان رابطه شمولیت مجموعه‌ها باشد آنگاه $(X, *, \leq, o)$ یک جبر BCK خواهد بود.

تذکر ۳.۱.۱. ج.اف.ث.گریس با در نظر گرفتن دو عمل اجتماع و تفاضل در نظریه مجموعه‌ها مفهومی را معرفی کرد که به جبر گریس معروف است. بعبارت بهتر، مجموعه X همراه با دو عمل دوتائی $\vee$ و $*$ و ثابت صفر را که در شرایط زیر صدق نماید، جبر گریس می‌نامند.

$< X, \vee >$ (I') یک نیم مشبکه بالایی همراه با o به عنوان کوچکترین عضو باشد.

$(x \vee y) * (x \vee z) \leq y \vee z$ (II')

$x * y \leq (x * z) \vee (z * y)$ (III')

$x * y = o \iff x \leq y \iff x \vee y = y$ (IV')

گزاره ۴.۱.۱. هر جبر BCK دارای خواص زیر است:

$$a)\ x \leq y \Longrightarrow z * y \leq z * x,\ \forall x, y, z \in X \cdot \qquad (۷)$$

$$b)\ x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z,\ \forall x, y, z \in X \cdot \qquad (۸)$$

اثبات. (a) فرض کنیم $x \leq y$ ، در اینصورت طبق (IV) داریم $x * y = o$. از طرفی طبق (I) داریم، $(z * y) * (z * x) \leq x * y$ و لذا $(z * y) * (z * x) \leq o$ که با توجه به IV داریم $(z * y) * (z * x) = o$ و بنابه VI خواهیم داشت $z * y \leq z * x$.

(b) فرض کنیم $y \leq z$. بنا به (a) داریم $x * z \leq x * y$ و بنا به VI داریم $x * y = o$، بنابراین خواهیم داشت $x * z = o$ و با توجه به VI، $x \leq z$.■

قضیه ۵.۱.۱. اگر X یک جبر BCK باشد، آنگاه:

$$(x * y) * z = (x * z) * y \quad , \quad \forall x, y, z \in X \cdot \qquad (۹)$$

اثبات. بر طبق I و قضیه a.۴.۱.۱ داریم،

$$u * (z * y) \leq u * ((x * y) * (x * z)) \quad , \quad \forall u \in X \cdot \qquad (۱۰)$$

با قرار دادن $x * u$ بجای x و $x * z$ بجای z و $((x * u) * y) * (z * u)$ بجای u در رابطه بالا داریم:

$$[((x * u) * y) * (z * u)] * ((x * z) * y)$$

$$\leq [((x * u) * y) * (z * u)] * [((x * u) * y) \ * ((x * u) * (x * z))]$$

اگر فرض کنیم $(x * u) * y$ نقش u و u نقش y را در (۱۰) داشته باشد آنگاه طرف دوم نامساوی فوق صفر می‌شود. و بنابراین طبق IV طرف اول نامساوی صفر خواهد بود، یعنی،

$$[((x * u) * y) * (z * u)] * ((x * z) * y) = ۰$$

حال از VI نتیجه می‌شود که،

$$((x * u) * y) * (z * u) \leq (x * z) * y \qquad (۱۱)$$

چون u دلخواه بود می‌توانیم به جای u در (۱۱)، z بگذاریم، همچنین (۱۱) برای هر zای، از جمله $z = x * y$ برقرار است، لذا داریم،

$$((x * z) * y) * ((x * y) * z) \leq (x * (x * y)) * y$$

طرف دوم نامساوی فوق طبق II و VI، صفر می‌شود، لذا طبق IV داریم،

$$((x * z) * y) * ((x * y) * z) = \circ$$

حال بنا به VI داریم،

$$(x * z) * y \leq (x * y) * z$$

چون نامساوی اخیر در ازای هر x و y و zای متعلق به X، برقرار می‌باشد، لذا با دادن نقش z به y و برعکس یعنی نقش y به z خواهیم داشت:

$$(x * z) * z \leq (x * z) * y$$

و این حکم را نتیجه می‌دهد.■

قضیه ۱.۱.۶. فرض کنید X یک جبر BCK باشد، آنگاه:

$a)\ x * y \leq z \Longrightarrow x * z \leq y \quad , \quad \forall x, y, z \in X \cdot$

$b)\ x \leq y \Longrightarrow x * z \leq y * z \quad , \quad \forall x, y, z \in X \cdot$

$c)\ x * y \leq x \quad , \quad \forall x, y \in X \cdot$

$d)\ x * o = x \quad , \quad \forall x \in X \cdot$

اثبات. (a) فرض کنیم $x * y \leq z$، بنا به VI خواهیم داشت $(x * y) * z = o$ و بنا به قضیه ۱.۱.۵ داریم، $(x * z) * y = o$، لذا بنا به (VI) $x * z \leq y$.

(b) فرض کنیم $x \leq y$. بنا به قضیه ۱.۱.۴.a داریم، $z * y \leq z * x$.

مجدداً فرض می‌کنیم $x \leq y$، لذا بنا به (VI) $x * y = o$. پس بنا به I داریم،

$$(x * z) * (x * y) \leq y * z$$

$$\Longrightarrow (x * z) * (y * z) \leq x * y \quad \text{(a).۶.۱.۱ بنا به قضیه}$$

$$\Longrightarrow (x * z) * (y * z) = o \quad \text{IV,I بنا به}$$

لذا بنا به (VI)، $x * z \leq y * z$.

(c) به ازای هر $x, y \in X$، بنا به IV و III داریم، $o \leq y$ و $x \leq x$. لذا طبق VI داریم $x * x = o$. در نتیجه $x * x \leq y$. بنا به قضیه ۱.۱.۶.(a) $x * y \leq x$.

(d) چون $x * x \leq o$، لذا بنا به قضیه ۱.۱.۶.a داریم، $x * o \leq x$ و همچنین

$$x * (x * o) \leq o \quad \text{II بنا به}$$

بنابر این طبق IV $x * (x * o) = o$ در نتیجه بنا به VI $x \leq x * o$. بنابراین $x * o = x$.■

تعریف ۱.۱.۷. فرض کنیم $(X, *, o)$ یک جبر BCK باشد. عمل دوتایی $\wedge$ را روی X به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \wedge y = y * (y * x) \quad , \quad \forall x, y \in X.$$

بر طبق این تعریف، از II، نتیجه می‌گیریم $x \wedge y = y * (y * x) \leq x$. علاوه بر این، بنا به قضیه ۱.۱.۶.a، از $o = y * y \leq y * x$ نتیجه می‌شود که $y * (y * x) \leq y$. لذا $x \wedge y \leq y$. بنابراین $x \wedge y$ یک کران پایین برای $\{x, y\}$ است.

لم ۱.۱.۸. فرض کنیم X یک جبر BCK باشد. آنگاه

$$a) \quad x \wedge x = x \quad , \quad \forall x \in X.$$

$b)\ \ o \wedge x = x \wedge o = o\ \ ,\ \ \forall x \in X\cdot$

اثبات. (a) از تعریف ۷.۱.۱ نتیجه می‌شود که $x \wedge x = x * (x * x)$، و بر طبق III و VI داریم:

$$x \wedge x = x * o = x \quad \text{d.۶.۱.۱ بنا به}$$

برای اثبات قسمت (b)، بنا به تعریف ۷.۱.۱ و IV داریم $x \wedge o = o * (o * x) = (x * o) * o = o$. همچنین بنا به قضیه d.۶.۱.۱ و VI داریم $x \wedge o = x * (x * o) = o$.■

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $(X, *)$ یک جبر BCK باشد. اگر به ازای هر دو عضو x و y از X داشته باشیم: $x \wedge y = y \wedge x$، آنگاه X را جبر BCK جابجایی می‌نامیم.

بنابراین یک جبر BCK جابجایی عبارت است از یک جبر BCK، همراه با شرط زیر:

$$x * (x * y) = y * (y * x)\ \ ,\ \ \forall x, y \in X\cdot$$

یادآوری: سیستم $(s, \leq, o)$ را نیم مشبکه نامیم هرگاه $(s, \leq)$ یک مجموعه بطور جزئی مرتب بوده و عمل دوتائی o خواص خودتوانی-جابجایی و شرکت‌پذیری را داشته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. یک جبر BCK جابجایی است اگر و فقط اگر نسبت به عمل $\wedge$ نیم مشبکه باشد.

اثبات. اگر جبر BCK نسبت به عمل $\wedge$ نیم مشبکه باشد در این صورت عمل $\wedge$ جابجایی بوده و بنابراین طبق تعریف، جبر BCK جابجایی است.

برعکس. اگر جبر BCK، جابجایی باشد در اینصورت به ازای هر $x, y \in X$، $x \wedge y = y \wedge x$.

همچنین طبق لم ۸.۱.۱ داریم $x \wedge x = x$. پس عمل $\wedge$ خودتوان و جابجایی است. برای نیم مشبکه بودن، کافی است شرکت‌پذیری عمل $\wedge$ را بررسی نمائیم:

فرض می‌کنیم $x \leq y$، آنگاه بنا به (VI)، $x * y = o$ و بنا به قضیه d.۶.۱.۱ $x * o = x$ پس داریم:

$$x = x * o = x * (x * y) = y \wedge x = x \wedge y \ \text{(جابجایی)} \qquad (۱۲)$$