وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

ایده‌آل پرمننت یک ماتریس هنکل

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

ذبیح اله فلاح

استاد راهنما: دکتررشید زارع نهندی

شهریور ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر، مادر، همسر و فرزندم

قدردانی و تشکر

در اینجا لازم است از دکتر رشید زارع نهندی به خاطر راهنماهی‌های گرانقدرشان کمال تشکر را داشته باشم . من به عنوان یک دانشجو علاوه بر کسب علم، از محضر ایشان درس اخلاق و انسانیّت آموختم. از پدر و مادر و همسرم نیز که همواره پشت و پناهم هستند، صمیمانه تشکر می‌کنم . همچنین از آقایان دکتر منوچهر ذاکر ریاست دانشکده ریاضی، دکتر بهروز میرزایی و دکتر مسعود آرین نژاد به خاطر قبول زحمت داوری این پایان‌نامه قدردانی می‌کنم.

چکیده

برای بررسی یک ایده‌ال حلقه چندجمله‌ای‌ها معمولا می‌توان پایه گربنر، تجزیه اولیه و ایده‌ال‌های اول وابسته به آن را به دست آورد. به ویژه در سال‌های اخیر و با پیشرفت جبر جابه‌جایی محاسباتی، یافتن موارد بالا از اهمیت خاصی برخوردار شده است.

ایده‌آل پرمننت‌های یک ماتریس اولین بار توسط سوانسون، گوریری و گرکو در [3] بررسی شده است که در آن برای ایده‌آل پرمننت‌های 2×2 یک ماتریس هنکل، پایه گربنر و تجزیه اولیه مینیمال پیدا کرده‌اند. سپس گوریری و گرکو در [4] ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل پرمننت‌های 3×3 یک ماتریس هنکل را محاسبه نموده‌اند. هدف این پایان نامه بررسی این دو مقاله بوده است و برای این کار در فصل اول مقدمات و تعاریف اولیه مورد نیاز جمع‌آوری و ارایه می‌شود.

فصل دوم پایان‌نامه به پایه‌های گربنر ایده‌آل پرمننت‌های 2×2 ماتریس هنکل اختصاص دارد و فصل سوم، تجزیه اولیه و ایده‌آل‌های اول وابسته به آن را مورد بررسی قرار می‌دهد. این دو فصل از منبع [3] گرفته شده است. فصل آخر هم به ایده‌آل پرمننت‌های 3×3 یک ماتریس هنکل پرداخته و ایده‌آل‌های اول مینیمال آن را محاسبه می‌کند. فصل آخر از منبع [4] آورده شده است.

فهرست

مقدمه

پرمننت یک ماتریس مربع مشابه دترمینان آن تعریف می‌شود و فقط همهٔ علامت‌های به کار رفته در بسط دترمینان، مثبت فرض می‌شوند. پرمننت ماتریس یکی از توابع مهمی است که روی یک ماتریس عمل می‌کند. برای این تابع برخلاف تابع دترمینان که خواص هندسی و جبری فراوانی دارد، خاصیت‌های هندسی و جبری چندانی پیدا نشده است. البته پرمننت یک ماتریس در برخی علوم دیگر به ویژه نظریه گراف‌ها و شیمی اهمیت زیادی دارد. از جمله تعداد تطابق‌های کامل یک گراف ساده دو بخشی برابر پرمننت ماتریس مجاورت دو بخشی آن گراف می‌باشد. تعداد تطابق‌های کامل یک گراف نیز به نوبه خود کاربردهای فراوانی دارد[۱].
برخلاف دترمینان یک ماتریس که محاسبه آن با کامپیوتر توسط الگوریتم‌های با زمان سریع و چندجمله‌ای انجام می‌شود، محاسبه پرمننت یک ماتریس الگوریتم سریعی در حال حاضر ندارد و جز مسایل بسیار سخت در نظریه الگوریتم‌ها به شمار می‌رود.
ماتریس‌های هنکل که به نام هرمان هنکل[۲] ریاضیدان آلمانی قرن نوزدهم میلادی نامگذاری شده، از مهمترین ماتریس‌های جبر خطی می‌باشند که دارای کاربردهای فراوان در زمینه‌های مختلف علوم می‌باشند.
در جبر جابه‌جایی، برای بررسی یک ایده‌آل از حلقه چندجمله‌ای‌ها، معمولاً پایه گربنر، تجزیه اولیه و ایده‌آل های اول وابسته به آن را به دست می‌آورند. ایده‌آل دترمینان زیرماتریس‌های یک ماتریس با درایه‌های در حلقه جابه‌جایی R و به ویژه حلقه چندجمله‌ای‌ها، مورد بررسی‌های فراوانی قرار گرفته است و در این زمینه مقالات و کتاب‌های زیادی به رشته تحریر درآمده که به عنوان نمونه می‌توان به [20] مراجعه کرد.
هر چند پرمننت یک ماتریس کاربردهای جالبی دارد ولی ایده‌آل تولید شده توسط پرمننت زیرماتریس‌های یک ماتریس با درایه‌های در یک حلقه که به آن ایده‌آل پرمننت‌های ماتریس گوییم تاکنون مورد بررسی زیادی قرار نگرفته است. شاید دلیل این کار عدم وجود ابزارهای مناسب برای محاسبه پرمننت باشد. مثلاً مقدار پرمننت یک ماتریس با انجام عملیات سطری و ستونی مقدماتی تغییر می‌کند. ایده‌آل پرمننت‌های یک ماتریس اولین بار

[۱] مثلاً فرض کنید یک مولکول با تعدادی اتم کربن تشکیل شده است. هر اتم کربن با دو اتم کربن دیگر پیوند یگانه و با یک اتم کربن پیوند دوگانه می‌تواند داشته باشد. در گرافی که رأس‌های آن اتم های کربن‌ها و یال‌های آن پیوندهای بین آنها باشد، یک تطابق کامل، نشان دهنده پیوندهای دوگانه است. تعداد تطابق‌های کل چنین گرافی برابر تعداد ایزومرهای مولکول متناضر است. این مسأله در سال‌های اخیر با کشف مولکول‌های فولرن (Fulleren) اهمیت فوق العاده‌ای پیدا کرده است

[۲] Hermann Hankel

توسط سوانسون [۳]، گوریری [۴] و گرکو [۵] در [3] بررسی شده است که در آن برای ایده‌آل پرمننت‌های 2×2 یک ماتریس هنکل، پایه گربنر و تجزیه اولیه مینیمال پیدا کرده‌اند. سپس گوریری و گرکو در [4] ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل پرمننت‌های 3×3 یک ماتریس هنکل را محاسبه نموده‌اند.

دراین پایان نامه مقاله‌های فوق مورد مطالعه دقیق قرار گرفته و به طور مشروح ارایه می‌شوند. فصل اول پایان نامه به تعاریف و قضایایی از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای، پایه‌های گربنر، تجزیه اولیه و ایده‌آل‌های اول وابسته اختصاص دارد. در فصل دوم ایده‌آل پرمننت‌های یک ماتریس هنکل مورد بررسی قرار گرفته و پایه گربنری برای ایده‌آل پرمننت‌های 2×2 چنین ماتریسی با ترتیب قاموسی محاسبه شده است. فصل سوم به تجزیه اولیه و ایده‌آل‌های اول وابسته به ایده‌آل پرمننت‌های 2×2 ماتریس هنکل پرداخته و این موارد را ارایه می‌دهد.این دو فصل از [3] گرفته شده است. در فصل چهارم ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل پرمننت‌های 3×3 یک ماتریس هنکل به صورت کامل محاسبه و ارایه می‌شود. این فصل از [4] آورده شده است.

---

[۳] Irena Swanson

[۴] Anna Guerrieri

[۵] Elena Grieco

فصل اول

پیش نیازها

این فصل شامل معرفی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای و پایه گربنر و تجزیه اولیه ایده‌آل تک جمله‌ای‌هاست. مطالب این فصل از[3]، [10] و [13] آورده شده است.

۱.۱ تک جمله‌ای‌ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید K یک میدان و $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چند جمله‌ای‌های n متغیره روی K باشد، در این صورت اعضای به صورت $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ که $a_i \in \mathbb{Z}_+$ را تک جمله ای گویند. منظور از $\mathbb{Z}_+$ مجموعه اعداد صحیح نامنفی است. مجموعه همه تک جمله ای های در S را با $Mon(S)$ نشان می‌دهند.

$$Mon(S) := \{{x_1}^{a_1} \cdots {x_n}^{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

واضح است که هر چند جمله‌ای در S به صورت یگانه به یک ترکیب خطی از اعضای $Mon(S)$ تجزیه می‌شود.

$$f \in S \ \Rightarrow f = \sum C_\alpha X^\alpha \qquad (۱)$$

که در آن $X^\alpha = {x_1}^{a_1} \cdots {x_n}^{a_n}$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $C_\alpha \in K$ و در این سری حداکثر تعداد متناهی C_α غیر صفر است.

توجه: $Mon(S)$ یک پایه برای فضای برداری S روی K است.

تعریف ۲.۱.۱ برای $f \in S$ ، محمل f یا $Supp(f)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$Supp(f) := \{X^\alpha \in Mon(S) : C_\alpha \neq 0\}$$

به عبارت دیگر مجموعه تک جمله‌ای‌هایی که ضریبشان در f صفر نیست.

۲.۱ ایده‌آل تک جمله‌ای

در این بخش به مطالعه دسته خاصی از ایده‌آل‌های حلقه S به عنوان ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ ایده‌آل I از S را ایده‌آل تک جمله‌ای گوییم اگر یک مجموعهٔ مولد داشته باشد که اعضای آن تک جمله‌ای هستند.

قضیه ۲.۲.۱ مجموعه N شامل همه تک جمله ای ها در ایده‌آل تک جمله‌ای I یک پایه برای K ـفضای برداری I است .

برهان. اعضای N مستقل خطی هستند زیرا اگر $u_1,\dots,u_s\in N$ و $u_i\neq u_j$ برای $i\neq j$ و $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in K$ آنگاه اگر $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_su_s=0$ در نتیجه $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=0$.

حال فرض کنیم $f\in I$ چون I ایده‌آل تک جمله‌ای است پس تک جمله‌ای‌های $u_1,...,u_m$ در I وجود دارند به طوری که $f=\sum_{i=1}^m h_iu_i$ که $h_i\in S$

$$Supp\ (f)\subseteq Supp\ (\sum_{i=1}^m h_iu_i)\subseteq\bigcup_{i=1}^m Supp\ (h_iu_i)=\bigcup_{i=1}^m Supp\ (h_i)u_i$$

اگر $v\in Supp(h_i)u_i$ در این صورت $v=wu_i$ که $w\in Mon(S)$ و چون I ایده‌آل است پس $v\in I$. در نتیجه برای هر i ، $Supp(h_i)u_i\subseteq N$ و در نتیجه $Supp(f)\subseteq N$. □

گزاره ۳.۲.۱ برای ایده‌آل $I\subseteq S$ شرایط زیر معادلند:

۱) I یک ایده‌آل تک جمله ای است .

۲) به ازای هر $f\in S$ ، f در I قرار دارد اگر و تنها اگر هر عضو $Supp(f)$ در I باشد.

برهان. (۲ $\Rightarrow$ ۱) بنا به قضیه قبل .

(۱ $\Rightarrow$ ۲) فرض کنیم $f_1,\dots,f_m$ مولدهای I باشند . در این صورت برای هر I ، $Supp(f_i)$ در I قرار دارد. پس $\bigcup_{i=1}^m Supp(f_i)$ یک مجموعه مولد تک جمله‌ای برای I است . □

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید I ایده‌آلی تک جمله‌ای باشد و G یک مجموعه مولد از تک جمله‌ای‌ها برای I باشد به طوری که هیچ عضوی از آن را نتوان حذف کرد. یا به عبارتی هیچ عضوی از G توسط عضو دیگری از G عاد نشود. در این صورت G را یک مولد مینیمال برای I گویند و آن را با $G(I)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۵.۲.۱ مولد مینیمال برای هرایده‌آل تک جمله‌ای I وجود دارد و یگانه است .

برهان. فرض کنیم $G_2 = \{u_1, \ldots, u_s\}$ و $G_1 = \{v_1, \ldots, v_t\}$ دو مجموعهٔ مولد مینیمال از تک جمله‌ای ها برای I باشند، به ازای هر $1 \leq i \leq s$ ، u_i در I قرار دارد. پس v_j در G_1 و w_j در $Mon(S)$ هستند که $u_i = w_j v_j$. از طرفی v_j در I است و در نتیجه u_k در G_2 و w_k در $Mon(S)$ هستندبه طوری که:

$$v_j = w_k u_k \Rightarrow u_i = w_j w_k u_k$$

و چون مولد مینیمال است $k = i$ و $w_j w_k = w_k w_j = 1$ پس برای هر $1 \leq i \leq s$ ، وجود دارد $1 \leq j \leq s$ به طوری که $u_i = v_j \in G_1$ پس $G_2 \subseteq G_1$. به طور مشابه ثابت می شود که $G_1 \subseteq G_2$ و در نتیجه $G_1 = G_2$. $\square$

گزاره ۶.۲.۱ فرض کنید I و J دو ایده آل تک جمله‌ای باشند. در این صورت $I \cap J$ ایده آلی تک جمله‌ای است و مجموعه $\{lcm(u, v) : v \in G(I), u \in G(J)\}$ مولد این ایده آل است. منظور از $lcm(u, v)$، کوچکترین مضرب مشترک u و v می باشد.

برهان. فرض کنیم $f \in I \cap J$ باشد. در این صورت $Supp(f) \subseteq I \cap J$ زیرا I و J هر دو ایده آل های تک جمله‌ای هستند در نتیجه $I \cap J$ ایده آلی تک جمله‌ای است. گیریم $w \in Supp(f)$ ، چون $Supp(f) \subseteq I \cap J$ در نتیجه $u \in G(I)$ و $v \in G(J)$ وجود دارد به طوری که $u \mid w$ و $v \mid w$، پس در نتیجه $lcm(u, v) \mid w$. حال چون برای هر $u \in G(I)$ و $v \in G(J)$ ، $lcm(u, v) \in I \cap J$ در نتیحه مجموعه $\{lcm(u, v) : u \in G(v), v \in G(J)\}$ مولد ایده آل $I \cap J$ است . $\square$

تعریف ۷.۲.۱ برای دو ایده آل I, J از حلقه R، I تقسیم بر J را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I : J = \{f \in S \mid fg \in I \ for \ all \ g \in J\}$$

$I : J$ یک ایده آل حلقه R است.

گزاره ۸.۲.۱ فرض کنید I و J دو ایده‌آل تک جمله‌ای باشند. در این صورت $I : J$ ایده‌آل تک جمله‌ای است و $I : J = \bigcap_{v \in G(J)} I : (v)$ و همچنین مجموعه$\{u/gcd(u,v) : u \in G(I)\}$ مولد $I : (v)$ است. $gcd(u,v)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک u و v است.

برهان. گیریم $f \in I : J$ پس برای هر $v \in G(J)$، $fv \in I$ و چون I ایده‌آلی تک جمله ای است، $Supp(f)v = Supp(fv) \subseteq I$ و در نتیجه $Supp(f) \subseteq I : J$ و بنا به ۳.۲.۱، $I : J$ ایده‌آلی تک‌جمله‌ای است. قسمت دوم گزاره بنا به تعریف $I : J$ بدیهی است و برای اثبات قسمت آخر داریم $\{u/gcd(u,v) : u \in G(I)\} \subseteq I : (v)$ از طرف دیگرفرض کنیم $w \in I : (v)$ در این صورت وجود دارد $u \in G(I)$ به قسمی که $wv = u$ در نتیجه $u/gcd(u,v) \mid w$. □

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید I یک ایده‌آل در حلقهٔ R باشد. در این صورت رادیکال I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \;:\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; s.t \;\; x^n \in I\}$$

قضیه ۱۰.۲.۱ در حلقه نوتری R، برای هر ایده‌آل I و هر عضو $x \notin \sqrt{I}$، عدد طبیعی n وجود دارد به قسمی که:

$$(I : x^n) = (I : x^{n+1})$$

و در نتیجه

$$I = (I : x^n) \cap (I + (x^n))$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $a \in (I : \langle x^t \rangle)$ که t یک عدد طبیعی است . در این صورت

$$ax^t \in I \Rightarrow xax^t \in I \Rightarrow ax^{t+1} \in I$$

ودر نتیجه $a \in (I : \langle x^{t+1} \rangle$. پس زنجیر صعودی از ایده آل های زیر را داریم :

$$(I : \langle x \rangle) \subseteq (I : \langle x^2 \rangle) \subseteq \ldots \subseteq (I : \langle x^n \rangle) \subseteq (I : \langle x^{n+1} \rangle) \subseteq \ldots$$

و چون در حلقه‌های نوتری هر زنجیر افزایشی از ایده آل‌ها ایستا است پس وجود دارد یک $n \in \mathbb{N}$ به طوری که $(I : \langle x^n \rangle) = (I : \langle x^{n+1} \rangle) = \ldots$. برای اثبات قسمت بعد واضح است که

$$I \subseteq (I : \langle x^n \rangle) \cap (I + \langle x^n \rangle)$$

پس فرض کنیم $a \in (I : \langle x^n \rangle) \cap (I + \langle x^n \rangle)$ در این صورت $ax^n \in I$ و همچنین $a = r + sx^n$ که $r \in I$.

$$ax^n \in I, a = r + sx^n \Rightarrow (r + sx^n)x^n \in I \Rightarrow rx^n + sx^{2n} \in I \Rightarrow sx^{2n} \in I$$

پس $s \in (I : \langle x^{2n} \rangle) = (I : \langle x^n \rangle)$. در نتیجه $sx^n \in I$ و چون $a = r + sx^n$ پس $a \in I$. □

گزاره ۱۱.۲.۱ اگر $I \subseteq S$ ایده آل تک جمله ای باشد، $\sqrt{I}$ نیز یک ایده آل تک جمله‌ای است.

برهان. ثابت می کنیم که اگر $G(I) = \{u_1, \ldots, u_s\}$ آنگاه $G(\sqrt{I}) = \{\sqrt{u_1}, \ldots, \sqrt{u_s}\}$ که در آن $\sqrt{u_i}$ به این صورت تعریف می شود :

$$u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \Rightarrow \sqrt{u} = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \ , \ c_i = 1 \ if \ a_i > 0 \ , c_i = 0 \ if \ a_i = 0$$

فرض کنیم $f \in \sqrt{I}$ در نتیجه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f^n \in I$. چون I ایده آل تک جمله ای است $Supp(f^n) \subseteq I$.

$$Supp(f) = \{f_1, \ldots, f_t\} \Rightarrow \{f_i^n, \ldots, f_t^n\} \subseteq Supp(f^n) \subseteq I \Rightarrow \{f_1, \ldots, f_t\} \subseteq \sqrt{I}$$

در نتیجه بنابر ۳.۲.۱، $\sqrt{I}$ یک ایده‌آل تک جمله‌ای است.

$\square$

۳.۱ ترتیب تک جمله‌ای

تعریف ۱.۳.۱ رابطه $\leq$ روی مجموعهٔ A یک ترتیب جزیی است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x \in A$ ، $x \leq x$،

۲) برای هر $x, y \in A$ اگر $x \leq y, y \leq x$ آنگاه $x = y$،

۳) اگر $x \leq y, y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.

ترتیب جزیی روی A را ترتیب کلی گوییم اگرهر دو عضو A را بتوان با یکدیگر مقایسه کرد.

تعریف ۲.۳.۱ در مجموعه $Mon(S)$ یک ترتیب کلی مانند $\leq$ را یک ترتیب تک جمله‌ای گوییم اگر:

۱) برای هر $u \in Mon(S)$ ، $1 \leq u$،

۲) اگر $u \leq v$ آنگاه به ازای هر $w \in Mon(S)$ داریم $uw \leq vw$.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید $x^\alpha \in Mon(S)$ که در آن $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. درجه کلی x^α را به صورت $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ تعریف و با $\deg(x^\alpha)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۴.۳.۱ ترتیب قاموسی [1]: فرض کنید $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$، $x^\beta = x_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n}$ تعریف می‌کنیم:

$$x^\alpha <_{\text{lex}} x^\beta \leftrightarrow \exists i \ s.t \ 1 \leq i \leq n, \ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i < \beta_i$$

یا به‌عبارت دیگر اولین درایه ناصفر از سمت چپ در بردار $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ منفی باشد.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در میدان K و $\leq$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\text{Mon}(S)$ باشد. به ازای هر چندجمله‌ای $f \in S$، جملهٔ پیشرو f که با $\text{in}_\leq(f)$ نشان داده می‌شود، برابر بزرگ‌ترین جمله در محمل f نسبت به ترتیب $\leq$ می‌باشد.
فرض کنید I یک ایده‌آل دلخواه S باشد. ایده‌آل پیشرو I را به این صورت تعریف می‌کنیم: $\text{in}_\leq(I) = \langle \text{in}_\leq(f) \ : \ f \in I \rangle$. واضح است که ایده‌آل پیشرو یک ایده‌آل تک جمله‌ای است.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید M یک زیر مجموعهٔ ناتهی از $Mon(S)$ باشد . تک جمله‌ای u از M یک عضو کمینه [2] گفته می شود اگر با ترتیب جزیی عاد کردن عضوی اکیداً کوچکتر از آن در M وجود نداشته باشد یا به عبارتی دیگر اگر $v \in M$ و $u \mid v$ آنگاه $u = v$.

لم ۷.۳.۱ (لم دیکسون) [3]: هر زیر مجموعه ناتهی از $Mon(S)$ مانند M، تعدادی متناهی عضو کمینه دارد.

برهان. منبع [13] قضیه 2.1.1. □

[1] lexicographic
[2] minimal
[3] Dikson's lemma

۴.۱ پایه های گربنر

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $(\leq)$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $Mon(s)$ و I یک ایده‌آل از S باشد. مجموعه مولد $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ برای I را یک پایهٔ گربنر نسبت به ترتیب $\leq$ گویند اگر
$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_n) \rangle$.

نکته.پایه گربنر یک ایده‌آل لزوماً یگانه نیست.

مثال ۲.۴.۱ فرض کنید $S = K[x_1, \ldots, x_7]$ و $\leq$ ترتیب قاموسی روی $Mon(S)$ باشد. همچنین فرض کنید $f = x_1x_4 - x_2x_3$ و $g = x_4x_7 - x_5x_6$. اگر $I = \langle f, g \rangle$ در این صورت $\{f, g\}$ یک پایه گربنر برای این ایده‌آل نیست.

برهان. چون $\mathrm{in}_{\leq}(f) = x_1x_4$ و $\mathrm{in}_{\leq}(g) = x_4x_7$. حال اگر $h = x_7f - x_1g = x_1x_5x_6 - x_2x_3x_7 \in I$. ولی $\mathrm{in}_{\leq}(h) = x_1x_5x_6$ که در ایده‌آل تولید شده توسط $\mathrm{in}_{\leq}(f)$ و $\mathrm{in}_{\leq}(g)$ قرار ندارد چون توسط هیچ کدام از این تک‌جمله‌ای‌ها عاد نمی‌شود. پس $\mathrm{in}_{\leq}(I) \neq \langle \mathrm{in}_{\leq}(f), \mathrm{in}_{\leq}(g) \rangle$.

با استفاده از الگوریتم بوخبرگر که در ادامه خواهد آمد به راحتی ثابت می‌شود که $\{f, g, h\}$ یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب مورد نظر است. $\square$

در حلقه چندجمله‌ای‌های با یک متغیر یعنی $K[x]$، الگوریتم تقسیم را داریم. به عنوان تعمیمی از این الگوریتم برای چندجمله‌ای‌های چندمتغیره، الگوریتم زیر معرفی می‌شود. این الگوریتم به ترتیب داده شده روی تک‌جمله‌ای‌ها و همچنین ترتیب قرار گرفتن اعضای G معرفی شده در زیر بستگی دارد و با تغییر هر کدام، نتیجه ممکن است تغییر پیدا کند.

قضیه ۳.۴.۱ (الگوریتم تقسیم) فرض کنید $S = K[x_1, ..., x_n]$ و یک ترتیب تک‌جمله‌ای $\leq$ داده شده و $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های غیر صفر در S باشد. آنگاه به ازای هر چندجمله‌ای

دلخواه $0 \neq f \in S$، چندجمله‌ای‌های $f^{'}, f_1, \dots, f_n \in S$ وجود دارند که:

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n + f^{'}$$

به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد:

۱) اگر $f^{'} \neq 0$ و اگر $u \in \mathrm{supp}(f^{'})$، آنگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $u \nmid \mathrm{in}_{\leq}(g_i)$.

۲) اگر $f_i \neq 0$، آنگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\mathrm{in}_{\leq}(f) \geq \mathrm{in}_{\leq}(f_i g_i)$.

برهان. منبع [10] قضیه 2.2.1. □

تعریف ۴.۴.۱ $f^{'}$ با این شرایط را باقیمانده تقسیم f بر $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ یا چندجمله‌ای تحویل یافته[۴] f نسبت به G گویند و آن را با نماد $f \longrightarrow_G f^{'}$ نشان می‌دهند. تجزیه بالا را یک تجزیه استاندارد برای f نسبت به پایه مورد نظر تحت ترتیب $\leq$ گویند .

قضیه ۵.۴.۱ اگر $\{g_1, \dots, g_s\}$ یک پایه گربنر برای ایده‌آل I باشد در این صورت چند جمله ای نا صفر f در I قرار دارد اگر و تنها اگر باقیمانده f نسبت به تجزیه استاندارد f برابر صفر باشد .

برهان. اگر باقیمانده f نسبت به $g_1, \dots, g_s$ صفر باشد یعنی $f = h_1 g_1 + \cdots + h_s g_s$ آنگاه $f \in I$.

برعکس: فرض کنید $f \in I$ اگر یک تجزیه استاندارد f به $g_1, \dots, g_s$ موجود باشد که $f = h_1 g_1 + \cdots + h_s g_s + f'$ در این صورت $f - f' \in I$ و در نتیجه وجود دارد i به طوری که $\mathrm{in}_{\leq}(g_i) \mid \mathrm{in}_{\leq}(f')$ که با خاصیت استاندارد بودن تجزیه متناقض است و بنابراین $\mathrm{in}_{\leq}(f')$ وجود ندارد یعنی $f' = 0$. □

قضیه ۶.۴.۱ به ازای هر ایده‌آل I و ترتیب تک جمله‌ای $\leq$، پایه گربنر وجود دارد.

---

[۴] reduce

برهان. منبع [10] نتیجه 2.1.9. $\square$

۱.۴.۱ پایه گربنر تحویل یافته

تعریف ۷.۴.۱ پایه گربنر $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ یک پایه گربنر تحویل‌یافته برای ایده آل I نامیده می‌شود هر گاه:

۱) ضریب $\mathrm{in}_{\leq}(g_i)$ در g_i، یک باشد،

۲) $\forall u \in \mathrm{Supp}(g_i)$ و $i \neq j$ داشته باشیم $u \nmid \mathrm{in}_{\leq}(g_j)$.

قضیه ۸.۴.۱ برای هر ایده آل مانند I ، پایه گربنر تحویل یافته وجود دارد و یگانه است .

برهان. فرض کنیم $\{g_1, \dots, g_s\}$ یک پایه گربنر برای I باشد . می توان فرض کرد $\{\mathrm{in}_{\leq}(g_1), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s)\}$ یک مجموعه مولد مینیمال برای $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ است.(چون $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ یک ایده آل تک جمله ای است و طبق ۵.۲.۱ مولد مینیمال برای ایده آل تک جمله ای وجود دارد و یگانه است). با ضرب هر کدام از g_i ها در وارون ضریب پیشروشان می توان ضریب پیشرو هر g_i را برابر ۱ قرار داد. فرض کنید g'_1 باقیمانده g_1 در تجزیه استاندارد g_1 نسبت به $g_2, \dots, g_s$ باشد . یعنی $g_1 = h_2g_2 + \dots + h_sg_s + g'_1$. چون $\mathrm{in}_{\leq}(g_1)$ توسط هیچ کدام از $\mathrm{in}_{\leq}(g_2), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s)$ عاد نمی شود پس $\mathrm{in}_{\leq}(g_1) = \mathrm{in}_{\leq}(g'_1)$. از طرف دیگر هیچ کدام از جملات g'_1 توسط $\mathrm{in}_{\leq}(g_2), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s)$ عاد نمی شود. پس $\{g'_1, g_2, \dots, g_s\}$ یک پایه گربنر است . با ادامه این روند مجموعه $\{g'_1, \dots, g'_s\}$ به دست می آید که شرایط تعریف پایه گربنر تحویل یافته را دارد.

برهان یکتایی: فرض کنید $\{g_1, \dots, g_s\}$ و $\{h_1, \dots, h_s\}$ دو پایه گربنر تحویل یافته برای ایده آل I باشد. پس $\langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s)\rangle = \langle \mathrm{in}_{\leq}(h_1), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(h_t)\rangle$ چون هر دو مولد مینیمال برای $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ هستند پس $s = t$.
حال فرض کنیم با تغییر اندیس $\mathrm{in}_{\leq}(g_1) = \mathrm{in}_{\leq}(h_1), \dots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s) = \mathrm{in}_{\leq}(h_s)$ و فرض کنیم $g_i \neq h_i$ در این