بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه

روش بسط توابع و درونیابی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل

نگارش

زینب عبدی

استاد راهنما

دکتر سهرابعلی یوسفی

استاد مشاور

دکتر فهیمه سلطانیان

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

دی ۱۳۸۹

صورت جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه دوره کارشناسی ارشد خانم زینب عبدی حسنعلی ده
دانشجوی رشته ریاضی به شماره دانشجویی ۸۷۰۰۰۱۰۸۷

تحت عنوان:

"روش بسط توابع و درونیابی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل"

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز سه شنبه مورخ: ۸۹/۱۰/۰۷ ساعت ۱۶-۱۵ در محل مجتمع علوم پایه و کشاورزی برگزار شد و پس از بررسی پایان نامه مذکور بانمره (بعدد) ۱۹/۱۰ (بحروف) نوزده و ده صدم و با درجه عالی مورد قبول واقع شد/نشد.

ردیف	هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	دانشگاه/موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر سهرابعلی یوسفی	~~استادیار~~ دانشیار	شهید بهشتی	
۲	استاد مشاور	دکتر فهیمه سلطانیان	استادیار	پیام نور	
۳	استاد داور	دکتر حسین آذری		شهید بهشتی	
۴	نماینده علمی گروه	دکتر خدیجه احمدی آملی	استادیار	پیام نور	

تهران، خیابان استاد نجات‌الهی، خیابان شهید فلاح‌پور، پلاک ۲۷
تلفن: ۸۸۸۰۰۲۵۲
دورنگار: ۸۸۳۱۹۴۷۵
www.tpnu.ac.ir
scienceagri@tpnu.ac.ir

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

در ابتدا لازم میدانم از جناب آقای دکتر یوسفی و سرکار خانمها دکتر سلطانیان و دکتر احمدی که در طول تدوین پایان‌نامه صمیمانه یاری‌ام نموده‌اند و همچنین از جناب آقای دکتر آذری که زحمت داوری آن را بعهده گرفته‌اند کمال تشکر را داشته باشم.

چکیده

در این پایان نامه روشهایی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل بیان می‌کنیم. ابتدا یک روش ماتریسی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی بوسیله چند جمله‌ای تیلور معرفی می‌کنیم. در این روش معادله انتگرال-دیفرانسیل به یک معادله ماتریسی که مطابق با دستگاه معادلات خطی است، تبدیل می-شود. سپس یک روش عددی برای حل یک دستگاه معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی معرفی می-کنیم. ایدهٔ اصلی در این روش استفاده از درونیابی توابع مجهول و انتگرالگیری عددی می‌باشد. در انتها چند مثال برای نشان دادن توانایی روشهای فوق ارائه می‌دهیم.

واژگان کلیدی: معادله انتگرال-دیفرانسیل، بسط تیلور، درونیابی لاگرانژ، انتگرالگیری عددی.

فهرست مطالب

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ میلادی توسط ولترا[۱] معرفی شد. ولترا در حال مطالعه رشد جمعیت و به خصوص تاثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد. این گونه معادلات در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی، بیولوژی، نجوم و...ظاهر می‌شوند که روشهای تحلیلی و عددی بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوعی باشد برای تعیین جواب آنها بکار برده می‌شود. گرین[۲] و کان‌ول[۳] روشهای تحلیلی مختلفی را برای معادلات انتگرال ارائه داده‌اند. حل تحلیلی در برخی مواقع مشکل خواهد بود بنابراین یک روش عددی مورد نیاز خواهد بود. روش تقریبات متوالی، تجزیه ادومیان[٤]، هم محلی چبیشف[٥] و تیلور[٦]، روش تاو[٧] چندین روش عددی هستند که در سالهای اخیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. امروزه استفاده از بسط توابع جهت حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. ویژگی اصلی این تکنیک آن است که این گونه معادلات را به سیستم‌هایی با معادلات خطی یا غیرخطی تبدیل می‌کند. برای این منظور سری قطع شده با ضرایب مجهول، را به عنوان تقریبی از جواب مساله درنظر گرفته و سپس با استفاده از نقاط مناسب، سیستم را به یک سیستم خطی یا غیرخطی تبدیل می‌کنیم. یکی از روشهای عددی دیگری که برای حل معادلات انتگرال وانتگرال-دیفرانسیل مطرح است استفاده از درونیابی و انتگرالگیری عددی می‌باشد. مقاله‌های متعددی از جمله [۱۲,۱۰] در این زمینه می‌توان یافت.
این پایان نامه، شامل چهار فصل می‌باشد، در فصل اول قضایا و تعاریفی که مورد نیاز در فصول بعدی می‌باشند بیان شده است، درفصل دوم انواع مختلفی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل و برخی از روشهای

[۱] Volterra
[۲] Green
[۳] Kanwal
[٤] Adomian
[٥] Chebyshev
[٦] Taylor
[٧] Tau

مرسوم برای حل آنها ذکر شده است، در فصل سوم با معرفی نوعی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل روش ماتریسی بسط تیلور را بیان می‌کنیم و در فصل چهارم یک روش عددی بر اساس درونیابی لاگرانژ[۱] و انتگرالگیری کلن‌شئو-کرتس[۲] برای حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم[۳] خطی بیان می‌کنیم. در این پایان نامه از مقالات متعددی استفاده شده است ولی مراجع اصلی [۱۵,۱٤,۹] می‌باشند. برای انجام محاسبات و رسم نمودارها از نرم افزار متمتیکا[٤] استفاده شده است.

---

[۱] Lagrange
[۲] Clenshaw-curtius
[۳] Fredholm
[٤] Mathematica

فصل اول

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی می‌پردازیم.

۱-۱ مفاهیم پایه‌ای درآنالیز حقیقی

تعریف. یک فضای برداری مجموعه‌ای است مانند V که عناصرش را بردار نامند و در آن دو عمل به نامهای جمع و ضرب اسکالر طوری تعریف شده‌اند، که از خواص جبری زیر بهره‌مند می‌باشند.

۱) به هر جفت بردار x, y بردار $x+y$ چنان نظیر شده است که: $x+y=y+x$،

۲) برای هر سه بردار x, y, z داریم: $x+(y+z)=(x+y)+z$،

۳) V شامل بردار منحصر به فرد صفر است به طوری که به ازای هر $x \in V$ داریم: $x+۰=x$،

۴) برای هر $x \in V$ بردار منحصر به فرد $-x$ چنان نظیر شده است که: $x+(-x)=۰$،

۵) برای هر جفت (α, x) و (β, y) که $x, y \in V$ و α, β، اسکالر می‌باشند بردار $\alpha x \in V$ چنان نظیراست که: $۱x=x$ و $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$،

۶) دو قانون بخشپذیری $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ و $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ برقرار می‌باشند.

تعریف. فضای خطی حقیقی X را یک فضای ضرب داخلی گوییم، هرگاه یک تابع حقیقی روی X که آنرا با نماد (,) نشان می‌دهیم چنان وجود داشته باشد که:

۱) $(x, y)=\overline{(y, x)}$،

۲) اگر $x, y, z \in X$ ، $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$،

۳) اگر $x, y \in X$ و α اسکالر باشد، $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$،

۴) به ازای هر $x \in X$ ، $(x, x) \geq ۰$،

۵) $(x, x)=۰$ اگر و فقط اگر $x=۰$.

مثال. فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی

$$\forall f,g \in L^2(a,b), \qquad (f,g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}dt.$$

یک فضای ضرب داخلی است.

$L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر نسبت به تابع وزن w روی $[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است.

$$\forall f,g \in L^2(a,b), \qquad (f,g)_w = \int_a^b w(t) f(t)\overline{g(t)}dt.$$

تعریف. توابع f و g از فضای برداری مفروض V را نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی فاصله $[a,b]$ متعامد گوییم هرگاه:

$$(f,g)\begin{cases} = 0 & f \neq g \\ > 0 & f = g \end{cases},$$

ومتعامد یکه می‌نامیم هرگاه:

$$(f_i,f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

تعریف. دنباله توابع $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد می‌نامیم هرگاه این توابع دوبه‌دو متعامد باشند

$$(f_m,f_n)\begin{cases} = 0 & m \neq n \\ > 0 & m = n \end{cases},$$

ومتعامد یکه می‌نامیم هرگاه:

$$(f_m,f_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}.$$

۱-۲ چندجمله‌ای تیلور

چندجمله‌ایها از ساده‌ترین توابعی هستند که در ریاضیات ظاهر می‌شوند. برای بدست آوردن چندجمله‌ای تیلور از یک تابع مانند $f(x)$ توجه داریم که انتگرال $(n+1)$-امین مشتق $f(x)$ یعنی f^{n+1} در یک نقطه مانند x_0 تا نقطه دلخواه x به صورت زیر بدست می‌آید: (با توجه به اینکه مشتق مرتبه $(n+1)$-ام f موجوداست)

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(x)dx = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0), \qquad (۱-۱)$$

$f^n(x_0)$، n-امین مشتق تابع $f(x)$ درنقطه x_0 است.

هرگاه از رابطه (۱-۱) در فاصله $[x_0,x]$ انتگرال بگیریم آنگاه:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(x)\,dx\,dx = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - (x-x_0)f^{(n)}(x_0), \qquad (۲-۱)$$

با تکرار انتگرالگیری از رابطه (۱-۲) در فاصله $[x_۰, x]$ داریم:

$$\int_{x_۰}^{x}\int_{x_۰}^{x}\int_{x_۰}^{x} f^{(n+۱)}(x)dx\,dx\,dx = f^{(n-۲)}(x) - f^{(n-۲)}(x_۰) - f^{(n-۱)}(x_۰)(x - x_۰) - \frac{(x-x_۰)^۲}{۲} f^{(n)}(x_۰),$$

اگر این انتگرالگیری را $(n+۱)$ بار تکرار کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{x_۰}^{x}\int_{x_۰}^{x}\dots\int_{x_۰}^{x} f^{(n+۱)}(x)(dx)^{n+۱} = f(x) - f(x_۰) - (x-x_۰)f^{(۱)}(x_۰) - \frac{(x-x_۰)^۲}{۲} f^{(۲)}(x_۰) - \dots - \frac{(x-x_۰)^n}{n!} f^{(n)}(x_۰),$$

در نتیجه:

$$f(x) = f(x_۰) + (x-x_۰)f^{(۱)}(x_۰) + \frac{(x-x_۰)^۲}{۲!} f^{(۲)}(x_۰) + \dots + \frac{(x-x_۰)^n}{n!} f^{(n)}(x_۰) + \int_{x_۰}^{x}\int_{x_۰}^{x}\dots\int_{x_۰}^{x} f^{(n+۱)}(x)(dx)^{n+۱}. \qquad (۱-۳)$$

دررابطه (۱-۳)،

$$f(x) = f(x_۰) + (x-x_۰)f^{(۱)}(x_۰) + \frac{(x-x_۰)^۲}{۲!} f^{(۲)}(x_۰) + \dots + \frac{(x-x_۰)^n}{n!} f^{(n)}(x_۰)$$

سری تیلور تابع $f(x)$، در نقطه $x_۰$، از درجه n و $R_n = \int_{x_۰}^{x}\int_{x_۰}^{x}\dots\int_{x_۰}^{x} f^{(n+۱)}(x)dx$ باقی‌مانده سری تیلور نامیده می‌شود.

برای توابع، بردار-مقدار از بردارها نیز سری تیلور و فرمولهای تیلور وجود دارد. برای یک تابع $f: R^۲ \to R$، آسان‌ترین شکل فرمول تیلور به صورت نمادی زیر است:

قضیه تیلور دومتغیره. اگر $f \epsilon C^{n+۱}([a,b]\times[c,d])$، آنگاه برای هر دو نقطه $x+h$ و $y+k$ در $[a,b]\times[c,d] \subseteq R^۲$، داریم:

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=۰}^{n} \frac{۱}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y) + E_n(h,k),$$

که درآن

$$E_n(h,k) = \frac{۱}{(n+۱)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+۱} f(x+\theta h, y+\theta k).$$

و θ عددی بین ۰ تا ۱ می‌باشد (چنی[۱]، ۱۳۸۱: ۲۵).

---
[۱] Cheny

۱-۳ فرمول کشی[۱]

قضیه لایب‌نیتز[۲]. هرگاه $F(x,t)$ ، $\frac{\partial F}{\partial t}$، $B'(x)$ و $A'(x)$ توابع پیوسته در نقاط x و t و روی بازه $[a,b]$ باشند آنگاه:

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\ dt + F[x,B(x)]\frac{dB}{dx} - F[x,A(x)]\frac{dA}{dx}.$$

برای استفاده از قضیه لایب‌نیتز تابع $\mathrm{I}_n(x)$ را به صورت

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\ dt, \qquad (۱-٤)$$

تعریف می‌کنیم.

در رابطه (۱-٤)، n یک مقدار صحیح مثبت و a ثابت مناسب می‌باشد، قرار می‌دهیم:

$$F(x,t) = (x-t)^{n-1} f(t),$$

با استفاده از قضیه لایب‌نیتز مشتق رابطه (۱-٤) را بدست می‌آوریم:

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1)\int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\ dt + [(x-t)^{n-1} f(t)]_{t=x}. \qquad (۱-٥)$$

رابطه (۱-٥) به ازای $n=1$، به صورت

$$\frac{dI_1}{dx} = f(x), \qquad (۱-٦)$$

و برای $n>1$، به صورت

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) I_{n-1}, \quad n>1 \qquad (۱-۷)$$

خواهد شد.

می‌خواهیم با استفاده از این تعاریف $I_n(x)$ را به صورت فرمولی از انتگرالهای چندگانه بنویسیم. برای اینکار از رابطه (۱-٦) روی بازه $[a,x]$ نسبت به متغیر x_1 انتگرال می‌گیریم:

$$I_1(x) = \int_a^x f(x_1)\ dx_1, \qquad (۱-۸)$$

اگر در رابطه (۱-۷) $n=2$، قرار دهیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{dI_2}{dx} = I_1(x), \qquad (۱-۹)$$

ازرابطه (۱-۹) نسبت به متغیر x_2، روی بازه $[a,x]$ انتگرال گرفته و با استفاده از رابطه (۱-۸) داریم:

---
[۱] Cauchy
[۲] Leibnitz

$$I_2(x) = \int_a^x I_1\,(x_2)dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 dx_2,$$

به همین ترتیب برای بدست آوردن $I_3(x)$، داریم:

$$\frac{dI_3}{dx} = 2I_2(x),$$

$$I_3(x) = 2\int_a^x \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 dx_2 dx_3,$$

اگر همین روند را تکرار کنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$I_n(x) = (n-1)!\int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n. \qquad (۱-۱۰)$$

از رابطه (۱-۱۰) و رابطه (۱-٤) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

(۱-۱۱)

رابطه (۱-۱۱) به فرمول کشی معروف است و رابطه‌ای مفید برای حل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل می‌باشد. توسط این رابطه می‌توان انتگرالهای چندگانه در معادلات را به انتگرال یگانه تبدیل نمود.

۱-٤ درونیابی

تعریف. درونیابی تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در جدول نیست، ولی بین نقاط جدولی است. برای تخمین $f(x)$، وقتی f با جدول

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

داده شده باشد. راه‌های متفاوتی وجود دارد، یکی از راه‌های ساده این است که یک چندجمله‌ای درجه n مانند $p_n(x)$ پیدا کنیم بطوریکه:

$$p_n(x_i) = f_i\,, \qquad i = 0,1,\dots,n, \qquad (۱-۱۲)$$

و بعد بجای $f(x)$ در بازه $[x_0, x_n]$، با $p_n(x)$ کار کنیم. یکی از روشهای تعیین یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n که در (۱-۱۲) صدق کند روش لاگرانژ است. در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x)$, $L_1(x)$, ... , $L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله‌ای از درجه n باشند قرار می‌دهیم:

$$p_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_j(x)f_j + \dots + L_n(x)f_n\,,$$

وسعی کنیم $L_j\,(x)$ ها را چنان تعیین کنیم که:

$$p_n(x_i) = f_i\,,\ i = 0,1,\dots,n,$$

و یا بطور معادل:

$$p_n(x_i) = L_۰(x_i)f_۰ + L_۱(x_i)f_۱ + \cdots + L_j(x_i)f_j + \cdots + L_n(x_i)f_n = f_i\ ,$$
$$i = ۰,۱ \dots , n,$$

لذا کافی است (و در صورت مستقل بودن $L_j(x)$ ها از یکدیگر لازم است) داشته باشیم

$$L_j(x_i) = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ ۱ & i = j \end{cases} \qquad (۱۳-۱)$$

بنابراین $L_j(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_۰)\dots(x-x_{j-۱})(x-x_{j+۱})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_۰)\dots(x_j-x_{j-۱})(x_j-x_{j+۱})\dots(x_j-x_n)}\ . \qquad (۱٤-۱)$$

به سادگی دیده می‌شود که شرط (۱-۱۳) برقرار است. چندجمله‌ایهای درجه n که به وسیله (۱-۱٤) بیان می‌شوند به چندجمله‌ایهای لاگرانژ معروف می‌باشند.

قضیه. فقط یک چندجمله‌ای $p_n\ (x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد که در شرط زیر صدق کند (استوار[۱]، ۲۰۰۲: ۳۸).

$$p_n(x_i) = f_i\ , \quad i = ۰,۱, \dots , n.$$

قضیه. هرگاه $p_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط دوبه‌دو متمایز $x_۰, x_۱, \dots , x_n$ باشد و $f \epsilon C^{n+۱}[x_۰, x_۱]$ آنگاه:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\dots(x-x_n)}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(c).$$

که درآن c نقطه‌ای در فاصله $[x_۰, x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد (استوار، ۲۰۰۲: ٤۹).

۱-۵ انتگرالگیری عددی

اغلب لازم است انتگرال معین تابعی حساب شود که هیچ پاد مشتق صریحی نداشته باشد و یا پادمشتق آن به آسانی بدست نمی‌آید، بنابراین حتی درصورت موجود بودن تابع اولیه برای $f(x)$ نیز از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که محصور به محور x و خطوط $x = a$ و $x = b$ است تعبیرکرد و با تقسیم بازه $[a, b]$ به زیر بازه‌ها آن را محاسبه کرد. با استفاده از این خاصیت و چندجمله‌ایهای درونیاب می‌توان تقریب‌های مناسبی برای $\int_a^b f(x)dx$ بدست آورد.

---
۱ Stoer

۱-۵-۱ انتگرالگیری گاوسی[1]

هرگاه داشته باشیم:

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx, \qquad (۱-۱۵)$$

که درآن $w(x)$ یک تابع وزن نامنفی در بازه $[a,b]$ است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $w(x) \geq ۰$ یک تابع اندازه‌پذیر روی بازه $[a,b]$ است،

۲) انتگرال $\int_a^b x^k\, w(x)dx$ ، $(k = ۰,۱, \dots)$، موجود و متناهی است،

۳) برای چندجمله‌ای نامنفی $s(x)$ روی بازه $[a,b]$ هرگاه $\int_a^b w(x)\, s(x)dx = ۰$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $s(x) \equiv ۰$.

آنگاه تقریب انتگرال (۱-۱۵) فرمولی به صورت $\tilde{I}(f) = \sum_{i=۱}^{n} w_i\, f(x_i)$ خواهد بود. با توجه به شرایط $w(x)$ با انتخاب مجموعه‌ای از توابع متعامد می‌توان w_i و x_i، $(i = ۱,۲,..,n)$، را طوری انتخاب کرد که فرمول انتگرالگیری گاوسی برای حداکثر درجه چندجمله‌ای دقیق باشد.

۱-۵-۲ انتگرالگیری کلن‌شئو-کرتس

در این قسمت هدف، تقریب انتگرال

$$\int_{-۱}^{۱} g(t)dt, \qquad (۱-۱۶)$$

می‌باشد، در این انتگرالگیری روشی مبتنی بر بسط چبیشف ارائه می‌شود که اولین‌بار توسط کلن‌شئو-کرتس، درسال ۱۹۶۰ ارائه شد. برای بیان این انتگرالگیری از اینجا به بعد علامت $\sum''$ به معنی این است که تمام جملات جمع می‌شوند به‌جز دوجمله اول و آخر که مجموع نصف آن دو منظور می‌شود و δ_j را به صورت $\delta_j = \begin{cases} ۰/۵ & j = ۰,n \\ ۱ & ۰ < j < n \end{cases}$، در نظر می‌گیریم.

برای بدست آوردن تقریب انتگرال (۱-۱۶) ابتدا درونیاب چبیشف تابع $g(t)$ را نسبت به متغیر t درنظر می‌گیریم:

$$g(t) \cong \sum_{j=۰}^{n} a_j\, T_j(t), \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن $T_j(t)$ ، $(j = ۰,۱, \dots, n)$، چندجمله‌ایهای چبیشف می‌باشند.

---

[1] Gaussian

می‌خواهیم در نقاط $t_j = cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ درونیابی را انجام دهیم و همان‌طور که می‌دانیم در این نقاط اطلاعات مقدار تابع با مقدار درونیاب برابر می‌باشد، بنابراین از این خاصیت استفاده می‌کنیم. برای راحتی کار ابتدا برای $n = ۱$ و $n = ۲$ درونیابی را انجام می‌دهیم یعنی عمل درونیابی را برای دو نقطه و سه نقطه بکار می‌بریم. ابتدا فرض می‌کنیم $n = ۱$، بنابراین دو نقطه درونیاب $t_۰ = ۱$ و $t_۱ = -۱$ می‌باشند، در نتیجه با استفاده از رابطه (۱-۱۷) می‌توان نوشت:

$$g(t) \cong \sum_{j=۰}^{۱} a_j\, T_j(t) = a_۰ T_۰(t) + a_۱ T_۱(t), \qquad (۱-۱۸)$$

از آنجاکه $T_۰(t) = ۱$ و $T_۱(t) = t$ داریم:

$$g(t) \cong a_۰ + a_۱ t,$$
$$\begin{cases} g(t_۰) = a_۰ + a_۱ \\ g(t_۱) = a_۰ - a_۱ \end{cases}, \qquad (۱-۱۹)$$

از حل دستگاه (۱-۱۹) خواهیم داشت:

$$a_۰ = \tfrac{۱}{۲}\big(g(t_۰) + g(t_۱)\big),\;\; a_۱ = \tfrac{۱}{۲}\big(g(t_۰) - g(t_۱)\big).$$

با جایگذاری $a_۰$ و $a_۱$ در رابطه (۱-۱۸) داریم:

$$g(t) = \tfrac{۱}{۲}\big(g(t_۰) + g(t_۱)\big)T_۰(t) + \tfrac{۱}{۲}\big(g(t_۰) - g(t_۱)\big)T_۱(t) =$$
$$g(t_۰)\left(\frac{T_۰(t)+T_۱(t)}{۲}\right) + g(t_۱)\left(\frac{T_۰(t)-T_۱(t)}{۲}\right)$$
$$= \sum_{j=۰}^{۱} g(t_j)\, \frac{۲\delta_j}{n} \sum_{k=۰}^{۱}{}'' \, T_k(t)\, cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right),$$

حال فرض می‌کنیم $n = ۲$، در نتیجه سه نقطه $t_۰ = ۱$، $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = -۱$ برای درونیابی داریم با استفاده از رابطه (۱-۱۷) داریم:

$$g(t) \cong \sum_{j=۰}^{۲} a_j\, T_j(t) = a_۰ T_۰(t) + a_۱ T_۱(t) + a_۲ T_۲(t) \qquad (۱-۲۰)$$

با توجه به اینکه $T_۰(t) = ۱$، $T_۱(t) = t$ و $T_۲(t) = ۲t^۲ - ۱$ می‌توان نوشت:

$$g(t) = a_۰ + a_۱ t + a_۲(۲t^۲ - ۱),$$
$$\begin{cases} g(t_۰) = a_۰ + a_۱ + a_۲\,, \\ g(t_۱) = a_۰ \qquad - a_۲\,, \\ g(t_۲) = a_۰ - a_۱ + a_۲\,, \end{cases} \qquad (۱-۲۱)$$

از حل دستگاه (۱-۲۱) داریم:

$$a_۰ = \tfrac{۱}{۴}[g(t_۰) + ۲g(t_۱) + g(t_۲)],\; a_۱ = \tfrac{۱}{۴}[۲g(t_۰) - ۲g(t_۲)],\; a_۲ = \tfrac{۱}{۴}[g(t_۰) - ۲g(t_۱) + g(t_۲)].$$

با جایگذاری $a_۲, a_۱, a_۰$ در رابطه (۱-۲۰) خواهیم داشت:

$$g(t) \cong \frac{۱}{٤}\big(g(t_۰) + ۲g(t_۱) + g(t_۲)\big)T_۰(t) + \frac{۱}{٤}\big(۲g(t_۰) - ۲g(t_۲)\big)T_۱(t) + \frac{۱}{٤}\big(g(t_۰) - ۲g(t_۱) + g(t_۲)\big) = g(t_۰)\left(\frac{T_۰(t)+۲T_۱(t)+T_۲(t)}{٤}\right) + g(t_۱)\left(\frac{۲T_۰(t)-۲T_۲(t)}{٤}\right) + g(t_۲)\left(\frac{T_۰(t)-۲T_۱(t)+T_۲(t)}{٤}\right) = \sum_{j=۰}^{۲} g(t_j)\frac{۲\delta_j}{n}\sum_{k=۰}^{۲}{}'' T_k(t)\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right),$$

با تعمیم این رابطه برای n نقطه، خواهیم داشت:

$$g(t) = \sum_{j=۰}^{n} g(t_j)\frac{۲\delta_j}{n}\sum_{k=۰}^{n}{}'' T_k(t)\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right), \qquad (۱\text{-}۲۲)$$

از دو طرف رابطه (۱-۲۲) نسبت به متغیر t روی بازه $[-۱, x]$ انتگرال می‌گیریم در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-۱}^{x} g(t)\,dt = \sum_{j=۰}^{n} g(t_j)\frac{۲\delta_j}{n}\sum_{k=۰}^{n}{}''\left(\int_{-۱}^{x} T_k(t)dt\right)\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right), \qquad (۱\text{-}۲۳)$$

از طرفی داریم:

$$\int_{-۱}^{x} T_k(t)\,dt = \begin{cases} T_۱(x) + ۱ & k = ۰ \\ \frac{T_۲(x)-۱}{٤} & k = ۱ \\ \frac{T_{k+۱}(x)}{۲(k+۱)} - \frac{T_{k-۱}(x)}{۲(k-۱)} + \frac{(-۱)^{K+۱}}{k^۲-۱} & k \geq ۲ \end{cases} \qquad (۱\text{-}۲٤)$$

زیرا

$$k = ۰ \ : T_۰(x) = ۱,$$
$$\int_{-۱}^{x} ۱\,dt = t|_{-۱}^{x} = x + ۱ = T_۱(x) + ۱,$$
$$k = ۱ \ : \ T_۱(x) = x,$$
$$\int_{-۱}^{x} t\,dt = \frac{t^۲}{۲}\bigg|_{-۱}^{x} = \frac{x^۲}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{٤}[۲x^۲ - ۲] = \frac{۱}{٤}[(۲x^۲ - ۱) - ۱] = \frac{T_۲(x)-۱}{٤},$$
$$k \geq ۲ \ : \ T_k(x) = cos(k\,cos^{-۱}x),$$
$$cos^{-۱} t = u, \qquad t = cos\,u, \qquad dt = -sin\,u\,du.$$
$$\int_{-۱}^{x} cos(k\,cos^{-۱}t)\ dt = -\int_{\pi}^{\cos^{-۱}x} cos\,ku\,sin\,u\,du = -\frac{۱}{۲}\int_{\pi}^{\cos^{-۱}x}(sin(k+۱)u - sin(k-۱)u)du = \frac{۱}{۲}\left[\frac{cos(k+۱)u}{k+۱} - \frac{\cos(k-۱)u}{k-۱}\right]_{\pi}^{\cos^{-۱}x}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{T_{k+۱}(x)}{k+۱} - \frac{T_{k-۱}(x)}{k-۱} + \frac{۲(-۱)^{k+۱}}{(k^۲-۱)}\right] = \frac{T_{k+۱}}{۲(k+۱)} - \frac{T_{k-۱}}{۲(k-۱)} + \frac{(-۱)^{k+۱}}{(k^۲-۱)}.$$

هرگاه در رابطه (۱-۲۳)، $x = ۱$ قرار دهیم آنگاه:

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n}{}'' g(t_j)\frac{2\delta_j}{n}\sum_{k=0}^{n}{}''\left(\int_{-1}^{1} T_k\,(t)dt\right)\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right), \qquad (۲۵-۱)$$

با توجه به چندجمله‌ایهای چبیشف رابطه (۱-۲۴) به‌ازای $x = 1$، به صورت

$$\int_{-1}^{1} T_k(t) = \begin{cases} 0 & k \text{ فرد} \\ \frac{2}{1-k^2} & k \text{ زوج} \end{cases}, \qquad (۲۶-۱)$$

می‌شود.

با جایگذاری رابطه (۱-۲۶) دررابطه (۱-۲۵) خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{j=0}^{n}{}'' g(t_j)\,w_j\,, \qquad (۲۷-۱)$$

در رابطه (۱-۲۷) داریم:

$$t_j = \cos\frac{j\pi}{n},$$
$$w_j = \frac{4\delta_j}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' v_k\cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right),$$
$$v_k = \begin{cases} 0 & k \text{ فرد} \\ \frac{1}{1-k^2} & k \text{ زوج} \end{cases}$$

رابطه (۱-۲۷) انتگرالگیری کلن‌شئو-کرتس نام دارد [٤].

برای تقریب انتگرال $\int_a^b g(t)\,dt$ با تغییر متغیر $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$، انتگرال را به بازه $[-1,1]$، برده و سپس از این انتگرالگیری استفاده می‌کنیم.