دانشگاه زنجان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

فیلتر کالمن مرتبه کسری بهبودیافته و کاربردهای آن

نگارنده:

نیره ذوالفقاری

استاد راهنما:

دکتر محمدتقی دستجردی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به همهٔ آن‌هایی که

می‌خواهند بیشتر بدانند

با ژرف‌ترین سپاس‌ها از

پروردگاری که داشته‌هایم از او و نداشته‌هایم به مصلحت اوست،

سرمایه‌های زندگی‌ام، پدر و مادرم که دعای خیرشان همواره بدرقه راهم بوده و هست،

استاد ارجمند و گرانقدرم، جناب آقای دکتر محمد تقی دستجردی که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را متحمل شدند و با توجهات دلسوزانه و راهنمایی‌های دقیق و مستمر خود در شکل‌گیری این پایان‌نامه نقش مهمی داشته‌اند،

استاد فرزانه، جناب آقای دکتر مجید ادیب که زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند و با نقطه نظرات ارزنده‌شان مرا در اصلاح پایان‌نامه یاری نمودند،

استاد محترم و بزرگوار، جناب آقای دکتر سعید مقصودی که زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند.

و با سپاس فراوان از دوستان عزیزم، خانم‌ها الهه موسوی و سحر صلواتی برای روزهای خوبی که در کنارشان داشتم.

چکیده

در این پایان نامه تعمیم فیلتر کالمن برای سیستم‌های فضای حالت مرتبه کسری خطی گسسته ارائه می‌گردد. فیلتر کالمن تعمیم یافته را فیلتر کالمن مرتبه کسری (FKF) می‌نامند. بهبود فیلتر کالمن مرتبه کسری بر پایه‌ی شکل نامتناهی بعد سیستم فضای حالت مرتبه کسری خطی گسسته ارائه می‌شود. همچنین سیستم‌های فضای حالت مرتبه کسری خطی گسسته معرفی می‌شوند. در سال‌های اخیر، مسأله‌ی تخمین حالت روی یک شبکه با اتلاف بسته‌ای به طور گسترده مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین کاربرد و توسعه‌ی الگوریتم فیلتر کالمن مرتبه کسری و بهبود آن برای تخمین روی شبکه‌های پراتلاف بیان می‌شود. در پایان، بعضی از مثال‌های عددی به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی ارائه می‌گردد.

واژگان کلیدی: فیلتر کالمن مرتبه کسری، تخمین، شبکه‌های پراتلاف.

فهرست مندرجات

مقدمه

لایبنیتز[۱] و هوپیتال[۲] در سال ۱۶۹۵ به ایده‌ی حسابان کسری که تعمیم‌یافته‌ی حسابان کلاسیک (انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه‌ی صحیح) است، اشاره کرده‌اند. در اواخر قرن نوزدهم ریمان[۳] و لیوویل[۴] اولین تعریف مشتق‌گیری مرتبه‌ی کسری را ارائه نمودند. دانشمندانی چون گرانوال[۵]، لتنیکوف[۶]، لاپلاس[۷] و آبل[۸] نقش مهمی در توسعه‌ی این مفاهیم داشتند. امروزه مفهوم انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه‌ی کسری به طور روز افزونی برای مدل سازی رفتار سیستم‌های حقیقی در بسیاری از زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی به کار می‌رود. بویژه در حوزه‌ی نظریه‌ی کنترل، تعمیم‌های روش‌های تحلیلی کلاسیک برای سیستم‌های مرتبه کسری (تابع انتقال، پاسخ فرکانس، تعیین قطب، صفر و غیره) ابداع شده‌اند؛ [۱] و [۲۰] را ببینید. نمایش فضای حالت سیستم‌های مرتبه کسری در [۵]، [۱۵]، [۲۱] و [۳۱] معرفی شده است. اخیراً تحلیل کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم‌های مرتبه کسری پیوسته ـ زمان مدل شده با معادلات فضای حالت کسری در [۲] بیان شده است. سیستم مرتبه کسری خطی گسسته ـ زمان در نمایش فضای حالت در [۶]، [۷] و [۹] معرفی شده‌اند که مباحث اصلی این پایان نامه روی این نوع از سیستم‌ها متمرکز گردیده است.

فیلتر کالمن به منظور حذف بهینه‌ی اثرات اختلال‌های وارد شده به یک سیستم، نقش مهمی در نظریه‌ی سیستم ایفا می‌کند و کاربردهای وسیعی در بسیاری از حوزه‌ها مانند پردازش سیگنال، کنترل و ارتباطات دارد. در فیلتر کالمن استاندارد، فرض می‌شود داده‌ی دریافتگر به طور کامل از میان کانال‌های ارتباطی انتقال داده می‌شود و بنابراین برهم کنش ارتباطات و تخمین درنظر گرفته نمی‌شود. در سال‌های اخیر تحقیقات فراوانی در زمینه‌ی تخمین و کنترل روی سیستم‌های شبکه‌ای انجام شده است. این تحقیقات نشان می‌دهد که چگونه فیلتر کالمن یا تخمین زننده‌ها می‌توانند

[۱] Leibniz
[۲] Hopital
[۳] Riemann
[۴] Liouville
[۵] Grunwald
[۶] Letnikov
[۷] Laplace
[۸] Abel

برای تخمین این نوع از سیستم‌ها کاربرد داشته باشند. بویژه پژوهش‌های قابل توجهی در تحلیل تأثیر تأخیرهای تصادفی و اتلاف بسته‌ای (افت ارسال) روی این سیستم‌ها موجود است؛ [۲۲]،[۲۴]، [۲۵] و [۳۰] را ببینید. در بخش اصلی پایان نامه پس از معرفی فیلتر کالمن مرتبه کسری برای سیستم‌های فضای حالت مرتبه کسری گسسته ـ زمان خطی (FKF) و فیلتر کالمن مرتبه کسری روی سیستم‌های شبکه‌ای پراتلاف (سیستم‌های تحت تأثیر افت ارسال) ($gFKF$)، بهبود FKF بر پایه‌ی شکل نامتناهی بعد یک سیستم فضای حالت مرتبه کسری گسسته ـ زمان خطی توسعه داده می‌شود. سپس فیلتر کالمن مرتبه کسری بهبودیافته برای تخمین روی شبکه‌های پراتلاف به کار برده می‌شود. در انتها نتایج عددی به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی ارائه می‌شود.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است:

فصل اول، آشنایی با مفاهیم فرآیندهای تصادفی و حسابان کسری است. هدف از این فصل، ارائه‌ی مختصر مباحث ریاضی است که در فصل‌های بعدی پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴]، [۱۷]. **فصل دوم** به معرفی نظریه‌ی کنترل می‌پردازد. در این راستا، پس از خطی‌سازی سیستم‌های غیر خطی و به دست آوردن معادلات حالت و خروجی سیستم، به حل کامل این معادلات می‌پردازیم. کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری و پایداری که از خواص مهم سیستم‌اند در فصل دوم معرفی شده‌اند. دوگانی سیستم در این فصل تعریف شده است [۳۲] و [۳۳]. در پایان این فصل، بنابر نیاز پایان نامه، مسأله‌ی کنترل بهینه به طور مختصر معرفی می‌شود [۳]. در **فصل سوم**، پس از ارائه‌ی مقدمه‌ای بر تخمین‌های بهینه، فیلترهای کالمن استاندارد و توسعه‌یافته مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هموارساز راک ـ تانگ ـ استریبل با استفاده از فیلتر کالمن معرفی می‌شود[۱۰] و [۱۳]. در انتهای فصل سوم کاربرد فیلتر کالمن در تخمین روی شبکه‌های پراتلاف، یعنی فیلتر کالمن با مشاهدات متناوب مورد بررسی قرار می‌گیرد[۲۴] و [۳۰]. **فصل چهارم** به تحلیل و طراحی فضای حالت سیستم‌های مرتبه کسری خطی گسسته اختصاص دارد. فصل‌های دو و سه به تحلیل و طراحی فضای حالت سیستم‌های کلاسیک (مرتبه صحیح) و همچنین طراحی فیلترهای کالمن مرتبه صحیح می‌پردازند. در فصل چهارم این تحلیل و طراحی‌ها به سیستم‌های مرتبه کسری تعمیم داده می‌شوند. در واقع، پس از معرفی سیستم‌های مرتبه کسری، حل معادله‌ی حالت بدون ورودی و با ورودی برای آن‌ها ارائه می‌شود. کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری و پایداری سیستم‌های مرتبه کسری مورد بررسی قرار می‌گیرند[۷]، [۹] و

[۱۲]. فیلتر کالمن مرتبه کسری و بهبود آن بر پایه‌ی شکل نامتناهی بعد سیستم فضای حالت مرتبه کسری خطی گسسته ارائه می‌شود. کاربرد فیلتر کالمن مرتبه کسری و بهبود آن در تخمین روی شبکه‌های پراتلاف در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان فصل چهارم نتایج عددی به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی ارائه می‌گردد [۲۸] و [۲۹].

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم اولیه

در این فصل، بعضی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در این پایان‌نامه به کار می‌روند، مرور خواهند شد.

۱.۱ فرآیندهای تصادفی

مشخصه مهم سیستم‌های تصادفی آن است که برخی از متغیرهایشان مؤلفه‌های تصادفی دارند و بنابراین مقادیر دقیق آنها در هر لحظه‌ی زمانی مشخص نیست. لیکن می‌توان احتمالی را که متغیر مقادیر خاصی اختیار خواهد نمود بیان کرد و می‌توان مقدار این متغیرها را تخمین زد.

در بررسی فیلترهای کالمن، فرآیندهای تصادفی [۱] را به عنوان مدل‌های ریاضی برای اغتشاشات و پدیده‌ی اختلال به کار می‌بریم. از آنجایی که غالباً چند اغتشاش و اختلال هم زمان بر یک سیستم داده شده عمل می‌کنند، لذا معرفی فرآیندهای تصادفی برداری [۲] نیز لازم است. در ارائه‌ی مطالب این بخش از مرجع [۴] استفاده شده است.

تابع توزیع احتمال [۳] $F(x)$، یک تابع اسکالر است که احتمال آنکه فرآیند تصادفی X مقداری کمتر یا مساوی

[۱] stochastic processes

[۲] vector stochastic processes

[۳] probability distribution function

یک مقدار معین x را اختیار کند، مشخص می‌نماید. یعنی آنکه

$$F(x) = Pr(X \leq x). \tag{۱.۱}$$

برای فرآیند تصادفی برداری داریم

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= Pr(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \\ &= Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n), \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که در آن Pr به معنی احتمال آنکه، است.

تابع چگالی احتمالی[۴] X، $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{۳.۱}$$

اگر $\mathbf{X}$ فرآیندی برداری باشد

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}. \tag{۴.۱}$$

احتمال آنکه X بین دو مقدار قرار گیرد، بدین صورت داده می‌شود

$$\begin{aligned} Pr(x_1 \leq X \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\ &= F(x_2) - F(x_1), \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

و به روی گستره‌ی کامل x، یعنی آنکه x_1 و x_2 حدهای x باشند، $Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = 1$. برای فرآیند تصادفی برداری داریم

$$Pr(\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{x}_2) = \int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \int_{x_{2,1}}^{x_{2,2}} \cdots \int_{x_{n,1}}^{x_{n,2}} f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \tag{۶.۱}$$

و

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= Pr(-\infty < \mathbf{X} \leq \mathbf{x}_2) \\ &= Pr(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}_2). \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

[۴] probability density function

میانگین[۵] یا **امید ریاضی**[۶] یک تابع g از فرآیند تصادفی برداری $\mathbf{X}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n. \tag{۸.۱}$$

اگر g تابعی از دو فرآیند تصادفی برداری $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ باشد، داریم

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m \tag{۹.۱}$$

بنابراین میانگین فرآیند اسکالر X، یعنی هنگامیکه $g(X) = x$، عبارت است از

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{۱۰.۱}$$

ماتریس کوواریانس[۷] $\mathbf{X}$ عبارت است از

$$E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n. \tag{۱۱.۱}$$

برای فرآیند اسکالر X، داریم

$$\sigma^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx, \tag{۱۲.۱}$$

و این واریانس[۸] X است که مقیاسی از پراکندگی X است و با پراکندگی بیشتر X، σ^2 بزرگتر خواهد شد. علامت σ نشانگر انحراف معیار[۹] است.

دو فرآیند تصادفی X و Y را **ناهمبسته**[۱۰] گویند، اگر

$$E[XY] = E[X]E[Y], \tag{۱۳.۱}$$

در غیر این صورت، آنها را همبسته[۱۱] می‌نامند. همبستگی، مقیاسی از وابستگی بین دو فرآیند تصادفی است. امکان دارد X و Y دو فرآیند تصادفی کاملاً مجزا بوده و یا ممکن است فرآیندهایی باشند که توسط یک دوره‌ی تناوب

[۵] mean
[۶] expected value
[۷] covariance matrix
[۸] variance
[۹] standard deviation
[۱۰] uncorrelated
[۱۱] correlated

زمانی از هم جدا شده باشند، برای نمونه $X = X(t)$ و $Y = X(t+\tau)$. در صورت داشتن یک فرآیند تصادفی، فرآیند همبستگی را خود همبستگی[۱۲] می‌نامند و در غیر این صورت با دو فرآیند تصادفی، فرآیند همبستگی را همبستگی متقاطع[۱۳] می‌نامند. اگر $\mathbf{X}$ فرآیند تصادفی برداری باشد و عناصر آن $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ناهمبسته باشند، آنگاه ماتریس کوواریانس آن قطری خواهد بود. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ فرآیندهای تصادفی برداری ناهمبسته باشند، آنگاه

$$E[(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{Y}-\bar{\mathbf{y}})] = 0 \tag{۱۴.۱}$$

تعاریف بالا بر اساس مقادیر ممکن فرآیند تصادفی در هر لحظه از زمان بنا نهاده شده‌اند و در این تعاریف به طور صریح از زمان استفاده نشده است، یعنی یک مجموع از مقادیر یا توابع ممکن وجود دارد. اکنون فرآیند تصادفی را در نظر بگیرید که با زمان تغییر کند، به گونه‌ای که توابع بالا، به جای اینکه به روی مجموعه‌ای از توابع تشکیل شود، به روی یک دوره‌ی زمانی تشکیل می‌گردد. در زمان t، میانگین مجموع مقدار هر کدام از مقادیر توابع مجزا شده در زمان t، محاسبه می‌گردد. میانگین زمانی از مقدار معدل یک تابع به تنهایی به دست می‌آید. فرآیند را مانا[۱۴] گویند، اگر قوانین احتمال حاکم بر فرآیند با زمان تغییر پیدا نکنند. با فرض ساکن بودن، مطالعه فرآیندهایی که اغتشاشات تصادفی دارند، بسیار ساده‌تر می‌شود. برای نمونه داریم

$$\begin{aligned} E[g(\mathbf{X})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(\mathbf{x}) dt, \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

و به ویژه مقدار میانگین عبارت است از

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} f(t) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbf{x}(t) dt. \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

همچنین مقدار میانگین حاصل ضرب $X(t)X(t+\tau)$، عبارت است از

$$E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x(t+\tau) dt. \tag{۱۷.۱}$$

[۱۲] auto-correlation

[۱۳] cross-correlateion

[۱۴] stationary

این تابع همبستگی متقاطع $\Phi_{xx}(\tau)$ است.

برای دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ تابع همبستگی متقاطع $\Phi_{xy}(\tau)$ عبارت است از

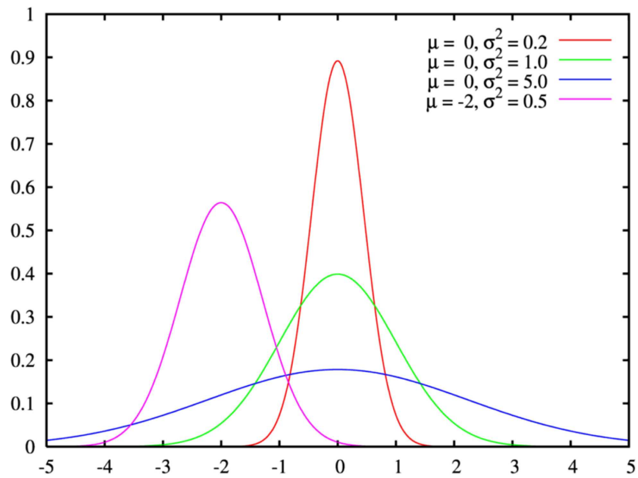
$$E[X(t)Y(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt, \qquad (۱۸.۱)$$

که در آن زمان τ فاصله‌ی زمانی بین دو نمونه‌ی فرآیند تصادفی است. برای فرآیندهای ساکن، $E[(X(t)Y(t+\tau)]$ و توابع مشابه تنها توابعی از τ بوده و می‌توانند به صورت $E[X, Y(\tau)]$ نوشته شوند.

اکنون یک نوع خاص از فرآیندهای تصادفی را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف، فرآیند تصادفی را **گوسی یا نرمال**[۱۵] گویند اگر برای حالت اسکالر، تابع چگالی آن بدین صورت داده شود

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}), \qquad (۱۹.۱)$$

که در آن، σ^2 واریانس و $\bar{x}$ مقدار میانگین X است.



شکل ۱.۱ تابع چگالی احتمال $f(x)$ برای فرآیند تصادفی گوسی

از آنجایی که کار تحلیلی با توزیع گوسی راحت است، در عمل می‌توان اختلال‌های فرآیند را با آن تقریب زد. یک فرآیند گوسی تحت انتقال خطی (مانند انتقال بین ورودی و خروجی سیستم خطی) فرآیند گوسی دیگری می‌دهد. بعلاوه، اگر میانگین آن صفر باشد (که با یک تغییر متغیر، صفر کردن آن به سادگی امکان‌پذیر است)، کار با آن بسیار

[۱۵] gaussian or normal

ساده‌تر خواهد شد. برای **فرآیند سفید گوسی**[۱۶] مشخصه اضافی زیر را داریم

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(\tau) &= E[\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{X}}^T(t+\tau)] \\ &= P\delta(\tau),\end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

که در آن، $\delta(\tau)$ تابع دلتا و عناصر ماتریس P عبارتند از $P_{ij} = E[x_i(t)x_j(t+\tau)]$. برای حالت اسکالر

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= \sigma^۲\delta(\tau),\end{aligned} \tag{۲۱.۱}$$

که در آن، $\sigma^۲$ واریانس است. اگر عناصر x_i از $\mathbf{X}$ ناهمبسته باشند، آنگاه P قطری خواهد شد.

دو فرآیند تصادفی برداری که مستقل هستند، یعنی $E[\mathbf{XY}] = \mathbf{E}[\mathbf{X}]\mathbf{E}[\mathbf{Y}]$، ناهمبسته نیز می‌باشند. عکس این مطلب صادق نمی‌باشد، مگر آنکه فرآیندهای برداری گوسی باشند که در این صورت، مستقل بودن یا ناهمبستگی خاصیت دیگر را نیز خواهد داد.

۲.۱ حسابان کسری

لایبنیتز و هوپیتال در سال ۱۶۹۵ به ایده‌ی حسابان کسری که تعمیم‌یافته‌ی حسابان کلاسیک (انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه‌ی صحیح) است، اشاره کرده‌اند. در اواخر قرن نوزدهم ریمان و لیوویل اولین تعریف از مشتق‌گیری مرتبه‌ی کسری را ارائه نمودند.

عملگرهای مختلفی برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه‌ی کسری وجود دارد. بنابر نیاز پایان نامه هدف اصلی این بخش، آشنایی بسیار مختصر با مفاهیم حسابان کسری است.

۱.۲.۱ تابع گاما

تابع گاما[۱۷] به عنوان تعمیم فاکتوریل برای همه‌ی اعداد حقیقی، نقش مهمی در حسابان کسری دارد. تعاریف مختلفی برای تابع گاما وجود دارد. یکی از این تعاریف عبارتست از:

[۱۶] white gaussian process

[۱۷] gamma

تعریف ۱.۱ [۱۹] برای $z \in \mathbb{C}\backslash\{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$ تابع گامای اویلر $\Gamma(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt\ , \quad Re(z) > 0. \tag{۲۲.۱}$$

قضیه ۱.۱ [۱۹] تابع گاما دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) تعریف ۱.۱ معادل است با

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{t}))^{z-1} dt$$

۲) با فرض $z \in \mathbb{C}\backslash\{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

۳) برای $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

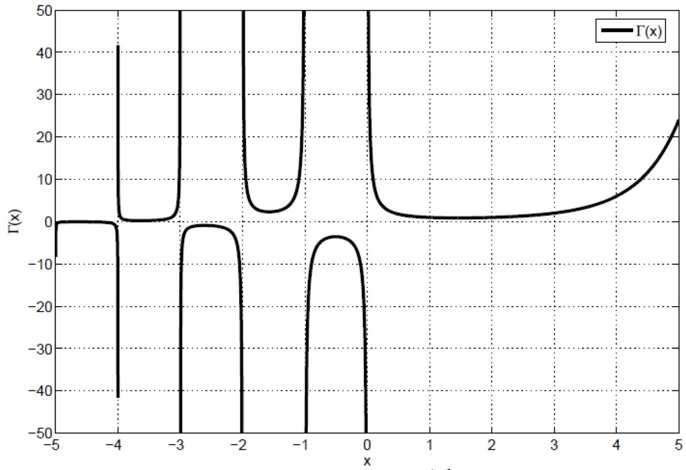
۴) برای $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$$

۵) (نمایش حدی) برای $Re(z) > 0$ رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

شکل ۱.۱ تابع گاما را در بازه‌ی [۵,۵−] نمایش می‌دهد.



شکل ۲.۱ تابع گاما

۲.۲.۱ تابع میتاگ ـ لفلر

تابع میتاگ ـ لفلر[۱۸] یکی از مهم‌ترین توابع است که در حسابان کسری به کار می‌رود. همان طور که تابع نمایی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح رخ می‌دهد، تابع میتاگ ـ لفلر نیز همان نقش را در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ایفا می‌کند. در واقع تابع نمایی حالت خاصی از تابع میتاگ ـ لفلر است. تعریف استاندارد تابع میتاگ ـ لفلر به صورت زیر بیان می‌شود

تعریف ۲.۱ [۱۹] تابع میتاگ ـ لفلر $E_\alpha(z)$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

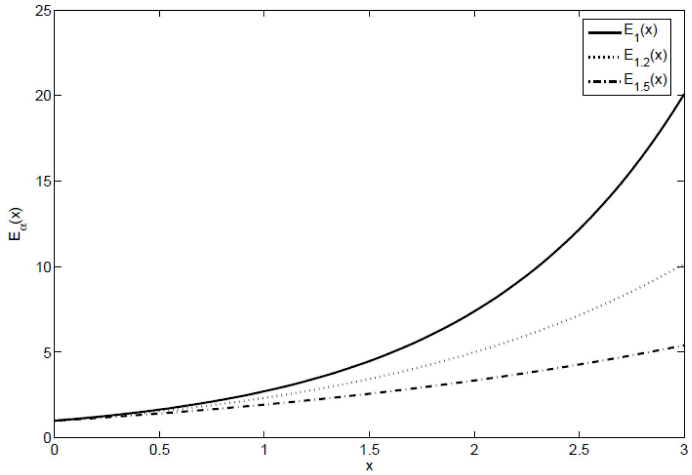
$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

برای $\alpha = 1$ داریم

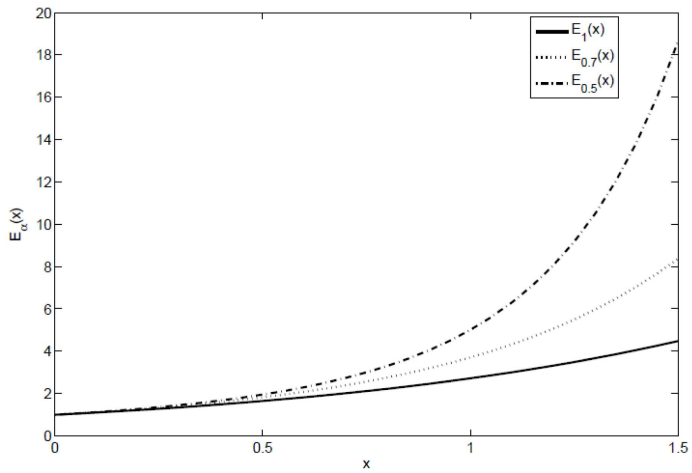
$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

که متناظر با تابع نمایی است. شکل ۳.۱ تابع میتاگ ـ لفلر را برای $\alpha = 1, 1/2, 1/5$ نمایش می‌دهد و شکل ۴.۱ آن را برای $\alpha = 1, 0/7, 0/5$ نشان می‌دهد.

[۱۸] Mittag-Leffler



شکل ۳.۱ تابع میتاگ ـ لفلر برای $\alpha = ۱, ۱/۲, ۱/۵$



شکل ۴.۱ تابع میتاگ ـ لفلر برای $\alpha = ۱, ۰/۷, ۰/۵$

تابع میتاگ ـ لفلر را می‌توان با دو آرگومان تعریف کرد.

تعریف ۳.۱ تابع میتاگ ـ لفلر تعمیم یافته‌ی $E_{\alpha,\beta}(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > \circ, \beta > \circ.$$

در تعریف ۳.۱ اگر $\beta = ۱$، تابع $E_\alpha(z)$ تولید می‌شود.