بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

حدس مقدار میانگین سمیل

پژوهشگر:

سید محمد مینوئی

استاد راهنما:

دکتر ارسلان شادمان

استاد مشاور:

دکتر شهرام سعیدی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

مهر ماه ۱۳۸۹

چکیده

استیفن سمیل[۱] برنده‌ی جایزه نوبل و متخصص در زمینه سیستمهای دینامیک، به کارروی پیچیدگی محاسبات نیز علاقمند است. در این زمینه پنداره‌ای دارد که به (SMVC) پنداره‌ی مقدار میانگین سمیل مشهور است.
سمیل ثابت کرد که برای چندجمله ای مختلط $p(z)$ از درجه‌ی d و با نقاط بحرانی $z_۱, ..., z_{d-۱}$ که $p(۰) = ۰$ و $p'(۰) \neq ۰$، نامساوی زیر برای $K = ۴$ برقرار است:

$$\min_i \left| \frac{p(z_i)}{z_i p'(۰)} \right| \leq K.$$

او حدس زد که ثابت $K = ۱$ نیز در نامساوی فوق می تواند به جای ثابت $K = ۴$ قرار گیرد.

ظرف سی سال گذشته کارهای زیادی در این زمینه ارائه شده است، ما به چند مقاله اخیر در این زمینه پرداخته‌ایم، از جمله کارهایی از ای. تی. کرین[۲]، تی. سوگاوا[۳]، کیو. الرحمان[۴]، جی. شمیسر[۵] و دی. تیشلر[۶] را ارائه کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: *حدس مقدار میانگین سمیل، چندجمله‌ای مختلط، مقادیر بحرانی، نظریه‌ی تحلیلی چندجمله‌ایها، نقاط بحرانی.*

MSC 2010: 30C10, 30C15.

Stephen Smale[۱]
E. Crane[۲]
T. Sugawa[۳]
Q. I. Rahman،[۴]
G. Schmeisser[۵]
D. Tischler[۶]

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه به بررسی حدس مقدار میانگین سمیل (۱۹۸۱ میلادی) و کارهای انجام شده روی آن، که در زمینه ی نظریه ی تحلیلی چندجمله ایها است، پرداخته ایم.
آن چه به عنوان نظریه ی تحلیلی چندجمله ایها نام بردیم، دو منشأ متفاوت دارد. به طور سنتی در ریاضیات، چندجمله ایها صرفاً اشیاء جبری بودند و به عنوان عبارات جبری در هاله ای از ابهام قرار داشتند و صفر های آنها به عنوان ریشه های معادلات در نظر گرفته می شد.

از اواسط قرن نوزدهم به بعد، چندجمله ایها به عنوان توابعی بخصوص با خواص آنالیزی بسیار عالی، جلب توجه کردند و کارهایی روی آنها انجام شد. به طور مثال وایرشتراس[۷] در سال ۱۸۸۵ میلادی قضیه‌ی مشهور تقریب خود را به اثبات رساند، که اهمیت چندجمله ایها را به عنوان اشیاء آنالیز مشخص کرد در قرن بیستم میلادی، جبر پیشرفته جایی برای توجّه صرف به ارتباط ریشه های یک چندجمله ای با نقاط بحرانی آن باقی نگذاشت، در این زمینه به طور مستقل، فقط رسالات کمی مانند هندسه‌ی صفرهای یک چندجمله ای در صفحه ی مختلط، توسط ماردن[۸] در سال ۱۹۴۹ نوشته شد.
در فصل (۱) تعاریف، مفاهیم و قضایایی که در طول پایان نامه از آنها استفاده می شود را بیان و اثبات قضیه ها را با ذکر مرجع، به خواننده واگذار کرده ایم.
در فصل (۲) ابتدا حدس سمیل را بیان کرده ایم که می گوید: برای چندجمله ای $p(z)$ از درجه ی d و با نقاط بحرانی $z_1, \ldots, z_{d-1}$ که $p(0) = 0$ و $p'(0) \neq 0$، نامساوی $\min_i \left| \frac{p(z_i)}{z_i p'(0)} \right| \leq K$، با ثابت $K = 1$ و یا در برخی موارد با $K = 1 - \frac{1}{d}$ روی می دهد. سپس حدس قویتر تیشلر را بیان کرده ایم که می گوید: با همان مفروضات حدس سمیل، نامساوی $\min_i \left| \frac{p(z_i)}{z_i p'(0)} - \frac{1}{2} \right| \leq K$، برای $K = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ برقرار است. آنگاه با استفاده از حدس تیشلر حدس سمیل را برای $d \leq 4$ به اثبات می رسانیم، و در نهایت به بررسی حدس تیشلر می پردازیم و ثابت می‌کنیم حدس تیشلر برای $d \geq 5$ برقرار نیست.

هدف فصل (۳) به طور کلی تقلیل ثابت K در نامساوی سمیل، بدون کاستن یا اضافه کردن به مفروضات آن است. ابتدا اثبات نامساوی با ثابت $K = 4$ را ذکر می کنیم، که خود سمیل آن را ثابت کرده است. سپس برای چندجمله ای $p(z)$ از درجه ی d، این ثابت را به ثابت کمتر $K_0(d) = 4^{\frac{d-2}{d-1}}$ تقلیل می دهیم و در ادامه، این ثابت را نیز به ثابت های به ترتیب کمتر $K_1(d) = 4\left(\frac{d-1}{d+1}\right)$ و $K_2(d) = 4\frac{1+(d-2)4^{\frac{1}{1-d}}}{d+1}$ می رسانیم. آنگاه کمترین ثابت K که تاکنون به دست آمده است را ارائه می دهیم، این ثابت برای $d \leq 6$ برابر با $K_3(d) = \frac{2^d-(d+1)}{d(d-1)}$، برای $d = 7$ همان $K_2(d)$ و برای $d \geq 8$ برابر $K_4(d) = 4 - \frac{2.263}{\sqrt{d}}$ است. در نهایت تمام ثابتهای به دست آمده را با هم مقایسه می‌کنیم.

---

[۷] K. Weierstrass

[۸] M. Marden

در فصل (۴) حدس سمیل را برای چندجمله ایهای خاص بررسی می کنیم، یعنی سعی می کنیم حدس سمیل را با مفروضات بیشتری به دست آوریم، در موارد زیر منظور چندجمله ای هایی است که در مفروضات حدس سمیل صدق می کنند. ابتدا ثابت می کنیم حدس سمیل برای چندجمله ایهایی که نقاط بحرانی آنها حقیقی هستند (که لزوماً ریشه‌های آنها نیزحقیقی هستند) برقرار است، و حتی در ادامه برای این دسته از چندجمله ایها ثابت حدس را به ثابت $K = ۲/۳$ نیز بهبود می بخشیم. سپس ثابت می کنیم حدس سمیل برای چندجمله ایهایی که ریشه‌های غیر صفر آنها هم اندازه اند و برای زیر رده ای از چندجمله ایهای با ضرایب حقیقی نیز برقرار است. در ادامه، حدس سمیل را برای چندجمله ایهای خاص دیگر با ثابتهای مختلف به دست می آوریم.

در فصل (۵) ابتدا دوگان حدس مقدار میانگین سمیل را که به ترتیب زیر بیان می شود، ارائه داده و به اثبات می رسانیم:
برای چندجمله ای $p(z)$ از درجه ی d و با نقاط بحرانی $z_۱, ..., z_{d-۱}$ که $p(۰) = ۰$ و $p'(۰) \neq ۰$، نامساوی $\max_i \left|\frac{p(z_i)}{z_i p'(۰)}\right| \geq \frac{۱}{d۴^d}$، برقرار است.
آنگاه تعمیم حدس سمیل را به ترتیب زیر بیان می کنیم: اگر p یک چندجمله ای با درجه ی d باشد به طوری که $p(۰) = p'(۰) = ... = p^{(s-۱)}(۰) = ۰$ و $p^{(s)}(۰) \neq ۰$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\min\left\{\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta^s p^{(s)}(۰)}\right| : p^{(s)}(\zeta) = ۰\right\} \leq \frac{۱}{s!} - \frac{(d-s)!}{d!}.$$

و در نهایت این تعمیم را برای $s = d-۱, d-۲, d-۳$ به اثبات می رسانیم، که در واقع اثباتی برای درجه های $d = ۲, ۳, ۴$ حدس سمیل است.
در فصل (۶) نتیجه گیری کلی و کارهای شخصی انجام شده روی حدس سمیل را بیان کرده و ایده‌ای کلی برای ادامه‌ی کار روی آن را نیز ارائه داده‌ایم.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم کلی و قضایای مورد نیاز از آنالیز یک متغیره ی مختلط را یاد آوری می کنیم و مفاهیم دیگری از قبیل متریک هذلولوی و ظرفیت لگاریتمی را به طور کامل تعریف کرده و برای آنها مثال می‌آوریم. خواننده با برخی از این مفاهیم آشنا فرض شده است. و هدف ما تثبیت نمادها و واژه‌های به کار رفته در فصل های بعدی است. از تکرار تعریف های ابتدائی خودداری کرده و به ذکر آنچه بارها در بقیه‌ی فصل ها به کار برده ایم، بسنده می کنیم.

۲.۱ صفحه ی مختلط

تعریف ۱.۲.۱
نماد $\mathbb{C}$ را برای صفحه ی مختلط به کار می بریم. هر عدد $z \in \mathbb{C}$ را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad i^{۲} = -۱$$

اعداد x و y را به ترتیب، قسمت های حقیقی و موهومی z می نامیم و می نویسیم:

$$x = Rez \qquad , \qquad y = Imz$$

اندازه ی z را با $|z|$ نشان می دهیم و داریم $|z| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$.

همچنین مزدوج هر عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت $\bar{z} = x - iy$ تعریف می کنیم.

عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت $z = re^{i\theta}$ نیز می توان نشان داد که در آن $r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ و $\theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x})$، و e عدد نپر است.

- از لحاظ جبری $\mathbb{C}$ یک فضای برداری دو بعدی روی $\mathbb{R}$ است، و نرم وابسته به آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|z\| = (z\bar{z})^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad z \in \mathbb{C} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$$

• از لحاظ توپولوژیکی $\mathbb{C}$ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ با بعد حقیقی ۲ است؛ در نتیجه زیر مجموعه ی $U \subset \mathbb{C}$ باز است، هر گاه U به عنوان زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^۲$ باز باشد (برای همبند بودن $U \subset \mathbb{C}$ نیز به همین ترتیب).

تعریف ۲.۲.۱

نماد $\mathcal{D}(c; r)$ را برای قرص باز به مرکز c و شعاع r به کار برده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{D}(c; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$$

و نیز از نماد $\mathbb{D}$ برای نشان دادن قرص باز یکه استفاده می کنیم، یعنی $\mathbb{D} = \mathcal{D}(۰; ۱)$.

تعریف ۳.۲.۱

زیر مجموعه ی غیرتهی، باز و همبند از $\mathbb{C}$ را ناحیه می نامیم، و یک ناحیه همراه هیچ، یک یا چند و یا تمام نقاط مرزی اش را دامنه (حوزه) گوئیم.

تعریف ۴.۲.۱

صفحه ی مختلط گسترش یافته را با $\hat{\mathbb{C}}$ نشان داده و به صورت $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ تعریف می کنیم. یک مدل هندسی برای $\hat{\mathbb{C}}$ همان کره‌ی ریمان است، که کره ی واحد سه بعدی فضای اقلیدسی است.

تعریف ۵.۲.۱

زیر ناحیه‌ی سره Ω از $\mathbb{C}$ را همبند ساده گوئیم هرگاه $\hat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ همبند باشد.

۷.۲.۱ نامساوی کوشی-شوارتز[۱]

اگر $z_۱, ..., z_n$ و $\omega_۱, ..., \omega_n$ اعداد ی مختلط باشند، آنگاه

$$\left| \sum_{j=۱}^{n} z_j \omega_j \right|^۲ \leq \sum_{j=۱}^{n} |z_j|^۲ \sum_{j=۱}^{n} |\omega_j|^۲.$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به گزاره ی (۴.۲.۱) مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

[۱] Cauchy–Schwarz inequality

۳.۱ چندجمله ایهای مختلط

تعریف ۱.۳.۱

عبارت $p(z) = a_d z^d + ... + a_۱ z + a_۰$ را که در آن $a_۰, ..., a_d$ اعدادی مختلط هستند، یک چندجمله ای مختلط گوئیم. اگر $a_d \neq ۰$ باشد، می گوئیم چندجمله ای p از درجه ی d است. به یک چندجمله ای که در آن $a_d = ۱$ باشد، چندجمله ای یکین گوئیم.

تعریف ۲.۳.۱

نقطه ی $z_j \in \mathbb{C}$ را ریشه ی ساده ی $p(z)$ می گوئیم هرگاه $p(z_j) = ۰$ و $p'(z_j) \neq ۰$، و آن را یک ریشه ی دارای مرتبه تکرار m می نامیم، هر گاه داشته باشیم:

$$p(z_j) = p'(z_j) = ... = p^{(m-۱)}(z_j) = ۰, \qquad p^{(m)}(z_j) \neq ۰$$

تعریف ۳.۳.۱

نقطه ی $\zeta \in \mathbb{C}$ را نقطه ی بحرانی p گوئیم اگر و فقط اگر $p'(\zeta) = ۰$. در این صورت مقدار $p(\zeta)$ را مقدار بحرانی p می نامیم.

فرمول ویته[۲] ۴.۳.۱

فرض کنیم چندجمله ای $p(z) = a_d z^d + ... + a_۱ z + a_۰$ دارای ریشه های $z_۱, ..., z_d$ باشد، در این صورت تساویهای زیر برقرار هستند:

$$\frac{a_{d-۱}}{a_d} = -\sum_{j=۱}^{d} z_j, \quad \frac{a_{d-۲}}{a_d} = \sum_{۱\leq j<k\leq d} z_j z_k, ..., \frac{a_۰}{a_d} = (-۱)^d z_۱ ... z_d.$$

دترمینان واندرموند[۳] ۵.۳.۱

دترمینان واندرموند اعداد مختلط $\omega_۱, \omega_۲, ..., \omega_n$ را با $\det(\omega_۱, \omega_۲, ..., \omega_n)$ نشان می دهیم که عبارتست از: دتر مینان ماتریسی $n \times n$ که سطر i-ام آن به ترتیب درایه های $\omega_۱^{i-۱}, \omega_۲^{i-۱}, ..., \omega_n^{i-۱}$ باشد.

---

[۲] viète

[۳] Vandermonde determinant

۶.۳.۱ نامساوی آدامار[۴]
برای هر ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$، داریم: $|\det A| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.
تساوی روی می دهد اگر و فقط اگر $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\bar{a}_{lj} = 0$ برای $k \neq l$.

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۳.۷.۱) مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

۷.۳.۱ تعریف
فرض کنیم چندجملهایهای p و q به ترتیب زیر باشند:

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = a_n \prod_{\nu=1}^{n}(z - z_\nu), \qquad q(z) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^\mu = b_m \prod_{\mu=1}^{m}(z - \omega_\mu)$$

در این صورت برآیند این دو چندجمله ای را با $R(p,q)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} R(p,q) &:= a_n^m b_m^n \prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu - \omega_\mu) \\ &= (-1)^{nm} b_m^n \prod_{\mu=1}^{m} p(\omega_\mu) = a_n^m \prod_{\nu=1}^{n} q(z_\nu). \end{aligned}$$

طبق این تعریف می دانیم که برآیند دو چندجمله ای صفر است اگر و فقط اگر ریشه های برابر داشته باشند. این برآیند با دترمینان زیر(که دارای m ردیف از ضرایب p و n ردیف از ضرایب q است) نیز نشان داده می شود.

$$R(p,q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

---
[۴] Hadamard's inequality

۸.۳.۱ فرمول نیوتن[۵]

فرض کنیم چندجمله ای $p(z) = a_n z^n + ... + a_۱ z + a_۰$ دارای ریشه های $z_۱, ..., z_n$ باشد، قرار دهیم:

$$p_j := \sum_{\nu=۱}^{n} z_\nu^j \qquad (j = ۰, ۱, ...)$$

در این صورت ضرایب چندجمله ای $p(z)$ را می توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\sum_{\nu=۰}^{\min\{j,n\}} a_{n-\nu} p_{j-\nu} = (n-j) a_{n-j}$$

این تساوی برای $j \leq n$ برقرار است و برای $j > n$ برابر صفر است.

۹.۳.۱ تعریف

چندجمله ای $p(z) = a_n z^n + ... + a_۱ z + a_۰$ را در نظر می گیریم. گوئیم چندجمله‌ای $q(z) = b_n z^n + ... + b_۱ z + b_۰$ با اختلال کوچک $p(z)$ به دست آمده است هرگاه، مقدار کوچک $\delta > ۰$ موجود باشد به طوری که، برای هر اندیس $۱ \leq j \leq n$ داشته باشیم $|a_j - b_j| < \delta$.

۱۰.۳.۱ قضیه ی پیوستگی

فرض کنیم p یک چندجمله ای یکین با درجه ی n و ریشه های مجزای $z_۱, ..., z_k$ با درجه تکرارهای $m_۱, ..., m_k$ به ترتیب زیر باشد:

$$p(z) = \sum_{\nu=۱}^{n} a_\nu z^\nu = \prod_{j=۱}^{k} (z - z_j)^{m_j} \qquad (m_۱ + ... + m_k = n)$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ طوری باشد که $\varepsilon < \min_{۱ \leq i < j \leq k} |z_i - z_j| / ۲$، در این صورت یک $\delta > ۰$ موجود است به طوری که هر چندجمله ای یکین $q(z) = \sum_{\nu=۱}^{n} b_\nu z^\nu$ که ضرایب آن برای $\nu = ۱, ..., n-۱$ در رابطه ی $|b_\nu - a_\nu| < \delta$ صدق می کند، دقیقاً داری m_j ریشه در قرص زیر است:

$$\mathcal{D}(z_j; \varepsilon) \qquad (j = ۱, ..., k).$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۱.۳.۱) مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

[۵] Newton

• در اثبات قضایای فصل های مختلف این پایان نامه، بارها از گزاره ی زیر استفاده کرده ایم، که در واقع یک نتیجه از قضیه ی تابع وارون و قضیه ی مونودرومی است.

گزاره ۱۱.۳.۱
فرض کنیم چندجمله ای $p(z)$ در $\mathcal{D}(۰;r)$ هیچ مقدار بحرانی نداشته باشد، و بر آن داشته باشیم: $p(۰)=۰,\ p'(۰)\neq ۰$. در این صورت شاخه‌ی تک مقداری f از تابع وارون $p^{-۱}(z)$ با شرط $f(۰)=۰$ بر کل $\mathcal{D}(۰;r)$ موجود است.
اثبات: از آنجا که $p'(۰)\neq ۰$ ، طبق قضیه ی تابع وارون، $p(z)$ در همسایگی کوچک صفر وارون دارد، و بنابر قضیه ی مونودرومی $p^{-۱}(z)$ می تواند به یک تابع تک مقداری به کل $\mathcal{D}(۰;r)$ توسیع یابد.

۴.۱ توابع یک متغیره ی مختلط

تعریف ۱.۴.۱
فرض کنیم $\Omega\subset\mathbb{C}$ یک مجموعه ی باز باشد، تابع $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ را در Ω تحلیلی (یا تمام- ریخت) گوئیم، هرگاه:
الف) f بر Ω پیوسته باشد.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=۰$.

تعریف ۲.۴.۱
تابع $f(z)$ بر زیر مجموعه ی باز Ω تک ارز است، اگر و فقط اگر دارای دو شرط زیر باشد:

الف) $f(z)$ بر Ω تحلیلی باشد.

ب) $f(z)$ بر Ω یک به یک باشد، یعنی:

$$f(z_۱)\neq f(z_۲)\qquad (\forall z_۱,z_۲\in\Omega,\quad z_۱\neq z_۲).$$

تعریف ۳.۴.۱

هر تابع تعریف شده بر قرص باز یکه $\mathbb{D}$ به شکل زیر را یک تابع کوبه[6] می گوئیم.

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n.$$

قضیه ی یک-چهارم کوبه[7] ۴.۴.۱

اگر $f(z)$ روی $\mathbb{D}$ یک تابع تک ارز باشد، آنگاه:

$$\mathcal{D}(f(0); |f'(0)|/4) \subseteq f(\mathbb{D}).$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۶.۱.۱۳) مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

تعریف ۵.۴.۱

نگاشت $f(z)$ را در نقطه ی z_0 یک نگاشت همدیس گوئیم هر گاه f در آن نقطه تحلیلی باشد و $f'(z_0) \neq 0$.

• **تذکر:** اگر نگاشت $f(z)$ در z_0 همدیس باشد، در همسایگی z_0 نیز همدیس خواهد بود، زیرا در این همسایگی لزوماً تحلیلی است و در این صورت یک همسایگی از z_0 موجود است که در سراسر آن داشته باشیم $f'(z_0) \neq 0$.

قضیه ی تیلور[8] ۶.۴.۱

فرض کنیم تابع $f(z)$ در سراسر قرص باز $\mathcal{D}(z_0; R_0)$ تحلیلی باشد. در این صورت در هر نقطه ی z از آن قرص، $f(z)$ دارای نمایش سری زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (z \in \mathcal{D}(z_0; R_0)).$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۱.۲.۵) مرجع [۳] مراجعه کنید.

قضیه ی هورویتز[9] ۷.۴.۱

فرض کنیم $U \subseteq \mathbb{C}$ مجموعه ای باز وهمبند باشد و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع تحلیلی باشد که در هیچ نقطه ایی از U صفر نمی شوند. اگر دنباله ی $\{f_n\}$ بر یک زیر مجموعه ی فشرده ی U به طور یکنواخت به f_0 همگرا باشد، آنگاه، یا f_0 در هیچ نقطه ای صفر نمی شود یا $f_0 \equiv 0$.

[6] Köbe function
[7] Köbe's one-quarter theorem
[8] Taylor
[9] Hurwitz theorem

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۳.۳.۵) مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

۵.۱ متریک هذلولوی

تعریف ۱.۵.۱
هر زیر ناحیه ی همبند ساده Ω از صفحه ی مختلط متریک هذلولوی $\lambda_\Omega(z)|dz|$ را می پذیرد، که در آن $\lambda_\Omega(z)$ چگالی هذلولوی Ω در نقطه ی z، و $|dz|$ بیانگر طول اقلیدسی است.

صفحه ی هذلولوی عبارتست از قرص باز یکه $\mathbb{D}$، با متریک هذلولوی روی آن، که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| = \frac{۲|dz|}{۱ - |z^۲|}.$$

تعریف ۲.۵.۱
فرض کنیم f یک نگاشت همدیس از ناحیه ی همبند ساده ی Ω به $\mathbb{D}$ باشد. در این صورت متریک هذلولوی بر روی Ω به ترتیب زیر تعریف می شود.

$$\lambda_\Omega(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)|.$$

قضیه ۳.۵.۱
فرض کنیم $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ دو زیر ناحیه ی سره و همبند ساده از $\mathbb{C}$ باشند و نگاشت $f : \Omega_۱ \longrightarrow \Omega_۲$ یک نگاشت همدیس باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lambda_{\Omega_۱}(z) = \lambda_{\Omega_۲}(f(z))|f'(z)|.$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۳.۶) مرجع [۲] مراجعه کنید.

• **مثال ۴.۵.۱** ناحیه ی بالای صفحه ی مختلط $\mathbb{H} = \{x + iy : y > ۰\}$، را در نظر می گیریم. می دانیم که نگاشت $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ با ضابطه ی $g(z) = (z - i)/(z + i)$ یک نگاشت همدیس است، بنابراین به دست می آوریم:

$$\lambda_{\mathbb{H}}(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(g(z))|g'(z)| = \frac{۲|dz|}{۱ - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^۲} \cdot \left|\frac{۲i}{(z+i)^۲}\right| = \frac{۱}{Im(z)}$$

لم شوارتز[۱۰] ۵.۵.۱

فرض کنیم تابع f بر قرص باز یکه تحلیلی باشد، و $f(\circ) = \circ$ و به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq ۱$. در این صورت خواهیم داشت؛ $|f'(\circ)| \leq ۱ \quad , \quad |f(z)| \leq |z|$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۲.۵.۵) مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

قضیه ۶.۵.۱

فرض کنیم Ω زیر ناحیه ی سره و همبند ساده از $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت به ازای هر $z \in \Omega$ داریم:

$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{۱}{۲dist(z, \partial\Omega)}.$$

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۶.۸) مرجع [۲] مراجعه کنید.

۶.۱ پتانسیل لگاریتمی

تعریف ۱.۶.۱

فرض کنیم E یک زیر مجموعه ی فشرده از $\mathbb{C}$ و $\mathcal{B}(E)$ مجموعه ی تمام اندازه های بورل μ روی $\mathbb{C}$ باشد، که محمل آنها زیر مجموعه ی فشرده ی E است. قرار دهیم:

$$I(\mu) = \int_{E\times E} \log|z-\omega| d\mu(z) d\mu(\omega)$$

در این صورت پتانسیل لگاریتمی مجموعه ی E را چنین تعریف می کنیم:

$$cap(E) := \sup_{\mu\in\mathcal{B}(E)} e^{I(\mu)}$$

قضیه ۲.۶.۱

الف) اگر $E_۱ \subset E_۲$ آنگاه $cap(E_۱) \leq cap(E_۲)$.

ب) اگر $E \subset \mathbb{C}$ آنگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داریم $cap(\alpha E + \beta) = |\alpha| cap(E)$.

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۲.۱.۵) مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

---

[۱۰] Schwarz's lemma

قضیه ۳.۶.۱
اگر $\omega \in \mathbb{C}$ و $r > ۰$، آنگاه $cap(\bar{\mathcal{D}}(\omega;r)) = r$.
اثبات: برای مشاهده ی اثبات به فرع (۲.۲.۵) مرجع [۱۸] مراجعه کنید.
قضیه ۴.۶.۱
فرض کنیم $K_۱$ و $K_۲$ زیر مجموعه های فشرده از $\mathbb{C}$ باشند، و فرض کنیم $D_۱$ و $D_۲$ مؤلفه های شامل ∞ و به ترتیب شامل $\hat{\mathbb{C}}\backslash K_۱$ و $\hat{\mathbb{C}}\backslash K_۲$ باشند. اگر نگاشت $f : D_۱ \longrightarrow D_۲$ یک نگاشت همدیس باشد به طوری که $f(z) = z + O(۱)$ وقتی $z \to \infty$، آنگاه $cap(K_۱) = cap(K_۲)$.

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۳.۲.۵) مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

• **مثال ۵.۶.۱** تابع $f(z) = z + \frac{۱}{z}$ را در نظر می گیریم. این تابع $\hat{\mathbb{C}}\backslash\bar{\mathbb{D}}$ را به طور همدیس به $\hat{\mathbb{C}}\backslash[-۲,۲]$ می نگارد، و وقتی $z \to \infty$ داریم $f(z) = z + O(۱)$، لذا با استفاده از دو قضیه ی قبل داریم:
$$cap([-۲,۲]) = cap(\bar{\mathbb{D}}) = ۱$$

• **مثال ۶.۶.۱** فرض کنیم $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع تک ارز با $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) \neq ۰$ باشد. طبق قضیه ی یک-چهارم کوبه داریم $f(\mathbb{D}) \supseteq \mathcal{D}(۰;|f'(۰)|/۴)$. اکنون مجموعه ی زیر را تعریف می کنیم:
$$K = \left\{\frac{|f'(۰)|}{z} \in \mathbb{C} : z \notin f(\mathbb{D})\right\}$$

تابع $f_۱ : \hat{\mathbb{C}}\backslash\bar{\mathbb{D}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}\backslash K$ را به صورت مقابل تعریف می کنیم: $f_۱(z) = \dfrac{۱}{f(۱/z)}$.

در این صورت $f_۱$ یک همئومورفیسم همدیس است که $f_۱(z) = z + O(۱)$، وقتی $z \to \infty$. با استفاده از قضیه های (۳.۶.۱) و (۴.۶.۱) می بینیم که:
$$cap(K) = cap(\bar{\mathbb{D}}) = ۱$$

قضیه ۷.۶.۱
فرض کنیم K یک زیر مجموعه ی فشرده و همبند از $\mathbb{C}$ باشد. اگر $d = diam(K)$ (قطر K)، آنگاه $cap(K) \geq d/۴$.

اثبات: برای مشاهده ی اثبات به قضیه ی (۲.۳.۵) مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

فصل ۲

حدس مقدار میانگین سمیل و حدس تیشلر

۱.۲ مقدمه

در سال ۱۹۸۱ میلادی سمیل مقاله ای مربوط به یافتن الگوریتمی سریع برای یافتن ریشه های چندجمله ایهای مختلط با تخمین های متوالی منتشر کرد [۲۳]، و سعی کرد تا کوچکترین مقدار ثابت حقیقی K را طوری بیابد که نامساوی زیر برای حداقل یک نقطه بحرانی ζ از چندجمله ای p (با درجه d) و برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $p'(z) \neq 0$، برقرار باشد.

$$|p'(z)| \geq \frac{1}{K} \left| \frac{p(\zeta) - p(z)}{\zeta - z} \right|$$

K را ثابت سمیل و این نامساوی را نامساوی سمیل می نامیم.
او در همان مقاله این نامساوی را با ثابت $K = 4$ اثبات کرد (این اثبات را در فصل بعد آورده ایم)، و به عنوان یک مسئله مطرح کرد که، آیا نامساوی فوق برای ثابت $K = 1$ یا $K = (d-1)/d$ برقرار است؟ وی این مسئله را به عنوان یک حدس ارائه داد.
طبق نامساوی سمیل، مشتق چندجمله‌ای داده شده p در هر نقطه دلخواه z، می تواند توسط شیب خطوطی از نمودار $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \omega = p(z)\}$،که نقطه $(z, p(z))$ را به نقطه ی ثابت $(\zeta, p(\zeta))$ (ζ یک نقطه بحرانی است) متصل می سازد، برآورد شود. واز این طریق، نامساوی سمیل با قضیه مقدار میانگین ارتباط پیدا می کند.
البته می دانیم که قضیه مقدار میانگین برای توابع مختلط برقرار نیست.
با استفاده از جایگزینی $q(.) := p(.+z) - p(z)$، می توانیم در نامساوی سمیل، فقط آن دسته از چندجمله‌ایهای p از درجه d را در نظر بگیریم که $p(0) = 0$ و $p'(0) \neq 0$. برای سادگی در نوشتار مجموعه ی تمام این چندجمله‌ایها را با $\mathcal{P}_d$ نشان می دهیم.

حدس سمیل: اگر $p \in \mathcal{P}_d$ آنگاه

$$\min\left\{\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)}\right| : p'(\zeta) = ۰\right\} \leq K$$

که $K = ۱$ یا در برخی موارد $K = (d-۱)/d$.
چندجمله ای $p(z) = a_۱ z + a_d z^d$ که در آن $a_۱, a_d$ اعداد مختلط ناصفر هستند، تساوی را در حدس سمیل برقرار می کند.
در سال ۱۹۸۹ میلادی تیشلر با ارائه و اثبات قضیه ی زیر حدس سمیل را برای $d \leq ۴$ به اثبات رساند [۲۴].
وی همچنین حدس زد که این قضیه برای هر درجه d برقرار باشد، که این حدس از حدس سمیل قویتر است.

قضیه فرض کنیم $p \in \mathcal{P}_d$. اگر $d \leq ۴$ آنگاه:

$$\min\left\{\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)} - \frac{۱}{۲}\right| : p'(\zeta) = ۰\right\} \leq \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{d}$$

اثبات این قضیه را در بخش بعد آورده ایم. از آنجا که برای هر نقطه بحرانی ζ داریم:

$$\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)}\right| = \left|\frac{۱}{۲} - \left(\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)} - \frac{۱}{۲}\right)\right| \leq \frac{۱}{۲} + \left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)} - \frac{۱}{۲}\right| \leq ۱ - \frac{۱}{d}$$

لذا با اثبات این قضیه در واقع حدس برای $d \leq ۴$ به اثبات رسیده است. در سال ۲۰۰۵ میلادی تایسون[۱] ثابت کرد که حدس تیشلر برای $d \geq ۵$ برقرار نیست [۲۵]، که در بخش سوم به بررسی آن پرداخته ایم.
حدس سمیل تاکنون با روشهای جبری فقط برای $d \leq ۴$ اثبات شده است. در سال ۲۰۰۳ میلادی شمیدر[۲] در مقاله ای اثباتی کلی از حدس سمیل ارائه کرد [۱۹]، که ظاهراً دارای ایراد بود و پذیرفته نشد.
در سال ۲۰۰۷ مارینف[۳] و سندوف[۴] در مقاله ای مشترک حدس سمیل را با روشهای محاسباتی عظیم، برای $d \leq ۱۰$ به اثبات رساندند [۲۲]. تاکنون برای درجه های بالاتر اثباتی ارائه نشده است.

---

[۱] Jeremy T. Tyson
[۲] G. Schmieder
[۳] P. Marinov
[۴] B. Sendov

۲.۲ اثبات حدس مقدار میانگین سمیل

همانطورکه در بخش قبل اشاره کردیم، با اثبات قضیه ی زیر در واقع حدس سمیل برای $d \leq ۴$ اثبات شده است.

قضیه ۱.۲.۲ فرض کنیم $p \in \mathcal{P}_d$. اگر $d \leq ۴$ آنگاه:

$$\min\left\{\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(۰)} - \frac{۱}{۲}\right| : p'(\zeta) = ۰\right\} \leq \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{d}.$$

اثبات قضیه:

می دانیم که چندجمله ای مفروض به شکل زیر است:

$$p(z) = \sum_{t=۱}^{d} a_t z^t \qquad (۲ \leq d \leq ۴,\ \ a_۱ a_d \neq ۰).$$

فرض کنیم $\zeta_۱, ..., \zeta_{d-۱}$ نقاط بحرانی p باشند، برای سادگی قرار می دهیم:

$$S_j := \frac{p(\zeta_j)}{\zeta_j p'(۰)} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \sum_{t=۲}^{d} \frac{a_t}{a_۱} \zeta_j^{t-۱} \qquad (j = ۱, ..., d-۱)$$

اکنون می خواهیم نشان دهیم که:

$$\min_{۱\leq j \leq d-۱} |S_j| \leq \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{d}$$

حالت $d = ۲$ بدیهی است. برای حالت $d = ۳$، دو نقطه بحرانی داریم و با توجه به ضرایب p' به دست می آوریم:

$$\frac{a_۱}{۳a_۳} = \zeta_۱\zeta_۲, \qquad \frac{۲a_۲}{۳a_۳} = -(\zeta_۱ + \zeta_۲)$$

به این ترتیب می توان نوشت:

$$S_j = \frac{۳\zeta_۱\zeta_۲ - ۳\zeta_j(\zeta_۱ + \zeta_۲) + ۲\zeta_j^۲}{۶\zeta_۱\zeta_۲} \qquad (j = ۱, ۲)$$

بنابراین $S_۱ = -\frac{\zeta_۱}{۶\zeta_۲}$ و $S_۲ = -\frac{\zeta_۲}{۶\zeta_۱}$، و به این ترتیب یکی از حالتهای $|S_۱| \leq ۱/۶$ یا $|S_۲| \leq ۱/۶$ روی می دهد، که اثبات این حالت را تمام می کند.

اما برای اثبات حالت $d = ۴$، برای سه نقطه بحرانی p روابط زیر را داریم: