بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی
(گرایش تحقیق در عملیات)

عنوان :

جواب‌های تنک دستگاه‌های فرومعین

از:

مجتبی گلستانی‌پور

استاد راهنما:

دکتر مازیار صلاحی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

آنان که وجودم جز هدیه وجودشان نیست، پدر و مادر عزیزم

و همه رهروان طریق دانش

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونم شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی ام ساخت. از خانواده خوبم که با وجود مشکلات فراوان، در تمام مراحل تحصیل، پشتیبان من و در کنارم بوده اند، نهایت تشکر را دارم. بر خود لازم می دانم که از استاد گرامی ام جناب آقای دکتر مازیار صلاحی به خاطر راهنمایی های ارزشمند و زحمات فراوانشان در راستای انجام این پایان نامه به طور ویژه تقدیر نمایم. همچنین از همه کسانی که از آنان علم آموختم و تمام عزیزانی که به نوعی در اتمام این پایان نامه مرا یاری نمودند، از جمله جناب آقای مهندس بهمن زنج تشکر می کنم.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

چکیده:

جواب‌های تنک دستگاه‌های فرومعین
مجتبی گلستانی‌پور

بسیاری از مسائل اساسی در مهندسی برق، آمار و ریاضی کاربردی با یافتن جواب‌های تنک دستگاه‌های خطی فرومعین درگیر هستند. در حالت کلی به دست آوردن تنک‌ترین جواب، یک مسأله NP-Hard است. در این پایان‌نامه این مسأله را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا مدل برنامه‌ریزی صحیح آمیخته آن را بررسی و نقاط ضعف این مدل را بیان می‌کنیم. سپس شرایطی را ارائه می‌دهیم که این مسأله با یک مسأله محدب معادل می‌شود. با توجه به موفقیت روش‌های حریصانه در حل این مسأله، یکی از معروفترین این روش‌ها را نیز معرفی می‌کنیم. در پایان با ارائه مثال‌های متعدد، به مقایسه روش حریصانه و شکل برنامه‌ریزی خطی مسأله محدب می‌پردازیم.

کلید واژه:

دستگاه خطی فرومعین، جواب تنک، مسأله NP-Hard، برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته، مسأله محدب، الگوریتم‌های حریصانه.

Abstract:

Sparse solutions of underdetermined systems

Mojtaba Golestanipour

Many problems in electrical engineering, statistics and applied mathematics involve finding the sparse solutions of underdetermined linear systems. In general, finding the sparsest solutions is NP-Hard. In this thesis, we study this problem. First we consider it's mixed integer linear programming model and illustrate it's disadvantages. Then, we present conditions under which the problem is equivalent to a convex problem. Due to the success of greedy algorithms on solving this problem, we also introduce one of the most popular one. At the end, by presenting several examples, we compare the greedy approach and the linear programming form of the convex problem.

Key words:
Underdetermined linear system, sparse solution, NP-Hard problem, mixed integer linear programming, convex problem, greedy algorithms.

پیشگفتار:

شاید گفتن این اغراق نیست که دستگاه‌های خطی تقریباً در همه شاخه‌های علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. در بسیاری از کاربردها این مسائل فرومعین هستند. اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی فرومعین دارای رتبه کامل باشد، این دستگاه دارای بی‌نهایت جواب خواهد بود. از بین همه جواب‌ها، بعضی از جواب‌های خاص این دستگاه‌ها در کاربردهای مختلف، مورد توجه ویژه قرار می‌گیرند. یک نوع مهم از آن‌ها، جواب‌های تنک هستند، به طوری که یافتن تنک‌ترین جواب در بسیاری از زمینه‌ها، یک هدف مهم به شمار می‌رود. با توجه به قدمت بررسی دستگاه‌های معادلات خطی فرومعین در جبر خطی، بی شک این نوع جواب‌ها نیز دارای قدمتی به همان میزان هستند. اما به طور خاص، نشانه‌های اولیه ایده اصلی یافتن این نوع جواب‌ها، در یک تحقیق پیشگام توسط مالات[۱] و ژانگ[۲] در سال **۱۹۹۳** ظاهر شد. کار آن‌ها برخی از ایده‌های اصلی در این زمینه، از جمله یک تکنیک حریصانه تعقیبی برای تخمین یک جواب تنک یک دستگاه خطی فرومعین را پیش رو قرار داد. در سال **۱۹۹۵** نیز، چن[۳]، دونوهو[۴] و ساوندرز[۵] از نرم ℓ_1 برای ارزیابی میزان تنکی استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که می‌توان برای به دست آوردن تنک‌ترین جواب، یک مسأله محدب را حل کرد [۵]. با این تحقیقات، زیربنای تحلیل‌های عمیق‌تر روش‌های مذکور و گسترش آن‌ها در کاربردها نهاده شد. در یکی از تحقیقات بعدی، دونوهو و هوئو[۶] در سال ۲۰۰۱ سوالاتی در این زمینه مطرح کرده و تا حدی پاسخ دادند که، آیا می‌توان موفقیت روش‌های مذکور را تضمین کرد؟ تحت چه شرایطی؟ [۱۴]. از آن زمان تا کنون، بر پایه ایده‌های حریصانه و تخفیف‌سازی، روش‌های متعددی از جمله الگوریتم‌های حریصانه کاراتر، روش‌های نقطه درونی، روش‌های هوموتوپی و غیره، در این زمینه به کار گرفته شده‌اند.

در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز از جبر خطی، آنالیز محدب و بهینه‌سازی و آشنایی با نرم‌افزار cvx بیان می‌شود. در فصل دوم ابتدا مسأله بهینه‌سازی یافتن تنک‌ترین جواب (تقریبی) یک دستگاه معادلات خطی فرومعین را تعریف کرده و با ارائه یک کاربرد مهم، اهمیت آن را بیان می‌کنیم. سپس مشکلات حل این مسأله را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین مدل برنامه‌ریزی صحیح آمیخته آن را بررسی کرده و نقاط ضعف این مدل را بیان می‌کنیم. در انتهای این فصل با آوردن قضایای مورد نیاز، شرایط هم‌ارزی این مسأله با یک مسأله محدب حاصل از تخفیف‌سازی آن را ارائه می‌کنیم. در فصل سوم، به برخی از الگوریتم‌های

[۱] Mallat [۲] Zhang [۳] Chen [۴] Donoho [۵] Saunders [۶] Huo

حل مسأله تخفیف‌سازی اشاره می‌کنیم. همچنین با توجه به عملکرد خوب روش‌های حریصانه در حل مسأله مورد بررسی، یکی از معروفترین این روش‌ها را معرفی می‌کنیم. در پایان این فصل با حل مثال‌های متعدد، روش‌های ارائه شده را مقایسه کرده و به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

فصل ۱

پیش‌نیاز

در این فصل برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی از جبر خطی و بهینه‌سازی را برای درک بهتر مطالب فصل‌های بعد بیان می‌کنیم.

۱-۱ مقدماتی از جبر خطی

ابتدا برخی مفاهیم مربوط به بردارها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱. یک مجموعه از بردارهای $\{x_1, \ldots, x_k\}$ در $\mathbb{R}^n$، وابسته خطی گفته می‌شوند، اگر اسکالرهای $c_1, \ldots, c_k$ که همگی با هم صفر نیستند، وجود داشته باشند، به طوری‌که $c_1x_1 + \ldots + c_kx_k = 0$. در غیر این صورت، مجموعه $\{x_1, \ldots, x_k\}$ مستقل خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۲. کوچکترین عدد صحیح مثبت r که بتوان هر بردار در زیرفضای X را به صورت ترکیب خطی حداکثر r بردار از آن نوشت، بعد زیرفضای X نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۳. هر مجموعه r تایی از بردارهای مستقل خطی زیرفضای X با بعد r، یک پایه برای آن تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱-۱-۴. یک مجموعه از بردارهای $\{x_1, \ldots, x_k\}$ در $\mathbb{R}^n$، متعامد گفته می‌شوند، اگر برای هر $i \neq j$ داشته باشیم

$$x_i^T x_j = 0.$$

به علاوه اگر برای هر i داشته باشیم $x_i^T x_i = 1$، مجموعه $\{x_1, \ldots, x_k\}$ یکامتعامد[1] نامیده می‌شود.

بنابراین مجموعه‌ای از بردارها که یک پایه برای یک زیرفضا تشکیل می‌دهد و یکامتعامد نیز هست، یک پایه یکامتعامد نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنید x یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد. آن‌گاه یک نرم بردار با نماد $||x||$ نمایش داده می‌شود و یک تابع پیوسته حقیقی مقدار از مولفه‌های $x_1, \ldots, x_n$ است که روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. برای هر بردار غیر صفر x، $||x|| \geq 0$. $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲. برای هر بردار x و هر اسکالر α، $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$.

۳. برای هر دو بردار x و y، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

[1] Orthonormal

تعریف ۱-۱-۶. برای هر عدد حقیقی $p \geq 1$، نرم p به صورت زیر تعریف می‌شود

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}.$$

تعریف ۱-۱-۷. برداری که نسبت به بعدش دارای تعداد کمی درایه غیر صفر است، بردار تنک نامیده می‌شود.

اکنون بعضی از مفاهیم مربوط به ماتریس‌ها که مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۸. فضای پوچ هر ماتریس $A_{m\times n}$ را با $N(A)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}.$$

تعریف ۱-۱-۹. ماتریس مربعی A متعامد است، هرگاه داشته باشیم

$$A^T A = AA^T = I.$$

تعریف ۱-۱-۱۰. ماتریس مربعی A را غالب قطری می‌نامند، هر گاه

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \ , \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

تعریف ۱-۱-۱۱. ماتریس متقارن A معین مثبت است، اگر برای هر بردار غیر صفر x داشته باشیم

$$x^T A x > 0.$$

برخی از ویژگی‌های سودمند ماتریس‌های معین مثبت عبارتند از:

۱. ماتریس A معین مثبت است، اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند.

۲. اگر ماتریس A معین مثبت باشد، همه ستون‌های آن مستقل خطی هستند.

۳. هر ماتریس متقارن غالب قطری با درایه‌های قطری مثبت، معین مثبت است.

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ مقادیر ویژه $A^T A$ باشند. در این صورت مقادیر تکین ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, n.$$

تعریف ۱-۱-۱۳. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$، b یک بردار m تایی ، x یک بردار n تایی و $m < n$ باشد. در این صورت $Ax = b$ یک دستگاه معادلات خطی فرومعین[1] نامیده می‌شود.

[1] Underdetermined

۱-۲ مجموعه‌ها و توابع محدب

تعریف ۱-۲-۱. مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x_1 و x_2 متعلق به S و به ازای هر عدد حقیقی $\lambda \in [0,1]$، ترکیب خطی $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ نیز متعلق به S باشد.

به طور هندسی مجموعه S را محدب گویند، هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به S، هر نقطه روی خط واصل بین x_1 و x_2 نیز متعلق به S باشد. ترکیب خطی $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ به ازای $\lambda \in [0,1]$ را، یک ترکیب خطی محدب می‌گویند.

تعریف ۱-۲-۲. تابع $f : S \to \mathbb{R}$ و مجموعه محدب ناتهی $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. تابع f محدب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x_1 و x_2 متعلق به S و به ازای هر عدد حقیقی $\lambda \in [0,1]$، داشته باشیم

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

هرگاه برای هر $x_1 \neq x_2$ و هر $\lambda \in (0,1)$ ، نابرابری قبل به صورت اکید برقرار باشد، تابع f را اکیداً محدب گویند.

به طور هندسی تابع f محدب است، اگر پاره خط بین نقاط $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ بالای نمودار f قرار گیرد.

۱-۳ مقدماتی از بهینه‌سازی

نه تنها زندگی روزانه ما، بلکه عملیات روزانه صنایع تولیدی و خدماتی با جواب‌های مسائل تصمیم‌گیری سر و کار دارند که یک هدف مشخص، مینیمم یا ماکزیمم می‌شود. علاوه بر این، این کار بدون نقض محدودیت‌های فیزیکی، فنی یا منطقی انجام می‌شود. این مسائل تصمیم‌گیری، مسائل بهینه‌سازی نامیده می‌شوند. بنابراین، بهینه‌سازی یک ابزار مهم در علوم تصمیم‌گیری و تحلیل سیستم‌های فیزیکی است، که برای استفاده از آن باید یک هدف را تعیین کنیم. هدف وابسته به مشخصات خاصی از سیستم است، که متغیر تصمیم یا مجهولات نامیده می‌شوند. اغلب، متغیرها به دلیلی محدود و یا مقید می‌شوند. از لحاظ ریاضی، بهینه‌سازی، ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع با در نظر گرفتن یک سری محدودیت‌ها روی متغیرهای آن است. شکل کلی مسائل بهینه‌سازی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.to} \ \ g_i(x) \le 0 \qquad i = 1, \dots, m \\ &\qquad\ h_i(x) = 0 \qquad i = 1, \dots, k \\ &\qquad\ x \in S \end{aligned} \tag{1-1}$$

که S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ است و توابع f، $g_1, \ldots, g_m$ و $h_1, \ldots, h_k$ روی S تعریف شده‌اند. $x_1, \ldots, x_n$ مجهولات، f تابع هدف، $g_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$ قیدهای نابرابری و $h_i = 0,\ i = 1, \ldots, k$ قیدهای برابری نامیده می‌شوند.

مسائل بهینه‌سازی دارای تقسیم‌بندی‌های گوناگونی هستند، که در اینجا آنچه که مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

مسائل مقید و نامقید

در مسأله (۱ - ۱) اگر هیچ یک از قیدهای ذکر شده وجود نداشته باشند، این مسأله نامقید خواهد بود و اگر حداقل یک قید وجود داشته باشد، یک مسأله‌ی مقید خواهد بود.

مسائل خطی و غیرخطی

اگر تابع هدف و قیدهای برابری و نابرابری مسأله‌ی (۱ - ۱) همگی خطی باشند، آن‌گاه این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است و در غیر این صورت یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی است.

مسائل محدب

اگر تابع هدف و توابع قیدهای نابرابری مسأله‌ی (۱ - ۱) همگی محدب، و توابع قیدهای برابری، آفینی باشند، آن‌گاه این مسأله یک مسأله بهینه‌سازی محدب است.

مسائل برنامه‌ریزی اعداد صحیح و صحیح آمیخته

در صورتی‌که بعضی از متغیرهای مسأله (۱ - ۱) صحیح و بعضی غیر صحیح باشند، یعنی $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ وجود داشته باشد که $x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ باشد، این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی اعداد صحیح آمیخته، و در صورتی‌که همه متغیرهای آن صحیح باشند، یعنی $x \in \mathbb{Z}^n$، آن‌گاه یک مسأله برنامه‌ریزی اعداد صحیح نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۳-۱. نقطه $\bar{x} \in S$ را یک جواب شدنی مسأله (۱ - ۱) گویند، هرگاه در همه قیود این مسأله صدق کند.

تعریف ۱-۳-۲. نقطه $\bar{x} \in S$ را یک جواب بهینه سراسری مسأله (۱ - ۱)گویند، هرگاه شدنی باشد و به ازای هر $x \in S$ شدنی دیگر، $f(\bar{x}) \leq f(x)$.

تعریف ۱-۳-۳. نقطه $\bar{x} \in S$ را یک جواب بهینه موضعی مسأله (۱ - ۱)گویند، هرگاه شدنی باشد و یک ε وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in S$ شدنی دیگر که در $||x - \bar{x}||_2 \leq \varepsilon$ صدق می‌کند، $f(\bar{x}) \leq f(x)$.

قضیه زیر شرایط کافی برای مینیمم موضعی بودن یک نقطه را بیان می‌کند:

قضیه ۱-۳-۴. (شرایط کافی مرتبه دوم-حالت نامقید) فرض کنید f یک تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد، که روی ناحیه‌ای که $\bar{x}$ نقطه درونی آن است، تعریف شده است. همچنین فرض کنید $\nabla f(\bar{x}) = 0$ و ماتریس هسین تابع f معین مثبت باشد. آن‌گاه $\bar{x}$ یک نقطه مینیمم موضعی اکید f است.

۱-۴ مقدماتی از سیگنال‌ها

با توجه به اهمیت جواب‌های تنک دستگاه‌های فرومعین در زمینه نمایش سیگنال، برای آشنایی با سیگنال‌ها، تعاریف مورد نیاز در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. سیگنال‌ها می‌توانند پدیده‌های فیزیکی گوناگونی را توصیف کنند. به طور کلی سیگنال عبارتست از هر متغیری که حاوی اطلاعاتی است. از لحاظ ریاضی، سیگنال را به صورت تابعی از یک یا چند متغیر مستقل بیان می‌کنند. تعداد متغیر مستقل را بعد سیگنال می‌نامند. در این پایان‌نامه ما سیگنال‌های یک بعدی را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، سیگنال تصویر یک سیگنال دو بعدی است و تابعی است که روشنایی را بر حسب دو متغیر مکانی (سطر وستون) نشان می‌دهد. همچنین تغییرات فشار هوا، دما و سرعت باد بر حسب عرض جغرافیایی در بررسی‌های هواشناسی نمونه‌هایی از سیگنال هستند.

سیگنال‌ها را می‌توان به دو نوع پیوسته و گسسته تقسیم کرد.

تعریف ۱-۴-۱. سیگنال‌هایی که در آن‌ها متغیر مستقل پیوسته است و برای تمام مقادیر پیوسته‌ای که متغیر مستقل می‌تواند بگیرد تعریف می‌شوند را سیگنال‌های پیوسته گویند.

$$x(t);\ t \in \mathbb{R}$$

سیگنال‌های صدا به صورت تابعی از زمان یا فشار جو بر حسب عرض جغرافیایی پیوسته هستند.

تعریف ۱-۴-۲. سیگنال‌هایی که در آن‌ها متغیر مستقل گسسته است و برای تمام مقادیر گسسته‌ای که متغیر مستقل می‌تواند بگیرد تعریف می‌شوند را سیگنال‌های گسسته گویند.

$$x[n];\ n \in \mathbb{Z}$$

سیگنال گسسته در واقع دنباله‌ای از اعداد است. برخی سیگنال‌ها ذاتاً گسسته هستند، به عنوان مثال میانگین درآمد کارخانه‌ها بر حسب تعداد کارگرها و میزان فروش ماهانه یک فروشگاه در هر سال، نمونه‌هایی از سیگنال‌های گسسته هستند. دسته مهمی از سیگنال‌های گسسته در زمان، سیگنال‌هایی هستند که از **نمونه‌برداری** سیگنال‌های پیوسته در زمان به دست می‌آیند.

تعریف ۱-۴-۳. فرآیند تبدیل یک سیگنال پیوسته در زمان به یک سیگنال گسسته در زمان را نمونه‌برداری گویند.

سیگنال مفروض y را می‌توان به صورت ترکیب خطی تعدادی از سیگنال‌های پایه نمایش داد:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i d_i = Dx, \quad D = [d_1 \dots d_n],\ x = [x_1, \dots, x_n]^T$$

x را نمایش سیگنال y گویند. با انتخاب پایه‌های متفاوت نمایش‌های مختلف برای y حاصل می‌شوند که هر کدام می‌توانند مفید باشند.

ممکن است خود سیگنال y تنک باشد یا اینکه نمایش x آن در یک پایه تنک باشد، که در این حالت نیز y را تنک گویند. در واقعیت سیگنال‌ها بیشتر قابل فشرده‌سازی هستند نه تنک. از لحاظ ریاضی سیگنال y قابل فشرده‌سازی است، در صورتی که اگر مولفه‌های نمایش x آن از نظر اندازه به صورت نزولی مرتب شوند، به سرعت کوچک شوند.

۱-۵ آشنایی با نرم‌افزار cvx

cvx یک سیستم مدل‌سازی برای برنامه‌ریزی محدب منظم است، که توسط گرنت[1] و[2] طراحی شده است. برنامه‌ریزی محدب منظم یک روش برای ساختن مسائل بهینه‌سازی محدب است که توسط مایکل گرنت و استیفن بوید و یینیو یِ[3] پیشنهاد شد و یک مجموعه از قواعد که DCP ruleset[4] نامیده می‌شوند را اعمال می‌کند. مسائل ساخته شده براساس این قواعد، مسائل محدب منظم نامیده می‌شوند. cvx فقط مسائلی که با مجموعه قواعد DCP مطابقت دارند را حل می‌کند و مسائلی که با این مجموعه قواعد مطابقت ندارند را، حتی اگر محدب باشند، نمی‌پذیرد. البته این به این معنی نیست که این مسائل حل نمی‌شوند، فقط باید این مسائل به شکلی در بیایند که با مجموعه قواعد DCP مطابقت داشته باشند.

بعضی از قواعدی که برای حل یک مسأله در cvx باید به آن‌ها توجه کرد، عبارتند از:

- قبل از همه دستورهای cvx، دستور cvx_ begin می‌آید و در انتهای همه دستورها، cvx_ end می‌آید.
- تعیین همه متغیرها و توابع هدف و قیدها باید بین دو دستور قبل باشد.
- متغیرها با دستور variable یا variables مشخص می‌شوند و می‌توانند حقیقی یا مختلط و اسکالر، بردار، ماتریس یا آرایه‌های n بعدی باشند.
- متغیرهای بهینه‌سازی مقدار عددی نمی‌گیرند و اشیاء ویژه متلب محسوب می‌شوند.

cvx دارای توابع کتابخانه‌ای شامل توابع محدب، مقعر و آفینی است، که متغیرها یا عبارت‌های cvx را به عنوان آرگومان می‌پذیرد. بسیاری از آن‌ها توابع معمول متلب از قبیل trace، sqrt، diag و غیره هستند. بقیه توابع

[1] Grant [2] Boyd [3] Yinyu Ye [4] disciplined convex programming