بسم الله الرحمن الرحیم

بهار

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

خودریختی رده‌ای پایا p–گروه‌های متناهی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

محبوبه کاظمی گلباغی

اسفند ماه ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم محبوبه کاظمی

تحت عنوان:

خودریختی رده‌ای پایا p – گروه‌های متناهی

در تاریخ ۸۹/۱۲/۱۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر محمد جواد عطایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

۸۹/۱۲/۱۱

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار موفق به طی دوره کارشناسی ارشد شدم، بجاست از افرادی که در این مقطع از وجودشان بهره جستم، یاد کنم. ابتدا از جناب دکتر عبدالهی که همواره در طی این پژوهش بنده را از راهنمایی‌های خود بهره مند ساختند، تشکر می‌کنم و برای ایشان آرزوی توفیق روزافزون دارم. همین‌طور از آقایان دکتر باقریان و دکتر عطایی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، سپاسگزاری می‌نمایم.
همچنین از زحمات بی‌دریغ پدر و مادر مهربانم که وجودشان همواره برای من موجب دلگرمی بوده است، ممنونم و از خداوند برای این عزیزان طلب صحت و سلامت می‌نمایم.

محبوبه کاظمی گلباغی

اسفند ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادرم که هرچه دارم از آنهاست

چکیده

خودریختی α از گروه G را خودریختی رده‌ای پایا می‌نامیم، هرگاه برای هر $x\epsilon G$، داشته باشیم $\alpha(x)\epsilon x^G$، که در آن x^G رده مزدوجی x در G است. مجموعه تمام خودریختی‌های رده‌ای پایا G را با $Aut_c(G)$ نمایش می‌دهیم. در این پایان نامه، p-گروه‌های متناهی مانند G را که در آن‌ها $|Aut_c(G)|$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر p-گروه غیربدیهی G از مرتبه p^n رابطه‌ی

$$|Aut_c(G)|\leq \begin{cases} p^{(n^2-4)/4} & \text{if n is even} \\ p^{(n^2-1)/4} & \text{if n is odd} \end{cases}$$

برقرار است. سپس p-گروه‌های متناهی را که رابطه‌ی فوق برای آن‌ها به تساوی تبدیل می‌شود، بررسی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: p-گروه، گروه کامینا، گروه تقریبا کامینا، خوریختی رده‌ای پایا .

فهرست مندرجات

مقدمه

اگر G یک گروه متناهی و $N \neq ۱$ یک زیرگروه نرمال G باشد، آن‌گاه (G,N) را یک جفت کامینا نامیم، هرگاه برای هر $x \in G - N$ داشته باشیم $xN \subseteq x^G$ و گروه G را یک گروه کامینا می‌نامیم، هرگاه $(G,\gamma_۲(G))$ یک جفت کامینا باشد. در فصل ۲ برخی ویژگی‌های جفت‌های کامینا را بیان و اثبات خواهیم کرد و نشان خواهیم داد:

۱) اگر G یک $p-$ گروه کامینا از رده‌ی ۲ باشد و $\{x_۱, x_۲, \dots, x_t\}$ مجموعه مولد کمین آن باشد که $t > ۲$، آن‌گاه $H = \langle x_۱, \dots, x_{t-۱}\rangle$ در رابطه‌ی $\gamma_۲(H) = \gamma_۲(G)$ صدق می‌کند.

۲) اگر G یک $p-$ گروه کامینا از رده‌ی ۳ با مجموعه مولد کمین $\{x_۱, x_۲, \dots, x_t\}$ باشد و $H = \langle x_۱, \dots, x_{t-۱}\rangle$، آن‌گاه $\gamma_۲(H) = \gamma_۲(G)$، به‌علاوه $\gamma_۲(G) \nleq Z(H)$.

۳) اگر G یک $p-$ گروه کامینا از رده‌ی ۳ باشد، به‌طوری که $|\gamma_۳(G)| \geq p^۲$ و H زیرگروه بیشینی از G باشد، آن‌گاه $Z(H) = Z(G)$.

$p-$ گروه متناهی G را یک $p-$ گروه تقریبا کامینا می‌نامیم، هرگاه $\gamma_۲(G) = \Phi(G)$

و برای هر مجموعه مولد کمین آن مانند $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_d\}$ رابطه‌ی $[x_i, G] = \gamma_۲(G)$ برای حداقل $d - ۱$ عضو برقرار باشد. در فصل ۳ به بررسی این گروه‌ها خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که هر گروه کامینا گروهی تقریبا کامیناست.

فرض کنیم G یک گروه باشد. خودریختی α از G را خودریختی رده‌ای پایا می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in G$ داشته باشیم $\alpha(x) \in x^G$، که x^G رده‌ی مزدوجی x در G را نشان می‌دهد. مجموعه‌ی تمام خودریختی‌های رده‌ای پایا G را با $Aut_c(G)$ نمایش می‌دهیم. در فصل ۴ این پایان‌نامه کرانی برای $|Aut_c(G)|$ بر حسب مرتبه‌ی گروه G خواهیم یافت و گروه‌هایی را که در آن‌ها $|Aut_c(G)|$ به مقدار بیشین خود می‌رسد را معرفی خواهیم کرد. برای این منظور نشان می‌دهیم:

۱) اگر G گروهی از مرتبه‌ی p^n و مجموعه‌ی $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_d\}$ مجموعه‌ی مولد کمین آن و $|\gamma_۲(G)| = p^m$ باشد، آن‌گاه $|Aut_c(G)| \leq p^{m(n-m)}$.

۲) اگر G گروهی غیربدیهی از مرتبه‌ی p^n باشد، آن‌گاه:

$$|Aut_c(G)| \leq \begin{cases} p^{(n^۲-۴)/۴} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ p^{(n^۲-۱)/۴} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نشان خواهیم داد که در (۱) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک $p-$ گروه آبلی باشد یا G یک $p-$ گروه کامینای ویژه غیرآبلی یاشد و اگر G گروهی غیرآبلی از مرتبه‌ی $p^{۲m}$ باشد، به‌طوری که $|\gamma_۲(G)| = p^m$ و تساوی در (۲)، برقرار باشد، آن‌گاه G یک گروه تقریبا کامیناست که کامینا نیست.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضایایی را که در طی فصل‌های بعدی مورد نیاز است به طور گذرا بیان می‌کنیم.

قرارداد ۱—۰.۱ . در این فصل و فصل‌های بعدی، تمام گروه‌ها متناهی فرض می‌شوند. اگر H زیرمجموعه یا زیرگروه G باشد، به ترتیب نماد $H \subseteq G$ یا $H \leq G$ را به کار می‌بریم. اما اگر H زیرمجموعه‌ی محض یا زیرگروه محض گروه G باشد، به ترتیب از نمادهای $H \subset G$ یا $H < G$ استفاده می‌کنیم. $[x, G]$ به صورت مجموعه‌ی تمام $[x, g]$ که در آن $g \in G$ است، در نظر گرفته می‌شود. p نیز عددی اول فرض می شود.

۱—۱ تعریف‌ها و قضیه‌های اولیه

تعریف ۱—۱.۱ . فرض کنیم G و H دو گروه باشد. مجموعه‌ی تمام همریختی‌های از G به H را با $Hom(G,H)$ نشان می‌دهیم. اگر G و H دو گروه آبلی باشند، آن‌گاه $Hom(G,H)$ تحت عمل زیر یک گروه آبلی است. به این ترتیب که برای هر $\phi,\psi \in Hom(G,H)$ و هر $g \in G$ تعریف می‌کنیم:

$$(\phi{+}\psi)(g) = \phi(g){+}\psi(g).$$

نمادگذاری ۱—۲.۱ . فرض کنیم G و H دو گروه باشند، $\phi : G \to H$ یک همریختی از G به H باشد. در این صورت برد ϕ را با نماد $Im\phi$ و هسته‌ی ϕ را با نماد $Ker\phi$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۳.۱ . فرض کنیم G یک گروه و $x \in G$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in G \ : \ gx = xg\ \}$ یک زیرگروه G است. این زیرگروه را مرکزساز x در G گوییم و آن را با $C_G(x)$ (یا مختصرا $C(x)$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۴.۱ . برای هر گروه دلخواه G مرکز G را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت $Z(G) = \{g \in G \ : \ gx = xg \ \ \forall x \in G\}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین واضح است که $Z(G) = \bigcap_{x\in G} C(x)$.

تعریف ۱–۱.۵ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$، در این صورت رده‌ی مزدوجی شامل عنصر x در G را با x^G نشان می‌دهیم و آن‌را به صورت $x^G = \{x^g \ : \ g \in G\}$ تعریف می‌کنیم، که در آن x^g عنصر مزدوجی $g^{-1}xg$ است.

قضیه ۱–۱.۶ . فرض کنیم K, H و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند، به طوری که $K \subseteq L$. در این صورت $(HK) \bigcap L = (H \bigcap L)K$.

اثبات. ر.ک.[1] [۹، صفحه‌ی ۱۵، قضیه‌ی ۱.۳.۱۴].

قضیه ۱–۱.۷ . هر گروه آبلی با تولید متناهی با حاصل‌ضرب مستقیمی از گروه‌های دوری یکریخت است.

اثبات. ر.ک. [۴، صفحه‌ی ۷۶، قضیه‌ی ۱.۲].

تعریف ۱–۱.۸ . فرض می‌کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت جابه‌جاگر y, x را با $[x, y]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y.$$

زیرگروه تولید شده توسط جابه‌جاگرها را زیرگروه جابه‌جاگر یا زیرگروه مشتق G می نامیم و با G' نشان می‌دهیم. بنابراین $G' = \langle [x, y] \ : x, y \in G] \rangle$.

به طور مشابه اگر $x_1, x_2, ..., x_k$ عناصری از گروه G باشند، در این صورت جابه‌جاگر از سمت چپ مرتب شده‌ی $[x_1, x_2, ..., x_k]$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

[1] مخفف رجوع کنید به

$$[x_1] = x_1, \quad [x_1, x_2, ..., x_k] = [[x_1, x_2, ..., x_{k-1}], x_k] \quad (k \geq 2).$$

قضیه ۱—۱.۹ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت:

۱) اگر $N \trianglelefteq G$، آن‌گاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

۲) G آبلی است اگر و تنها اگر $G' = 1$.

۳) G/G' آبلی است.

اثبات. ر.ک. [۱۶، صفحه‌ی ۲۳۶، قضیه‌ی ۴.۱۵.۳].

لم ۱—۱.۱۰ . فرض کنیم x, y, z عناصری از یک گروه باشند. در این صورت:

۱) $[x, y] = [y, x]^{-1}$.

۲) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ و $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$.

۳) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ و $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$.

اثبات. ر.ک. [۹، صفحه‌ی ۲۳، لم ۵.۱.۵].

لم ۱—۱.۱۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$، در این صورت:

$$[x, y^n] = [x, y]^{1+y+...+y^{n-1}} \qquad (n \geq 1).$$

اثبات . با استقرا روی n، لم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ به وضوح حکم برقرار است. فرض کنیم $n = 2$ باشد. بایستی نشان دهیم $[x, y^2] = [x, y]^{1+y}$. برای این منظور از لم ۱—۱.۱۰، قسمت ۲، استفاده می‌کنیم.

$$[x, y^2] = [x, yy] = [x, y][x, y]^y = [x, y]^{1+y}$$

پس به ازای $n=۲$ درستی رابطه ثابت شد. فرض می‌کنیم برای n حکم برقرار باشد، یعنی $[x,y^n]=[x,y]^{۱+y+\dots+y^{n-۱}}$. نشان می‌دهیم که به ازای $n+۱$ نیز مساله برقرار است. مجددا با توجه به لم ۱—۱۰.۱، قسمت ۲، می‌توان نوشت:

$$[x,y^{n+۱}]=[x,yy^n]=[x,y^n][x,y]^{y^n}$$

از فرض استقرا استفاده کرده و به جای $[x,y^n]$ مقدار آن را قرار می‌دهیم. پس خواهیم داشت:

$$[x,y^{n+۱}] = [x,yy^n] = [x,y^n][x,y]^{y^n} = [x,y]^{۱+y+\dots+y^{n-۱}}[x,y]^{y^n} =$$
$$[x,y]^{۱+y+\dots+y^{n-۱}+y^n}$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی n حکم برقرار است.

نتیجه ۱—۱۲.۱ . اگر $x,y\in G$ و عنصر x با جابه‌جاگر $[x,y]$ جابه‌جا شود، آن‌گاه برای هر عدد صحیح n، $[x^n,y]=[x,y]^n$.

اثبات . با استفاده از لم قبل می‌توان حکم را به سادگی اثبات کرد. پس با استقرا روی n مساله را ثابت می‌کنیم. برای $n=۱$ درستی حکم واضح است. فرض کنیم $n=۲$، در این صورت چون x با $[x,y]$ جابه‌جا می‌شود، داریم:

$$[x^۲,y]=[xx,y]=[x,y]^x[x,y]=x^{-۱}[x,y]x[x,y]=[x,y][x,y]=[x,y]^۲$$

فرض کنیم برای n حکم برقرار باشد. برای $n+۱$ آن را نشان می‌دهیم.

$$[x^{n+۱},y]=[xx^n,y]=[x,y]^{x^n}[x^n,y]=[x,y][x,y]^n=[x,y]^{۱+n}$$

به این ترتیب برای $n \geq ۱$ حکم ثابت می‌شود. بنابراین اگر $n > ۰$ باشد، می‌توان نوشت:

$$۱ = [x^n x^{-n}, y] = [x^n, y]^{x^{-n}}[x^{-n}, y] = ([x, y]^n)^{x^{-n}}[x^{-n}, y] = [x, y]^n[x^{-n}, y]$$

لذا $[x^{-n}, y] = [x, y]^{-n}$ و به این ترتیب حکم برای اعداد منفی نیز ثابت می‌شود.

تعریف ۱—۱۳.۱ . فرض کنیم G یک گروه و B, A زیرگروه‌هایی از آن باشند. در این صورت جابه‌جاگر B, A را با $[A, B]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = \langle [a, b] \;\;:\;\; a \in A, b \in B \rangle.$$

اگر $H_k, ..., H_۲, H_۱$ زیرگروه‌هایی از گروه G باشند، آن‌گاه زیرگروه مشتق تعمیم یافته $[H_۱, H_۲, ..., H_k]$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$[H_۱] = H_۱, \qquad [H_۱, H_۲, ..., H_k] = [[H_۱, ..., H_{k-۱}], H_k] \quad (k \geq ۲).$$

تعریف ۱—۱۴.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{\gamma_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}}$ از زیرگروه‌های G را به استقرا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_۱(G) = G, \qquad \gamma_۲(G) = G' = [G, G],$$

$$\gamma_{n+۱}(G) = [\gamma_n(G), G] \qquad (n > ۱).$$

لم ۱—۱۵.۱ . فرض کنیم $A, B \leq G$، که در آن G یک گروه دلخواه است. در این صورت:

۱) $[A, B] = [B, A]$.

۲) اگر $A_۱ \leq A$ و $B_۱ \leq B$، آن‌گاه $[A_۱, B_۱] \leq [A, B]$.

۳) اگر $A \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[A,B] \leq A$.

۴) اگر $A \trianglelefteq G$ و $B \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[A,B] \trianglelefteq G$.

۵) اگر $A \leq B$ و $A \trianglelefteq G$، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که $B/A \leq Z(G/A)$ آن است که $[G,B] \leq A$.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحه‌ی ۲۲۰، لم ۱.۱.۱۰].

لم ۱—۱.۱۶ . (لم سه زیرگروه). فرض کنیم L, K, H سه زیرگروه از G باشند و $N \trianglelefteq G$. در این صورت اگر دو زیرگروه از سه زیرگروه $[K,L,H], [H,K,L]$ و $[L,H,K]$ زیرگروه N باشند، آن‌گاه سومی نیز چنین است.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحه‌ی ۲۳۱، لم ۱.۲.۱۰].

تعریف ۱—۱.۱۷ . فرض کنیم p عددی اول باشد. گروه متناهی G را یک $p-$ گروه نامیم، اگر مرتبه‌ی آن توانی از p باشد. طبق قضیه‌ی لاگرانژ مرتبه‌ی هر عنصر از یک $p-$ گروه توانی از p است.

قضیه ۱—۱.۱۸ . مرکز هر $p-$ گروه متناهی غیربدیهی، غیربدیهی است.

اثبات. ر.ک. [۹، صفحه‌ی ۳۹، قضیه‌ی ۱۱۴.۶.۱].

تعریف ۱—۱.۱۹ . برای هر گروه متناهی G، کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌های عناصر G را نمای G می‌نامیم و با $exp(G)$ نمایش می‌دهیم.

اگر G یک $p-$ گروه متناهی باشد، آن‌گاه نمای G برابر مقدار بیشین مرتبه‌های عناصر

G است. زیرا مرتبه‌ی عضوهای گروه بایستی $|G|$ را(که به صورت توانی از p است.) عاد کنند، لذا مرتبه‌ی آنان نیز توانی از p خواهد بود. پس به‌وضوح کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌های عضوهای G همان مقدار بیشین آنان خواهد بود.

تعریف ۱—۲۰.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $Z_n(G)$ را برای $n \geq ۰$، به استقرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_\circ(G) = ۱ \quad , Z_{n+۱}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G)) \quad (n \geq ۰)$$

قضیه ۱—۲۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت:

۱) نمای گروه $Z_{i+۱}(G)/Z_i(G)$ همواره نمای گروه $Z_i(G)/Z_{i-۱}(G)$ را می‌شمارد.

۲) نمای گروه $\gamma_i(G)/\gamma_{i+۱}(G)$ همواره نمای گروه $\gamma_{i-۱}(G)/\gamma_i(G)$ را می‌شمارد.

اثبات. ر. ک. [۳، صفحه‌ی ۲٦٦، قضیه‌ی ۲.۱۳].

تعریف ۱—۲۲.۱ . $p-$ گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی گوییم، در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

قضیه ۱—۲۳.۱ . فرض کنیم G یک $p-$ گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری مانند V روی میدان $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد، به طوری که $G \cong V^+$، که در آن V^+ گروه جمعی فضای برداری V است.

اثبات. ر.ک. [۱۳، صفحه ی ۱۰٦، لم ۳.۲.۵].

۱—۲ عمل گروه روی مجموعه

تعریف ۱—۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه باشد. گوییم گروه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند، هرگاه نگاشتی با خواص زیر داشته باشیم:

$X \times G \longrightarrow X$

$(x, g) \mapsto xg$

۱) $\forall g_۱, g_۲ \in G \, , \, \forall x \in X \quad (xg_۱)g_۲ = x(g_۱ g_۲)$

۲) $\forall x \in X \quad xe = x$

که e عضو خنثی گروه G است. این عمل را عمل از سمت راست می‌نامیم. عمل از سمت چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

لم ۱—۲.۲ . فرض کنیم گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را روی X به این صورت تعریف می‌کنیم، که برای هر $x_۲, x_۱ \in X$:

$x_۱ \sim x_۲ \quad \Leftrightarrow \quad \exists \, g \in G \quad ; \quad x_۱ = x_۲ g$

در این صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی X است.

اثبات. ر.ک. [۱۰، صفحه‌ی ۷۰، لم ۴.۶].

بنابراین متناسب با رابطه‌ی هم ارزی فوق می‌توان کلاس‌های هم ارزی برای X در نظر