بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنـوان:

قطر و بعد گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر

استاد راهنما:
دکتر کریم سامعی

پژوهشگر:
سید سعدی حسینی

اسفند ۱۳۸۷

همهٔ امتیازهای این پایان‌نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا (یا استاد راهنمای پایان‌نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه آقای سید سعدی حسینی
کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر

تحت عنوان :

قطر و بعد گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های تعویض پذیر

On the diameter and girth of zero divisor graph of commutative rings

به ارزش ۴ واحد در روز یکشنبه مورخ ۱۳۸۷/۱۲/۱۸ ساعت ۱۷-۱۵ در محل آمفی تئاتر(۱) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره ...۱۹...درجه عالی..ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/دانشکده/دانشگاه	محل امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر کریم سامعی	دانشیارـ ریاضی ـ علوم ـ بوعلی سینا	
۲	استاد مدعو	دکتر عبدالرحمن ساجدی نژاد	استادیارـ ریاضی ـ ریاضی ـ رازی	
۳	داور داخلی	دکتر اشرف دانشخواه	استادیارـ ریاضی ـ علوم ـ بوعلی سینا	
۴				
۵				
۶				

تقدیم به:

ساحت مقدس امام زمان (عج)؛ که تنها امید مستضعفان روی زمین است، و همه منتظران واقعیِ آن حضرت.

قدردانی

خدایرا شاکرم که عنایتش مثل همیشه شامل حال بندهٔ حقیر شد تا با وجود همه مشکلات بتوانم این مرحله را به اتمام برسانم. بعد از لطف خداوند این را مرهون زحمات اساتید خوب و مجرب گروه ریاضی مخصوصاً استاد راهنمای خوبم جناب آقای دکتر کریم سامعی می دانم که در اینجا از همه این عزیزان کمال تشکر و قدردانی و از خداوند متعال آرزوی توفیق برای ایشان دارم. وظیفه خود می دانم از کلیه معلمین و بزرگوارانی که از مقطع تحصیلی ابتدایی تا دانشگاه بنده افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و مشوق اصلی‌ام بوده‌اند نیز تشکر کنم.

در پایان از خانواده عزیزم در صدر همه پدر و مادر مهربانم، برادران و خواهرانم همچنین همسر فداکار و دختر ۴ ساله‌ام ساناز، که یار و مددکارم در همه لحظات زندگی بوده‌اند قدردانی و تشکر می‌نمایم. امیدوارم بتوانم زحمات تک تک این عزیزان را جبران و فرد مفیدی برای جامعه باشم.

نام خانوادگی: حسینی	**نام:** سید سعدی

عنوان پایان نامه: قطر و بعد گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های تعویض پذیر.

استاد راهنما: دکتر کریم سامعی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی	**گرایش:** جبر	**دانشگاه:** بوعلی سینا
دانشکده: علوم پایه	**تاریخ دفاعیه:** ۱۳۸۷/۱۲/۱۸		**تعداد صفحات:** ۸۷

واژه های کلیدی: بعد گراف، گراف مقسوم علیه صفر، قطر گراف.

چکیده:

برای حلقه تعویض پذیر و یکدار R ، گراف مقسوم علیه های صفر حلقه R، که با $\Gamma(R)$ ، نمایش داده می شود، گرافی ساده است که رأس های آن همه مقسوم علیه های صفر غیر بدیهی R هستند، و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy = 0$.

در این پایان نامه قطر را که با diam و بعد را با gr نمایش می دهیم، برای گراف $\Gamma(R)$ تعریف کرده و بررسی می کنیم چه وقت قطر $\Gamma(R)$ کوچکتر یا مساوی با ۲ و یا چه وقت بعد آن بزرگتر یا مساوی با ۴ است. این نتایج جهت بررسی قطر و بعد گراف مقسوم علیه های صفرحلقه چند جمله ایها و سریهای توانی و حلقه ایدآل ساز مورد استفاده قرار می دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه

جویندهٔ چیزی، یا به آن یا به برخی ازآن، خواهد رسید.

علی (ع)

طی دو دههٔ اخیر علاقهٔ خاص ریاضی‌دانان به تحقیق در زمینه های ترکیبی ریاضی، مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز و توپولوژی، ترکیب آنالیز و نظریهٔ احتمالات و همچنین جبر مجرد و نظریهٔ گراف، باعث بوجود آمدن مباحث جدید و متنوعی دراین زمینه گردیده است.

ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های تعویض‌پذیر و نظریهٔ گراف برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [۱] طی مقالهٔ،

Beck, I., **1988**. Coloring of commutative rings, J. Algebra. 116: 208-226

مطرح شد. بک همهٔ عناصر حلقه را بعنوان رئوس گراف قرار داد. در این گراف دو رأس متمایز x, y مجاور بودند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. این گراف لزوماً همبند نبود و رأس ۰ در آن با همهٔ رئوس دیگر مجاور بود..

[۱] Beck

مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا اینکه در سال ۱۹۹۹، اندرسون [۲] و لیوینگستون [۳] طی مقالهٔ،

Anderson, D. F., and Livingston, P. S. **1999**. The zero-divisor graph of a commutative ring. J. Algebra. 217: 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقهٔ تعویض‌پذیر آوردند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر حلقه هستند و دو رأس متمایز x, y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = ۰$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف، گرافی همبند است.

در سال ۲۰۰۷، اندرسون و میولی [۴] در مقالهٔ،

Anderson, David F., and Mulay S. B. **2007**. On the diameter and girth of zero-divisor graph. J. Pure Appl. Algebra. 210: 543-550.

به بررسی در مورد اینکه چه وقت قطر یک گراف مقسوم علیه صفر کوچکتر یا مساوی با ۲ و یا چه وقت بعد آن بزرگتر یا مساوی با ۴ است، پرداختند. هدف اصلی این پایان نامه نیز تحلیل این مطلب است که در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار کلی این مجموعه به صورت زیر می‌باشد.

فصل اول از این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ بخش می‌باشد. بخش اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف است. در بخش های بعدی به ترتیب به مقوله‌های، مفاهیمی در نظریهٔ حلقه های تعویض‌پذیر، حلقهٔ کسرها و حلقهٔ فون‌نویمان منظم، حلقهٔ ایدآل ساز می‌پردازیم.

---

[۲] Anderson

[۳] Livingston

[۴] Mulay

درفصل دوم ابتدا مثالهایی از گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر را ارائه می‌دهیم و سپس به ذکر چندین قضیهٔ اساسی خواهیم پرداخت.

و بالاخره فصل سوم این پایان‌نامه که براساس مرجع [۷] تنظیم شده است، شامل ۳ بخش می باشد که در بخش اول به تحلیل بعد یک گراف مقسوم‌علیه صفر می‌پردازیم. در بخش دوم قطر گراف مقسوم‌علیه صفر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش سوم کاربرد نتایج بدست آمده از دو بخش قبلی را در حلقه‌های چند جمله‌ای و سریهای توانی و حلقه ایدآل ساز بررسی خواهیم کرد.

قابل ذکر است که در این پایان نامه نماد R نشان دهندهٔ حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکدار می‌باشد و نمادهای $\mathrm{diam}(G)$ و $gr(G)$ به ترتیب نشان دهندهٔ قطر و بعد برای گراف G هستند.

فصل ۱

مباحث مقدماتی

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آنجایی که برای مطالعه و تحقیق در این مقوله نیاز است که با مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ گراف آشنایی مختصری داشته باشیم، لذا بخش اول از این فصل را با مفاهیم و تعاریفی در نظریه گراف شروع و در بخشهای بعدی به ترتیب به بررسی مفاهیم مقدماتی در نظریه حلقه‌های تعویض‌پذیر، حلقه کسرها و حلقه فون‌نویمان منظم، حلقه ایدآل ساز می‌پردازیم.

۱—۱ مفاهیمی در نظریهٔ گراف

از آنجا که برخی از مفاهیم مقدماتی در نظریهٔ گراف ازاساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشند، لذا در این بخش مختصراً به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف می‌پردازیم.

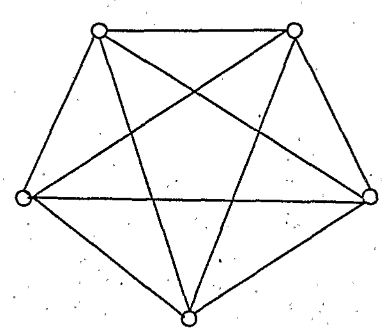
۱—۱ **تعریف.** گراف سادهٔ G را به صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم، به طوری که $V(G)$ یک مجموعهٔ ناتهی از عناصری به نام رأس و $E(G)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر

$V(G)$ موسوم به یال است.

۱ــ۲ تعریف. در گراف سادهٔ G دو رأس u و v را مجاور می‌گوییم هرگاه یک یال بین آنها موجود باشد و با uv یا $u-v$ نشان می‌دهیم. توجه می‌کنیم که گراف ساده طوقه و یال تکراری ندارد.

۱ــ۳ تعریف. یک زیر گراف از گراف G خود یک گراف است که تمامی رئوس آن به $V(G)$ و تمامی یال‌های آن به $E(G)$ تعلق دارند.

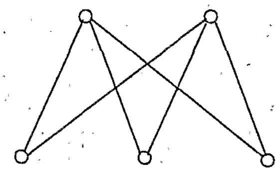
۱ــ۴ تعریف. گراف ساده‌ای را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند گراف **کامل** می‌نامیم. گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K^n نشان می‌دهیم. گراف K^5 را در شکل ۱ــ۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۱ــ۱

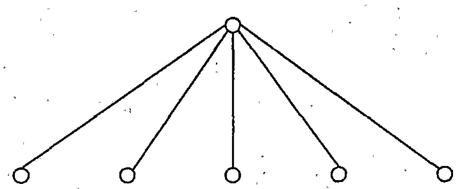
۱ــ۵ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ رئوس یک گراف ساده را بتوان به صورت دو مجموعهٔ مجزای A و B افراز کرد، به طوری که هر رأس از A با همهٔ رئوس B مجاور باشد و هر دو رأس در A و نیز هر دو رأس در B با هم مجاور نباشند، در این صورت G را یک گراف **دو بخشی کامل** می‌گوییم و با $K^{m,n}$ نشان می‌دهیم، به طوری که $|A|=m$ و $|B|=n$ به ترتیب تعداد رئوس در A و B است. در

شکل ۱ــ۲ گراف دو بخشی کامل $K^{2,3}$ را مشاهده می‌کنید.



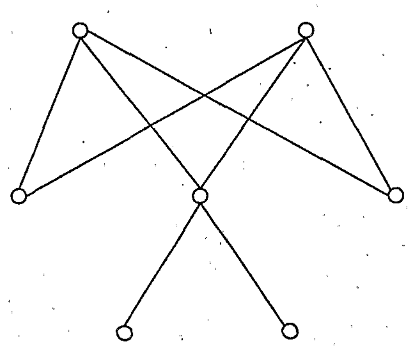
شکل ۱ــ۲

۱ــ۶ تعریف. یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K^{1,n}$ را یک گراف ستاره‌ای می‌نامیم. در شکل ۱ــ۳ گراف ستاره‌ای $K^{1,5}$ را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱ــ۳

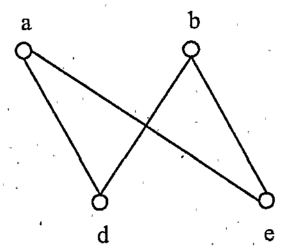
۱ــ۷ تعریف. گراف حاصل از به هم پیوستن گراف دوبخشی کامل $G_1 = K^{n,3}$، ($G_1 = A \cup B$ که در آن $|A| = n, |B| = 3$) به گراف ستاره $G_2 = K^{1,n}$، با یکی گرفتن مرکز G_2 به عنوان یکی از نقاط B، را با $\overline{K}^{n,3}$ نشان می‌دهیم. نمونه‌ای از گراف $\overline{K}^{2,3}$ را در شکل زیر مشاهده می کنید.



شکل ۱ــ۴

۱—۸ تعریف. در گراف ساده G، هر دنبالهٔ متناهی از یال‌ها را یک **گشت** می گوییم. تعداد یال‌ها در یک گشت را طول گشت می‌نامیم. گشتی را که تمامی یال‌های آن مجزا باشند، یک **گذر** می‌نامیم. اگر رئوسی را که در یک گذر از آن عبور می کنیم مجزا باشند، آنگاه گذر را یک **مسیر** می گوییم. مسیر بسته‌ای را که حداقل دارای یک یال باشد **مدار** می‌نامیم.

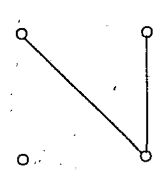
مثال ۱. به عنوان مثال در گراف شکل ۱ — ۵، گذر ad, db, be یک مسیر به طول ۳ بین دو رأس a و e است و مسیر بسته be, ea, ad, db، یک مدار است.



شکل ۱—۵

۱—۹ تعریف. گراف G را **همبند** می گوییم، اگر بین هر دو رأس مجزای آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر گراف G همبند نباشد، آنگاه می گوییم G ناهمبند است.

مثال ۲. گراف‌های شکل‌های ۱—۴ و ۱—۵ همبند هستند، ولی گراف شکل ۱—٦ ناهمبند است.



شکل ۱—٦

۱—۱۰ تعریف. فاصلهٔ بین دو رأس u و v از گراف G، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v و با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود. اگر مسیری بین u و v موجود نباشد، آنگاه $d(u,v)=\infty$.

۱—۱۱ تعریف. برای گراف سادهٔ G، قطر گراف را با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{diam}(G)=\sup\ \{\ d(v,w)\ |\ v,w\in V(G),\ v\neq w\ \}$$

اگر گراف G فاقد یال باشد، آنگاه $\mathrm{diam}(G)=0$.

مثال ۳. در گراف شکل ۱—۶، $\mathrm{diam}(G)=2$.

۱—۱۲ نکته. هر گاه $m\geq 2$ یا $n\geq 2$ داریم $diam(K^{m,n})=2$، همچنین $diam(K^{1,1})=1$.

مثال ۴. بطور مثال همان گونه که در شکل ۱—۲، مشاهده می کنیم $diam(K^{2,3})=2$.

۱—۱۳ تعریف. برای گراف سادهٔ G، بعد گراف را که با $gr(G)$، نشان می‌دهیم عبارت است ازطول کوتاهترین مدار در گراف G.

قرداد : اگر گراف G شامل هیچ مداری نباشد آنگاه $gr(G)=\infty$.

مثال ۵. در گراف شکل ۱—۲، $gr(G)=4$.

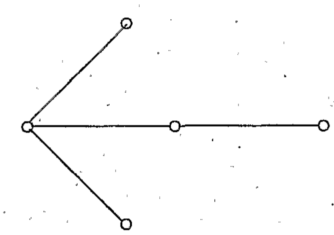
۱—۱۴ نکته.

۱) هرگاه $m,n\geq 2$ آنگاه $gr(K^{m,n})=4$، بعنوان مثال گراف شکل ۱—۲ را ببینید.

۲) به ازای هر $n \geq ۰$ داریم $gr(K^{۱,n}) = \infty$، شکل ۱—۳ را ببینید.

۳) هرگاه $m \geq ۲$، $gr(\overline{K^{m,۳}}) = ۴$. بعنوان مثال شکل ۱—۴ مشاهده شود.

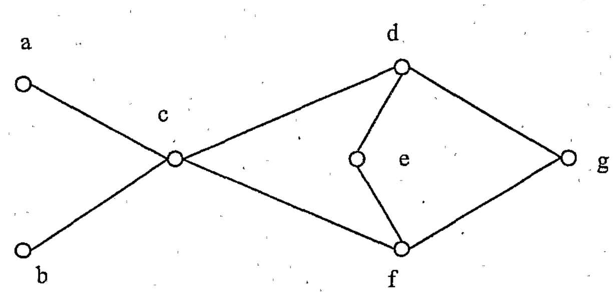
۴) $gr(\overline{K^{۱,۳}}) = \infty$، نمونه‌ای از این در شکل ۱—۷ مشاهده می‌شود.



شکل ۱—۷

۱—۱۵ **تعریف.** فرض کنیم G یک گراف ساده و $v \in V(G)$، در این صورت رأس $u \in V(G)$، را مکمل v می‌گوییم، هر گاه v و u مجاور باشند و هیچ رأس دیگری از گراف G موجود نباشد که با هر دوی v و u مجاور باشد و می‌نویسیم $v \perp u$. به عبارت دیگر یال $v - u$، ضلع هیچ مثلثی در گراف G نیست.

مثال ۶. در گراف شکل ۱—۸ رئوس b, a دارای یک مکمل، رئوس d, f دارای سه مکمل، رأس c دارای چهار مکمل و سایر رئوس دارای دو مکمل می‌باشند.



شکل ۱—۸

۱—۱۶ **تعریف.** گراف سادهٔ G را مکمل‌شده می‌گوییم، هرگاه هر رأس از گراف G دارای یک مکمل باشد. همچنین G را مکمل‌شدهٔ یکتا می‌گوییم، هر گاه مکمل‌شده باشد و هر دو مکمل از یک رأس آن با رأس‌های یکسانی مجاور باشند.

مثال ۷. گراف شکل ۱—۸، یک گراف مکمل‌شده و مکمل‌شدهٔ یکتاست.

مثال ۸. گراف‌های ستاره‌ای مکمل‌شدهٔ یکتا هستند.

۱—۱۷ **تعریف.** فرض G گراف ساده باشد و b, a دو رأس از G باشد تعریف می‌کنیم $a \leq b$ هر گاه a و b مجاور نباشند و هر رأس از G که با b مجاور باشد با a نیز مجاور باشد. در این صورت گوییم $a \sim b$ هرگاه $a \leq b$ و $b \leq a$. بنابراین $a \sim b$ اگر و تنها اگر a و b با رأسهای یکسانی مجاور باشند.

۱—۲ مفاهیمی در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر

در این بخش به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌پردازیم و قضایای مهمی را در باب ساختار مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه بررسی می‌کنیم.

۱—۱۸ **تعریف.** فرض کنیم P ایدآلی از حلقهٔ R باشد. می گوییم P ایدآل اول R است اگر:

۱) $P \subset R$، یعنی P ایدآل سرهٔ R باشد، و

۲) هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اول R را **طیف اول** R می‌نامیم و با $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۹ . اگر R دامنهٔ صحیح باشد، آنگاه $(0) \in \mathrm{Spec}(R)$. به عنوان مثال در حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، (m) ایدآل اول است اگر و تنها اگر $m = 0$ یا m عددی اول است.

۱—۱۹ تعریف. ایدآل M از حلقهٔ R را **ماکسیمال** می‌گوییم، هرگاه نسبت به رابطهٔ مشمولیت، عضو ماکسیمال مجموعهٔ ایدآل‌های سرهٔ R باشد. به عبارت دیگر ایدآل M از حلقهٔ R ماکسیمال است، هرگاه:

۱) $M \subset R$، یعنی M ایدآل سرهٔ R باشد؛

۲) ایدآلی چون I از R وجود نداشته باشد، به طوری که $M \subset I \subset R$.

مجموعهٔ تمام ایدآل‌های ماکسیمال R را **طیف ماکسیمال** حلقهٔ R می‌نامیم و با $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۲۰ نکته. هر ایدآل ماکسیمال از حلقهٔ R، ایدآل اول R نیز است، یعنی $\mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$. ولی عکس آن همواره درست نیست. به عنوان مثال ایدآل صفر در حلقهٔ اعداد صحیح ایدآل اولی است که ماکسیمال نیست زیرا $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

۱—۲۱ قضیه. فرض کنیم R حلقه‌ای ناصفر باشد، در این صورت R حداقل یک ایدآل ماکسیمال دارد.

اثبات. قضیه ۳—۹، از مرجع [۱] را ببینید. ■

۱—۲۲ نتیجه. فرض کنیم I ایدآل سرهٔ حلقه R باشد در این صورت ایدآل ماکسیمالی چون M از R وجود دارد که $I \subseteq M$.