دانشگاه علامه طباطبایی
دانشکده اقتصاد

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد آمار

موضوع:

پیش‌بینی سریهای زمانی ناایستا با مدل بندی فرایند موجک

پژوهشگر:

بیستون حسینی

استاد راهنما:

دکتر رضا پورطاهری

استاد مشاور:

دکتر محمود افشاری

تابستان ۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

سپاس ایزد منان را که توفیق اتمام این تحقیق را عطا فرمود.

با سپاس و تشکر فراوان از زحمات بی دریغ و راهنمائیهای جناب آقای دکتر رضا پورطاهری استاد راهنما و همچنین از جناب آقای دکتر محمود افشاری مدیر گروه آمار و ریاضی دانشگاه خلیج فارس، که استاد مشاور این تحقیق بودند.

همچنین از زحمات فراوان اساتید محترم گروه آمار خصوصاً جناب آقای دکتر بادامچی‌زاده و جناب آقای دکتر صالحی راد که زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم

به پاس زحمات بی‌پایانشان

فهرست

✍ چکیده

تحلیل سریهای زمانی یکی از مهمترین و مفیدترین شاخه‌های آمار است و سریهای زمانی خطی (ARMA) متداولترین مدل ارائه شده برای تحلیل داده‌های ایستا (ایستای کوواریانس) به حساب می‌آیند ولی آنگاه که داده‌ها دارای ساختار ایستایی نباشند، با این مدلها ناسازگارند و سبب بروز مشکلات فراوانی می‌شوند. معمولاً در این حالت سعی می‌شود با تبدیلات و تفاضل‌گیری داده‌ها فرایندی تبدیل یافته‌ای ایستا ساخته، اما این تبدیل و تفاضل‌گیری در بسیاری از موارد نتیجه مطلوبی نداشته و داده‌ها همچنان ناایستا باقی می‌مانند.

سریهای زمانی غیر خطی (ARCH و GARCH) محصول ممتازی است که حاصل تلاش محققان سریهای زمانی برای تحلیل داده‌های ناایستا است. اما این ساختارها هم قادر به مدل‌بندی بسیاری از فرایندها نیستند و تلاش برای شناخت مدلهای مناسبی که بتوانند ساختار ناایستایی داده‌ها را بپذیرند و تحلیلهای مفیدی از آنها ارائه دهند، ادامه دارد.

تداوم بررسی و تحلیل سریهای زمانی منجر به شناسایی و ارائه مدلهای ایستای موضعی (فوریه و موجک) شده است. این مدلها بیشترین انعطاف را در مقابل ناایستایی داده‌ها از خود نشان داده‌اند و توانسته‌اند مدلهای ایستای خطی را هم پوشش دهند.

در این پایان‌نامه "فرایندهای ایستای موضعی موجکی" معرفی می‌شود. مرجع اصلی ما مقاله فریزلیوژ و همکاران (۲۰۰۳) ([۲]) خواهد بود و می‌کوشیم با تکیه بر جنبه‌های کاربردی فرایندهای ایستای موضعی موجکی، پایه‌های لازم را برای شناخت این مدل فراهم کنیم و در نهایت با پیاده‌سازی مدل مذکور بر روی داده‌های شاخص بورس تهران، این تحقیق را پایانی مناسب ببخشیم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

مقدمه

در طول این پایان‌نامه مکرراً با مفاهیمی مانند *موجک‌ها*[1]، *تبدیلات موجک گسسته*[2] و *هموارسازی هسته*[3] مواجه هستیم. قصد داریم در فصل اول مقدماتی از این مفاهیم را ارائه دهیم. این فصل به چهار بخش تقسیم می‌شود:

در بخش اول برخی از تعاریفی را که در ادامه پایان‌نامه به آنها نیاز داریم، ذکر می‌کنیم. در بخش دوم که بخش اصلی این فصل نیز هست، به معرفی موجک‌ها، نحوه ساختن آنها توسط *آنالیز چند ریزه ساز*[4] و تبدیلات موجک گسسته در حالت کلی خواهیم پرداخت. به عنوان یک نمونه مهم از موجک‌ها به ساختن *موجک‌های هار*[5] با استفاده از آنالیز چند ریزه ساز خواهیم پرداخت. در ادامه تبدیلات گسسته موجک را برای *موجک هار*[6] با یک مثال توضیح خواهیم داد. معرفی اجمالی *الگوریتم هرمی*[1]

---

[1] Wavelets
[2] Discrete Wavelet Transform
[3] Kernel Smoothing
[4] Multiresolution Analysis
[5] Haar Wavelets
[6] Haar Wavelet

و *تبدیلات موجک گسسته بدون تلفات*[۲]، به عنوان روشهای انجام سریع محاسبات برای تبدیلات موجک گسسته، زیر بخش پایانی بحث ما در مبحث موجک‌ها است. برای مطالعه بیشتر درباره موجک‌ها [۴]، [۹] و [۱۰] را ببینید.

در فصل سوم این پایان‌نامه به مفهوم هموارسازی هسته جهت برقراری خاصیت سازگاری برای براوردگرها احتیاج داریم. هموارسازی فرایندی است که به عنوان ابزار اصلی در تحلیل رگرسیون ناپارامتری به کار گرفته می‌شود. در بخش سوم به معرفی هموارسازی هسته خواهیم پرداخت. برای مطالعه بیشتر [۳] را ببینید.

در فصل دوم به هنگام معرفی *فرایندهای نوسانی*[۳]، خانواده‌ای از توابع معرفی می‌شوند که برای درک اولیه‌ای از علت معرفی این خانواده، اطلاعاتی هر چند مختصر درباره *مدولاسیون*[۴] مفید خواهد بود. از اینرو معرفی کوتاهی از مفهوم مدولاسیون آخرین بحث ما در این فصل خواهد بود. برای مطالعه بیشتر [۱۱] را ببینید.

۱-۱. تعاریف اولیه

تعریف ۱-۱. فضای برداری مختلط مقدار H، دارای یک فضای ضرب داخلی است اگر برای هر دو عضو $x,y \in \mathrm{H}$، یک عدد مختلط $\langle x,y \rangle$ (بخوانید ضرب داخلی x و y) وجود داشته باشد که در روابط زیر صدق کند:

۱. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ ($\overline{\quad}$ نماد مزدوج یک عدد مختلط است)

۲. $\langle x+y,z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle y,z \rangle$ برای هر $x,y,z \in \mathrm{H}$

۳. $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$ برای هر $x,y \in \mathrm{H}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

---

[1] Cascade Algorithms
[2] Non-decimated Discrete Wavelet Transform
[3] Oscillatory Process
[4] Modulation

۴. $\langle x,x\rangle \geq 0$ برای هر $x \in \mathrm{H}$

۵. $\langle x,x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

$\|x\|$ برای هر $x \in \mathrm{H}$ از طریق ضرب داخلی به صورت $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱-۱. در فضای اقلیدوسی $\mathbb{R}^n$، اگر $x = (x_1,\dots,x_n)$ و $y = (y_1,\dots,y_n)$ باشد، آنگاه،

$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ و $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

تعریف ۱-۲. می‌گوییم $f \in L_2(\mathbb{R})$ اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$. در این فضای توابع تعاریف زیر را داریم:

$\langle f,g\rangle = \int f(x)g(x)dx$ و $\|f\| = \sqrt{\int |f(x)|^2\, dx}$ و اگر $f,g \in L_2(\mathbb{C})$ باشند آنگاه،

$\langle f,g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ و $\|f\| = \sqrt{\int f(x)\overline{f(x)}dx}$.

تعریف ۱-۳. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2$ اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. در این فضای برداری تعاریف زیر را داریم:

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}$ و $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2}$.

تعریف ۱-٤. گستره بردارهای $v_1,\dots,v_n \in V$ به صورت مجموعه تمام ترکیبات خطی این بردارها تعریف می‌شود، یعنی

$$span\{v_1,\dots,v_n\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\right\}$$

تعریف ۱-۵. فرض کنید (X,Σ,μ) یک فضای اندازه باشد و تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را داریم. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$ess\inf f = \sup\left\{a \in \mathbb{R} : \mu\left(\{x : f(x) < a\}\right) = 0\right\}$$

$$ess\sup f = \inf\left\{a \in \mathbb{R} : \mu\left(\{x : f(x) > a\}\right) = 0\right\}$$

تعریف ۱-۶. می‌گوییم تابع $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع لیپ‌شیتز است اگر $K\geq 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x_1,x_2\in D$ داشته باشیم، $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\leq K\left|x_2-x_1\right|$. در اینصورت K را ثابت لیپ‌شیتز می‌نامیم.

تعریف ۱-۷. تابع f یک $O(h)$ است اگر $h\to a$، آنگاه،

$$\limsup_{h\to a}\left|\frac{f(h)}{h}\right|<\infty$$

تعریف ۱-۸. تابع f یک $o(h)$ است اگر

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|=0$$

۱-۲. ساختن موجک‌ها و تبدیلات موجک گسسته

۱-۲-۱. موجک‌ها

نظریه موجکها شاخه‌ای از تحلیل هارمونیک و از پدیده‌های جدید علم ریاضی است که کاربردهای زیادی در ریاضیات، مخابرات و سایر علوم دارد. این نظریه علی رغم عمر کوتاه خود، به سرعت رشد کرده و تقریباً در هر زمینه‌ای که تحلیل فوریه حضور داشته، به رقابت با آن برخاسته است. مهمترین عرضه این رقابت در فشرده سازی و مخابرهٔ علائم و تصاویر است. ابزار مورد نیاز برای این هدفها تبدیلات موجکی است.

مفهوم موجک به صورت تئوری اولین بار توسط *مرلت*[۱] و یک تیم در مرکز فیزیک تئوری مارسیل تحت نظر *گراسمن*[۲] در فرانسه پیشنهاد شد. در حقیقت تبدیل موجک در ابتدا به عنوان ابزار ساده برای تجزیه و تحلیل سیگنالها توسط متخصص ژئو فیزیک مرلت پیشنهاد شد. موفقیت محاسبات عددی مرلت، گراسمن را وادار به بررسی جزئیات ریاضی تبدیل موجک پیوسته کرد. اخیراً موضوع تحلیل

[1] Morlet
[2] Grasman

موجکی مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی به آن به عنوان پایه‌ای جدید برای نمایش توابع می نگرند و عده‌ای آن را به عنوان تکنیکی برای تحلیل زمان بسامدی به حساب می‌آورند و گروهی نیز آن را به عنوان شاخهٔ جدید ریاضیات می‌دانند.

یکی از مهمترین کاربردهای موجکها در پردازش و انتقال اطلاعات، خصوصاً فشرده سازی تصاویر است. تا قبل از معرفی موجک، برای این کار از تبدیلات فوریه استفاده می‌شد؛ ولی در حال حاضر تبدیلهای موجکی در حال رقابت با آنها هستند و حتی در مواردی نظیر انگشت نگاری، برتری خود را نشان داده‌اند.

موجکها بنا به خواص متعددشان در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. اولین بار موجکها را *داناهو*[1] و *جان استون*[2] در سال ۱۹۹۲ در تحقیقات آماری بکار بردند. در چند سال اخیر کتابها و مقالات متعددی که در زمینه کاربرد موجکها در شاخه‌های مختلف آمار به چاپ رسیده، اهمیت موضوع را نشان می‌دهد. علی رغم اینکه بیش از یک دهه از ورود موجکها به علم آمار نمی-گذرد، نتایج تئوری و عملی ارزشمندی پیرامون نقش موجکها در تحقیقات آماری به چاپ رسیده است. روشهای تحلیل موجک عمدتاً توسط *می‌یر*[3] و همکارانش گسترش پیدا کرد. البته الگوریتم اصلی به کار مالات[4] در آنالیز چند ریزه ساز برمی‌گردد. از آن زمان تحقیق روی موجک‌ها بین-المللی شد.

ضعف تبدیلات فوریه از آنجا ناشی می‌شود که توابع سینوسی و کسینوسی، هر چند پایه‌ای برای فضای $L_2[-\pi,\pi]$ هستند اما پایه‌ای برای $L_2(\mathbb{R})$ نیستند، بنابراین برای برطرف کردن این نقیصه باید به دنبال پایه‌ای بود که $L_2(\mathbb{R})$ را تولید کند و ترجیح می‌دهیم که اینکار تنها توسط یک تابع انجام شود. تابعی که به فضای $L_2(\mathbb{R})$ تعلق داشته باشد باید سریعاً به سمت صفر میل کند. در اینجا این

[1] Donoho
[2] Jonston
[3] Meyer
[4] Mallat

سوال مطرح می‌شود که اگر تابعی سریعاً به سمت صفر میل می‌کند چگونه می‌تواند تمام فضای $L_2(\mathbb{R})$ را تولید کند؟ پاسخ این است که این کار توسط انتقالهای تابع مورد نظر روی $\mathbb{R}$ انجام می‌گیرد.

سوال بعدی این است که آیا چنین خانواده‌ای از توابع، واقعاً پایه‌ای برای $L_2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند؟ به عبارت دیگر آیا عناصر این خانواده بر یکدیگر عمودند؟ این مسئله‌ای بود که مدتها ذهن کسانی که در زمینه موجکها کار می‌کردند به خود مشغول کرده بود. آنها به دنبال خانواده‌ای از توابع بودند که تکیه گاه فشرده داشته و بر یکدیگر عمود باشند. توأم بودن این دو خاصیت بدیهی به نظر نمی‌رسید. اینکار بالاخره توسط *اینگرید دابیچز*[1] انجام شد. معمول است برای شروع کار با موجک مقدمه‌ای از سری فوریه بیان شود. ما همین رویه را پی می‌گیریم.

تابع f را در نظر بگیرید که بر روی $[-\pi,\pi]$ تعریف شده است. اگر $f \in L_2([-\pi,\pi])$ باشد، می‌توانیم f را به طور دقیق به صورت مجموع قسمتهایی بر پایه‌های فوریه $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ به صورت زیر نمایش دهیم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

که ضرایب فوریه c_n از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

از آنجائیکه $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ است، سری فوریه را می‌توان به عنوان ترکیبی از توابع سینوس و کسینوس بررسی کرد.

موجک هم به همین صورت است البته نه کاملاً مشابه. تابع $f \in L_2(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تابع را به بخش‌هایی بر اساس پایه‌های متعامد یکه ψ_v بسط دهیم. برای مثال در بسط سری

[1] Ingrid Daubchies

فوریه خانواده متعامد یکه $\left\{(2\pi)^{-1}e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (بر روی $[-\pi,\pi]$) به کار رفته است. می‌خواهیم عناصر اصلی پایه‌های موجک را به صورت $\psi_{j,k}$ بنویسیم. دقت کنید که دو اندیس داریم نه یک اندیس. این به آن علت است که توابع پایه‌ای موجک، انبساط و انتقال تابعی هستند که موجک (یا موجک مادر) نامیده می‌شود.

موجک $\psi_{j,k}$ از تابع موجک ψ، با عامل انقباض 2^{-j} و عامل انتقال $2^{-j}k$ بدست می‌آید. یعنی:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

به طوری که اندیس j نشان دهنده تعداد انقباض‌ها و k اندیس نشان دهنده تعداد انتقالها است. عامل مقیاس $2^{j/2}$ نرمالیزه کننده $\psi_{j,k}$ است به طوری که $\left\|\psi_{j,k}\right\| = \|\psi\|$.

با انتخاب معین ψ، مجموعه توابع $\psi_{j,k}$، فرم یک پایه متعامد یکه برای توابع در $L_2(\mathbb{R})$ هستند و بنابراین می‌توانیم موجک‌های $\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ را برای تقریب توابع به کار ببریم.

در این حالت تابع $f \in L_2(\mathbb{R})$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

که در آن $c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx$ است.

۱-۲-۲. ساختن موجک‌ها

تعریف ۱-۹. اگر برای هر $f \in L_2(\mathbb{R})$ داشته باشیم:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k f_k(x)$$

در این صورت می‌گوییم دستگاه توابع $\left\{f_n : n \in \mathbb{Z}\right\}$ یک پایه برای $L_2(\mathbb{R})$ است.

تعریف ۱-۱۰. یک موجک[1] تابعی مانند $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ است به طوری که،

$$\left\{\sqrt{2^m}\psi(2^m x - n) : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

[1] Wavelet

یک پایه متعامد یکه برای $L_2(\mathbb{R})$ باشد.

تعریفی که از موجک آوردیم حالت خاصی از تعریف کلی موجک است که گاهی آن را موجک پیوسته نیز می‌گویند.

قضیه ۱-۱. به ازای هر تابع $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ با شرط

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\Phi(w)\right|^2}{\left|w\right|} dw < \infty \tag{۱-۱}$$

که در آن $\Phi(w)$ تبدیل فوریه $\psi(x)$ است، خانوده توابع

$$\left\{\psi_{a,b}(x) \mid \psi_{a,b}(x) = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right); a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}\right\}$$

یک خانواده موجکی گوییم.

برهان: [۹] را ببینید.

شرط(۱-۱) *شرط پذیرش*[۱] نام دارد که شرط اساسی برای فرایند تجزیه و بازسازی سیگنالهاست. قضیه فوق حالت کلی‌تری از تعریف ۱-۱۰ است. از شرط پذیرش (۱-۱) داریم:

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$$

نتیجه فوق بیان می‌کند که میانگین تابع موجک در دامنه زمان صفر است که این نوسانی بودن موجک را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر $\psi(x)$ باید یک موج[۲] باشد.

قضیه‌ای که در ادامه می‌آید، معادل شرط پذیرش است و همرا با شرط پذیرش، اولین روش برای یافتن تابع موجک را پیشنهاد می‌کند.

قضیه ۱-۲. اگر $\xi(x)$ و $\xi^{(n)}(x)$ برای $n \geq 1$ توابعی از $L_2(\mathbb{R})$ باشند و $\xi^{(n)}(x) \neq 0$ آنگاه $\psi(x) = \xi^{(n)}(x)$ یک موجک است که $\xi^{(n)}(x)$ مشتق nام تابع $\xi(x)$ است.

[1] Admissibility Condition
[2] Wave

برهان: [۳] را ببینید.

۱-۲-۳. آنالیز چند ریزه ساز

موجک ψ را می‌توان براساس تابعی به نام تابع مقیاس $\phi(x)$ (یا موجک پدر) ساخت. یک چهارچوب نظری خوب برای ساخت تبدیل موجک، آنالیز چند ریزه ساز (MRA) است. ایده اصلی MRA در سال ۱۹۸۸ توسط مالات هنگامی که روی تصاویر کار می‌کرد، شکل گرفت. یک MRA، دنباله افزایشی زیر فضاهای بسته $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ در $L_2(\mathbb{R})$ است، به طوری که:

$$\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$$

این زیر فضاها یک اشتراک و یک اجتماع به صورت زیر دارند:

$\cap_j V_j = \{0\}$ و $\overline{\cup_j V_j} = L_2(\mathbb{R})$ ($\overline{A}$ بستار مجموعه A است).

دنباله $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

الف) فضای V_j دارای خاصیت زیر است:

$$f(2^j x) \in V_j \Leftrightarrow f(x) \in V_0 \qquad (۱-۲)$$

ب) یک تابع مقیاس $\phi \in V_0$ وجود دارد که تحت حرکت انتقالی صحیح فضای V_0 را می‌پوشاند، یعنی

$$V_0 = \left\{f \in L_2(\mathbb{R}) \mid f(x) = \sum_k c_k \phi(x-k)\right\}$$

به طوری که $\left\{\phi(\cdot - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ یک پایه متعامد یکه برای V_0 است و داشته باشیم $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \neq 0$.

حال از آنجایی که $V_0 \subset V_1$ است، تابع $\phi \in V_0$ می‌تواند به عنوان یک ترکیب خطی توابعی از V_1 نمایش داده شود. در این صورت داریم

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \sqrt{2}\phi(2x-k) \qquad (۱-۳)$$

رابطه (۱-۳) به عنوان *معادله مقیاس*[1] شناخته می‌شود و چنانچه بعداً خواهیم دید، پایه ساختار و تحقیق بر روی موجک‌ها است.

بنابر خاصیت (۱-۲)، خانواده $\left\{\phi_{j,k} \mid \phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (دقت کنید که j ثابت است) پایه V_j براساس دیدگاه مالات است. ضرایب h_k در رابطه (۱-۳) در ارتباط با پردازش سیگنالها دارای اهمیت فراوان هستند. بردار $\mathbf{h} = \left\{h_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (که می‌تواند نامتناهی باشد) *فیلتر موجک*[2] نامیده می‌شود.

برای بررسی خصوصیات MRA زیر فضاها و پایه‌های آن معمولاً از خصوصیات تبدیلات فوریه آنها استفاده می‌کنیم. جهت این کار تابع m_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-ikw} = \frac{1}{\sqrt{2}}H(w) \qquad (۱-۴)$$

تابع (۱-۴) گاهی تابع *انتقال*[3] نامیده می‌شود و رفتار مرتبط با فیلتر $\mathbf{h}$ را در فوریه شرح می‌دهد. به طور واضح تابع m_0 متناوب با دوره تناوب 2π است و داریم $H(w) = \sqrt{2}m_0(w)$. اگر $\Phi(w)$ تبدیل فوریه $\phi(x)$ باشد، با استفاده از رابطه (۱-۳) داریم:

$$\Phi(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right)\Phi\left(\frac{w}{2}\right) \qquad (۱-۵)$$

رابطه (۱-۵) به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-iwx}dx = \sum\nolimits_k \sqrt{2}h_k\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-k)e^{-iwx}dx$$

$$= \sum\nolimits_k \frac{h_k}{\sqrt{2}}e^{-ik\frac{w}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-k)e^{-i(2x-k)\frac{w}{2}}d(2x-k)$$

$$= \sum\nolimits_k \frac{h_k}{\sqrt{2}}e^{-ik\frac{w}{2}}\Phi\left(\frac{w}{2}\right) = m_0\left(\frac{w}{2}\right)\Phi\left(\frac{w}{2}\right)$$

---
[1] Scaling Equation
[2] Wavelet Filter
[3] Transfer

به این ترتیب برهان تمام است.

در ادامه خاصیت دیگری را برای ضرایب فیلتر ذکر می‌کنیم. داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=\sqrt{2}\sum_k h_k\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-k)dx=\sqrt{2}\sum_k h_k\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-k)d(2x-k)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_k h_k\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)d(x)$$

چون فرض کردیم $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx\neq 0$، روابط بالا به نتیجه زیر می‌انجامد.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k=\sqrt{2}$$

حال می‌خواهیم شرط تعامد را از دیدگاه ضرایب فیلتر بیان کنیم. از معادله مقیاس (۱-۳) داریم:

$$\phi(x)\phi(x-l)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\phi(2x-k)\phi(x-l)$$

$$=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\phi(2x-k)\sqrt{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_m\phi(2(x-l)-m)$$

با انتگرال گیری از دو طرف رابطه داریم:

$$\delta_{l,0}=2\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_m\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-k)d(2x-2l-m)d(2x)\right)$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}h_kh_m\delta_{k,2l+m}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_kh_{k-2l}$$

که تساوی آخر با قرار دادن $k=2l+m$ برقرار می‌گردد. یعنی به طور خلاصه شرط تعامد خانواده توابع مقیاس به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_kh_{k-2l}=\delta_{l,0} \qquad (۱-۶)$$

یک حالت خاص برای رابطه (۱-۶) وقتی است که $l=0$ باشد. در این صورت رابطه زیر را داریم:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k^2=1$$

این حقیقت که مجموعه $\{\phi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ تشکیل پایه متعامد یکه برای V_0 می‌دهد، می‌تواند در حالت فوریه بر حسب $\Phi(w)$ یا $m_0(w)$ بیان شود. روابط زیر را داریم: