بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

مدول های کوهمولوژی موضعی روی مدول های بازتابی

پایان نامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

آقای دکتر کاظم خشیار منش

نگارش:

موسی فرزانه

بهمن ۸۴

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: جدول‌های گروه‌بندی مشخص در مدل‌های [illegible]

که توسط مریم فرزانه تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۴/۱۱/۲۷ نمره: ۱۹ نوزده تمام درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر کاظم [illegible]	استاد راهنما	دانشیار	
	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
دکتر احمد عباسی	استاد ممتحن	دانشیار	
دکتر ثریا طالبی	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به پدر مهربان و مادر دلسوزم
که خوشبختی و سعادت من در سایه
سلامتی آنهاست

و تقدیم به همسر صبورم نرگس

تشکر و قدر دانی

رنجمایه هرکس را بشناس و فداکاري هیچ کس را بپاي دیگران مگذار و هرگز در قدر شناسي از فداکاري ها کوتاهي مکن .

((حضرت علی(ع)))

وظیفه خود می دانم که از استاد گرامی جناب آقای دکتر خشیار منش به خاطر راهنمایی های ارزشمندشان در تهیه این رساله کمال تشکر را داشته باشم و امیدوارم همیشه در سایه الطاف الهی ، سلامت و سربلند باشند .

همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر عباسی که داوری رساله اینجانب را بر عهده داشتند واز سرکار خانم دکتر طالبی که به عنوان نماینده گروه در جلسه دفاع من شرکت کردند تشکر می کنم.

در پایان از پدر و مادر مهربانم و از همسرم که در طول این دوره تحصیلی تکیه گاه و مشوق من بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

موسی فرزانه

بهمن ۸۴

فهرست

عنوان	صفحه

مقدمه

فرض کنید R حلقه ای موضعی نوتری با ایده آل ماکسیمال m و میدان خارج قسمتی K باشد و $E = E_R(K)$ را پوش انژکتیوی از K در نظر می گیریم.

فرض کنید M یک R- مدول باشد،در این صورت دوگان ماتلیس M را بصورت $M^{\vee} = Hom_R(M,E)$ تعریف می کنیم و R- مدول M را بازتابی ماتلیس گوئیم هر گاه $M \cong M^{\vee\vee}$.

فرض کنیم حلقه R، دامنه گرنشتاین کامل باشد و ایده آل I از حلقه R را طوری در نظر می گیریم که $dim\frac{R}{I} = 1$. در این صورت در فصل ۵، بخش یک، نشان خواهیم داد هر گاه M و N، R- مدولهای بازتابی باشند طوری که $Supp(N) \subseteq V(I)$ ، آنگاه برای هر i و j، $Ext_R^i\left(N, H_I^j(M)\right)$ بازتابی است و در واقع، $Ext_R^i\left(N, H_I^j(R)\right)$ برای هر i و هر $j>0$ با تولید متناهی است.

همچنین در بخش ۲، شرط دامنه بودن حلقه را حذف می کنیم و فرض می کنیم $dimR=d$ در این صورت نشان خواهیم داد هر گاه N بازتابی باشد طوری که $Supp(N) \subseteq V(I)$ ، آنگاه $Ext_R^i\left(N, H_I^j(R)\right)$ برای هر i و j بازتابی است.

این پایان نامه در ۶ فصل تنظیم شده است. در فصل صفر با تعاریف و مفاهیم موردنیاز در این پایان نامه که از جبر پیشرفته و جبر جابجایی و جبر همولوژیک آورده شده است آشنا می‌شویم.

در فصل دوم، پوش انژکتیوی و مدول های انژکتیو تجزیه ناپذیر را معرفی می کنیم، که مطالب این فصل از مرجع [11] جمع آوری شده است.

در فصل سوم، تحلیل انژکتیوی مینیمال را برای یک $R-$مدول تعریف می کنیم و در نهایت قضیه معروف باس را بیان و اثبات می کنیم. مطالب این فصل ازمراجع [۶] و [۱۲] جمع‌آوری شده است.

در فصل چهارم، دوگان ماتلیس و مدول های بازتابی ماتلیس را معرفی می کنیم.مطالب این فصل ازمراجع [1] و [۶] جمع آوری شده است.

در فصل پنجم به بررسی مقاله [۲] می پردازیم.

فصل صفر

پیشنیازها و مقدمات

این فصل شامل مباحثی از جبر جابجایی و جبر همولوژیک است که این مطالب به طور عمده از [۶]، [۸]،[۱۱] انتخاب شده اند.

در ضمن توجه داشته باشید که در این فصل R حلقه ای جابجایی و یکدار است.

۰–۱ حلقه ها و مدولها

تعریف ۰–۱–۱: مجموعه ایده آلهای اول حلقه R را با نماد $Spec(R)$ نشان می دهیم و آن را طیف R می نامیم.

تعریف ۰–۱–۲: $\phi \neq S \subseteq R$ زیر حلقه است اگر و فقط اگر به ازای هر $r,s \in S$ داشته باشیم:

$$1_R \in S \qquad ,r-s \in S \qquad ,rs \in S$$

برای دو حلقه R و S نگاشت $f : R \to S$ همریختی حلقه ها نامیده می شود هر گاه به ازای هر $r,s \in R$ داشته باشیم:

$$f(r+s)=f(r)+f(s)$$
$$f(r.s)=f(r).f(s)$$
$$f(1_R)=1_S$$

تعریف ۰–۱–۳: به ازای هر ایده آل I، $\sqrt{I}=\{x \in R : \exists n \in \mathbf{N}, x^n \in I\}$ یک ایده آل از حلقه R می باشد.

بعلاوه داریم: $I \subseteq \sqrt{I}$.

قضیه ۰–۱–۴ : فرض کنید R یک حلقه باشد و I و J ایده آلهای R باشند در این صورت :

الف) $\sqrt{I}=R \Leftrightarrow I=R$

ب) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

ج) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$

تعریف ۰–۱–۵ : فرض کنید I و J دو ایده آل R باشند و $a \in R$ در این صورت:

$$(I \underset{R}{:} J) = \{x \in R : xJ \subseteq I\}$$

هم چنین: $I \subseteq (I \underset{R}{:} J)$

بعلاوه تعریف می کنیم:

$$Ann_R(a) = (0 \underset{R}{:} a) = \{x \in R : xa = 0\}$$

$$Ann_R(I) = (0 \underset{R}{:} I) = \{x \in R : xI = 0\}$$

تعریف ۰–۱–۶: فرض کنید R یک حلقه باشد و $S \subseteq R$. در این صورت S را زیر مجموعه بسته ضربی گوئیم هر گاه:

الف) $1_R \in S$

ب) $\forall r,s \in S \quad r.s \in S$

مثال ۰–۱–۷ : به ازای هر $P \in Spec(R)$ مجموعهٔ $R - P = \{x \in R, x \notin P\}$ مجموعهٔ بسته ضربی است.

تعریف ۰–۱–۸: مجموعهٔ تمام ایده آلهای اول حلقه R را که شامل I باشند با نماد $V(I)$ نشان می دهیم.

تعریف ۰–۱–۹: فرض کنیم I یک ایده آل و $P \in Spec(R)$ و $I \subseteq P$. P را یک ایده آل اول مینیمال I گوئیم، هر گاه $\nexists Q \in Spec(R)$ طوری که $I \subset Q \subset P$.

قضیه ۰-۱-۱۰: فرض کنید I یک ایده آل سره از حلقه R باشد در این صورت داریم:

$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ که P ایده آل اول مینیمال I است.

لم ۰-۱-۱۱ (لم پنج کوتاه): فرض کنیم R حلقه بوده و

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\alpha} & & \downarrow{\beta} & & \downarrow{\nu} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \to & 0 \end{array}$$

یک نمودار جابجایی از R- مدولها وهمریختی های R- مدولها باشد. به طوری که هر سطر یک دنباله دقیق کوتاه است در این صورت:

۱) α و ν تکریختی اند $\Leftarrow$ β تکریختی است.

۲) α و ν بروریختی اند $\Leftarrow$ β بروریختی است.

۳) α و ν یکریختی اند $\Leftarrow$ β یکریختی است.

قضیه ۰-۱-۱۲: فرض کنید A یک زیر مدول از R- مدول M باشد. دراین صورت یک تناظر یک به یک بین زیرمدولهای M که شامل A هستند وزیر مدولهای $\frac{M}{A}$ وجود دارد. دراین حالت اگر B یک زیر مدول M شامل A باشد آنگاه B متناظر با $\frac{B}{A}$ است.

لم ۰-۱-۱۳: فرض کنید A و B زیر مدولهایی از R- مدول M باشند در این صورت:

$$\frac{B}{A \bigcap B} \cong \frac{A+B}{A}$$

۰-۲- شرایط زنجیری

در این بخش نکات اساسی مربوط به شرایط زنجیرافزایش و کاهشی مربوط به مدولها و حلقه ها را به طورخلاصه بیان می کنیم.

تعریف ۰-۲-۱: R – مدول M نوتری (آرتینی) نامیده می شود هرگاه هر زنجیر افزایشی (کاهشی)از زیرمدولهای M سرانجام توقف کند.

قضیه ۰-۲-۲: R – مدول M نوتری است اگر و فقط اگر هر زیر مدول آن با تولید متناهی باشد.

تعریف ۰-۲-۳: حلقه R را نوتری (آرتینی) گوئیم هر گاه R بعنوان R– مدول، نوتری (آرتینی) باشد.

قضیه ۰-۲-۴: اگر R نوتری باشد، آنگاه هر R– مدول با تولید متناهی یک R– مدول نوتری است.

قضیه ۰-۲-۵: فرض کنید :

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

یک دنباله دقیق از R– مدولها باشد در این صورت:

M نوتری (آرتینی)است اگر وفقط اگر K و N نوتری (آرتینی) باشند.

نتیجه ۰-۲-۶: اگر M یک R- مدول نوتری (آرتینی)باشد، آنگاه هر زیر مدول M و هرمدول خارج قسمت مانند $\frac{M}{M'}$ نوتری (آرتینی)است.

نتیجه ۰-۲-۷: جمع مستقیم متناهی از R- مدولهای نوتری (آرتینی)، نوتری (آرتینی) می باشد.

تعریف ۰-۲-۸: فرض کنید M یک R- مدول غیر صفر باشد در این صورت M را ساده گوئیم هر گاه M هیچ زیرمدولی به جز خودش و صفرنداشته باشد.

قضیه ۰-۲-۹: فرض کنید M یک R- مدول غیر صفر باشد در این صورت R- مدول M ساده است اگر و فقط اگر ایده آل ماکسیمالی از R مانند m یافت شود طوری که به عنوان R- مدول داشته باشیم:

$$M \cong \frac{R}{m}$$

تعریف ۰-۲-۱۰: یک زنجیر از زیر مدولهای R- مدول M بصورت:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots\dots \supset M_n = 0$$

را یک زنجیر اشباع از M گوئیم هرگاه برای هر i، R- مدول $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ ساده باشد. n را طول این زنجیر گوئیم و آن را با نماد $\mathrm{L(M)}$ نشان می دهیم.

قضیه ۰-۲-۱۱: R- مدول M دارای طول متناهی است اگر و فقط اگر M، آرتینی ونوتری باشد.

قضیه ۰–۲–۱۲:فرض کنید: $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک دنباله دقیــق از R– مدولـها و R– همریختی باشد در این صورت:

R– مدول M با طول متناهی است اگر وفقط اگر M'و M'' با طول متناهی باشند.

تبصره ۰–۲–۱۳: با شرایط قضیه قبل ،اگر R– مدول M با طول متناهی باشد آنگاه :

$$.L(M) = L(M') + L(M'')$$

لم ۰–۲–۱۴ (آرتین – ریس): فرض کنید R حلقه ای نوتـری ، M یک R– مـدول بـاتولید متناهی، N زیر مدول M و I یک ایده آل باشد، دراین صورت عدد صحیح مثبت c وجــود دارد به طوری که به ازای هر $n>c$ داریم:

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N)$$

۰-۳: حلقه و مدول کسرها

تعریف ۰-۳-۱: فرض کنید $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه بسته ضربی باشد .در این صورت در $R*S$ رابطه $\sim$ را به شرح زیر تعریف می کنیم:

$$\forall (r_1,s_1),(r_2,s_2) \in R \times S$$

$$(r_1,s_1) \sim (r_2,s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S; t(s_2r_1 - s_1r_2) = 0$$

به سادگی می توان نشان داد که این رابطه یک رابطه هم ارزی است. دراین صورت دسته هم ارزی (a,s) که $a \in R$ و $s \in S$ را با نماد $\frac{a}{s}$ نشان میدهیم و مجموعه $S^{-1}R$ را به صورت $S^{-1}R = \{\frac{a}{s}; a \in R, s \in S\}$ درنظر می گیریم:

در $S^{-1}R$ ،برای هر $a,b \in R$ و هر $s,t \in S$ داریم:

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow \exists u \in S; u(ta - sb) = 0$$

حال در $S^{-1}R$ دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$\forall r_1,r_2 \in R, \forall s_1,s_2 \in S$$

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2}$$

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1r_2}{s_1s_2}$$

به سهولت می توان بررسی کرد که $S^{-1}R$ با اعمال جمع و ضرب بالا یک حلقه جابجایی و یکدار است که در آن:

$$0_{S^{-1}R}=\frac{0}{s} \qquad \forall s\in S$$

$$1_{S^{-1}R}=\frac{1}{1}$$

حال $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به مجموعه ضربی S گوئیم.

تبصره ۰–۳–۲: (۱) برای هر $s\in S$ داریم: $0_{S^{-1}R}=\frac{0}{1}=\frac{0}{s}$

(۲) $\frac{a}{s}=0_{S^{-1}R} \Leftrightarrow t\in S$ وجود دارد طوری که $ta=0$.

تبصره ۰–۳–۳: فرض کنید R حوزه صحیح باشد و $S=R-\{0\}$ در این صورت $S^{-1}R$ یک میدان است و آن را میدان کسرهای R گوئیم.

مثال ۰–۳–۴: فرض کنید $p\in Spec(R)$ و $S=R-p$ مجموعه بسته ضربی باشد در این صورت $S^{-1}R$ را با نماد R_p نشان می دهیم.

زیر مجموعهٔ $\{\lambda\in R_p|\lambda=\frac{a}{s},s\in S,a\in p\}$ یک ایده‌آل از R_p است. و آن را با نماد PR_p نشان می دهیم.

می توان نشان داد که R_p حلقه ای موضعی با تنها ایده آل ماکسیمال PR_p است به R_p موضعی شده R در ایده آل اول p گوئیم.

حال میدان $\frac{R_p}{PR_p}$ را میدان خارج قسمتی R_p گوئیم و آن را با نماد $K(p)$ نشان می دهیم.

تعریف ۰–۳–۵: فرض کنید M یک R– مدول و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد.رابطه ~ را روی $M*S$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\forall m,m' \in, \forall s,s' \in S$

$$(m,s) \approx (m',s') \Leftrightarrow \exists t \in S \quad s.t, \qquad t(s'm - sm') = 0$$

براحتی می توان نشان داد که یک رابطه هم ارزی روی $M*S$ است.

فرض کنید کلاس هم ارزی (m,s) را بانماد $\frac{m}{s}$ نشان دهیم.

مجموعه تمام این کلاسهای هم ارزی را با نماد $S^{-1}M$ نشان میدهیم.

$S^{-1}M$ را با تعریف جمع و ضرب زیر می توان به یک $S^{-1}R$– مدول تبدیل کرد.

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + sm'}{ss'} \quad \frac{m}{s} - \frac{m'}{s'} = \frac{mm'}{ss'}$$

$S^{-1}R$ را مدول کسرهای M نسبت به S گوئیم.

تبصره ۰–۳–۶: $\frac{m}{s} = 0$ در $S^{-1}M \Leftrightarrow \exists t \in S, tm = 0$

قضیه ۰–۳–۷: فرض کنید M و N دو R– مدول باشند و S یک زیر مجموعه بسته ضربی باشد در این صورت داریم:

۱) $S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}M \cap S^{-1}N$

۲) به عنوان $S^{-1}R$ – مدول داریم: $S^{-1}(\frac{M}{N}) = \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$

تعریف ۰-۳-۸: فرض کنیم M یک R – مدول ها باشد، در این صورت پوچساز M را با نماد $Ann(M)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ann(M) = \{r \in R; \forall x \in M, rx = 0\}$$

همچنین پوچساز یک عنصر $x \in M$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$Ann(x) = \{r \in R; rx = 0\}$$

$Ann(M)$ یک ایده آل از R می باشد. همچنین اگر I یک ایده آل از R باشد طوری که $I \subset Ann(M)$ آنگاه M دارای ساختمان $\frac{R}{I}$– مدول می باشد با ضرب اسکالر

$$(r+I)x=rx$$

تعریف ۰-۳-۹: فرض کنید M یک R– مدول باشد ، ایده آل اول P را یک ایده آل اول وابسته به M گوئیم هر گاه $x \in M$ موجود باشد طوری که $P=Ann(x)$.

مجموعه همه ایده آل های اول وابسته به M را با نماد $Ass(M)$ نشان می دهیم.

قضیه ۰-۳-۱۰: اگر R نوتری و M یک R– مدول باشد آنگاه

$M=0$ اگر و فقط اگر $Ass(M) = \phi$.

تبصره ۰-۳-۱۱: فرض کنید $P \in Ass(M)$ در این صوت $\frac{R}{P}$ با زیر مدولی از M یکریخت است.

تعریف ۰-۳-۱۲: فرض کنید M یک R– مدول باشد ، در این صورت:

$$Supp(M) = \{P \in Spec(R); M_P \neq 0\}$$