دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش آنالیز

پایداری نگاشت ها در فضاهای نرم دار چندگانه

استاد راهنما :

دکتر طیبه شاطری

استاد مشاور:

دکتر محمد جانفدا

نگارنده :

الهام چنگیز

مهر ماه ۱۳۹۰

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی

دفتر مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: چنگیز	**نام:** الهام	**ش دانشجویی: ۸۸۱۳۱۲۲۰۶۳**
استاد راهنما: خانم دکترطیبه شاطری	**استاد مشاور:** آقای دکتر محمد جانفدا	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۰/۷/۱۲	**تعداد صفحات:** 78

عنوان پایان‌نامه: **پایداری نگاشت ها در فضاهای نرم دار چندگانه**

کلیدواژه‌ها:. فضای نرم دار چندگانه – عملگر پیوسته چندگانه- همگرایی چندگانه – فضای نرم دار چندگانه دوگان

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا فضای نرم دار چندگانه را تعریف می کنیم و برخی از خواص نگاشت های کران دار چندگانه روی فضاهای نرم دار چندگانه را بررسی و قضیه پایداری تعمیم یافته هایر-اولام -راسیاس مربوط به معادله جمعی کشی از فضاهای خطی به فضاهای نرم دار چندگانه را با به کارگیری شیوه نقطه ثابت اثبات می کنیم. همچنین قضیه پایداری هایر- اولام را برای نگاشتهای مربعی از یک گروه آبلی به یک فضای نرم دار چندگانه بررسی می کنیم.

در نهایت پایداری نگاشت های مربعی روی یک حوزه کران دار در فضای نرم دار چندگانه را مطالعه می کنیم.

امضای استاد راهنما

مقدمه

معادلات تابعی [1] معادلاتی هستند که مجهول درآن ها به شکل تابع است. مشهورترین معادلات تابعی معادله تابعی کشی یعنی معادله $f(x+y)=f(x)+f(y)$ است که یکی از توابع صادق در این معادله، $f(x)=x$ است. هم چنین معادله تابعی مربعی $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ که یکی از جواب های آن تابع مربعی $f(x)=x^2$ است. سوال مهمی که در اینجا مطرح است این است که، اگر تابعی تقریبا در یک معادله ی تابعی صدق کند، آیا به یک جواب آن معادله تابعی نزدیک است؟ مثبت بودن پاسخ این سوال به معنی پایداربودن معادله تابعی است. این سوال را اولین بار اولام[2] [۱۹] در سال ۱۹۴۰ ، به این صورت مطرح کرد، که آیا در مورد گروه متریک G یک ϵ-خودریختی از G لزوما به خودریختی از آن نزدیک است؟ در سال بعد هایرز[3] [۹] یک جواب مثبت به سوال اولام در زمینه فضای باناخ ارائه داد، و در ۱۹۷۸ راسیاس[4] [۱۴] ثابت کرد، با این فرض که E,F فضاهای نرم دار حقیقی و F کامل باشد و $f:E\mapsto F$ نگاشتی باشد به طوری که برای هر$x\in E$ ، نگاشت $t\mapsto f(tx)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و $\epsilon>0, p\in[0,1)$ باشند طوری وجود داشته باشد که

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\le\epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)\qquad(x,y\in E)$$

آن گاه نگاشت خطی منحصر به فرد $T:E\to F$ موجود است به طوری که

$$\|f(x+y)-T(x)\|\le\frac{\epsilon\|x\|^p}{1-2^{p-1}}.$$

[1] Functional equations
[2] Ulam
[3] Hyers
[4] Rassias

قضیه فوق درستی قضیه اولام در حالت $p = \circ$ را نشان داد. در۱۹۹۰ راسیاس این سوال را مطرح کرد آیا می توان قضیه را برای $p \geq ۱$ اثبات نمود. در ۱۹۹۱ گجدا[۵] [۷] و راسیاس و شمر[۶] و آ اکي[۷] برای حالت $p > ۱$ راه حل مثبتی را ارائه نمودند[۱۶]، اما هیچ یک نتوانستند برای حالت $p = ۱$ اثباتی ارائه نمایند. نتیجه راسیاس هم چنین برای $p < \circ$ نیز درست بود. در ۱۹۹۴ یک تعمیم ازقضیه راسیاس، که توسط گاوروتا[۸] [۸] به دست آمده بود، قضیه پایداری هایرز-اولام-راسیاس نامیده شد. او کران$\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ را با یک تابع کنترل عمومی مانند $\varphi(x, y)$ جایگزین کرد. در طی دهه های گذشته چندین مساله پایداری از معادلات تابعی توسط تعدادی از ریاضی دانان مورد بررسی قرار گرفته است [۳، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۵]. این نتایج کاربردهای زیادی در سایر علوم [۱، ۲] دارند. ما به طور مختصر به بعضی از کاربردها در جبرهای باناخ اشاره می کنیم. در هر مورد، استفاده از قضایایی مشابه قضیه ۳.۱ یک گام کلیدی است.

این رساله در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول با استفاده از کتاب در حال چاپ

H. G. Dales and M. E. Polyakov, Multi normed space and multi Banach algebras.(preprint)

به بیان تعاریف و مقدمات می پردازیم، فصل اول مشتمل بر چهار بخش است که در بخش اول تعاریفی از فضای نرم دار معمولی را بیان می نماییم. در بخش دوم مطالب مورد نیاز از فضای اندازه پذیر را بیان می کنیم. در بخش سوم فضای نرم دار چندگانه به همراه برخی از خواص این فضا را ارائه می دهیم و در بخش نهایی دنباله پوچ چندگانه و همگرایی چندگانه را بیان می کنیم. فصل دوم برگرفته از مقاله

H. G. Dales and M. S. Moslehian, Stability of mappings on multi normed spaces,

Glasgow Math. J. 49(2007) 321-332.

است که در سه بخش تنظیم گردیده است. در بخش اول تعاریف مربوط به عملگرهای کران دار چندگانه و پیوسته چندگانه و هم چنین ارتباط بین عملگر های کران دار چندگانه و پیوسته

[۵] Gajda
[۶] Šemrl
[۷] Aoki
[۸] Găvruta

چندگانه را بیان می کنیم و در بخش دوم قضیه پایداری تعمیم یافته هایرز-اولام- راسیاس مربوط به معادله جمعی کشی از فضاهای خطی به فضاهای نرم دار چندگانه را با به کارگیری شیوه نقطه ثابت بیان و اثبات می کنیم . در فصل سوم، از مقاله

M. S. Moslehian, K. Nikodem and D. Popa, Asymptotic aspect of the quadratic functional equation in multi normed spaces,J. Math. Anal. Appl. 355 (2009), 717-724.

استفاده می کنیم، در بخش اول از این فصل به بیان برخی از خواص نگاشت مربعی و پایداری هایرز-اولام نگاشت مربعی می پردازیم و دربخش دوم پایداری نگاشت مربعی روی یک حوزه کران دار را بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمات و پیش نیاز ها

در بخش اول این فصل، تعاریف و قضایایی در فضای نرم دار که در فصول آینده مورد نیاز است ارائه شده، هم چنین در بخش دوم تعاریف و قضایایی در مورد فضای نرم دار چندگانه ارائه خواهد شد که نه تنها در فصول آینده بلکه در اکثر رسالاتی که در مورد فضای نرم دار چندگانه است، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱.۱ فضاهای نرم دار

تعریف ۱.۱. یک فضای متری عبارت از مجموعه ناتهی X به همراه نگاشت $d : X \times X \to [0, \infty)$ به طوری که شرایط ذیل برقرار باشد، برای هر $x, y, z \in X$،

۱) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ،

۲) $d(x, y) = d(y, x)$ ،

۳) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

دوتایی (X, d) فضای متریک نام دارد. اگر برد d در این تعریف مجموعه $[0, \infty]$ باشد به آن متر تعمیم یافته [۱] مي گوییم.

[۱] Generalized metric

تعریف ۲.۱. فرض کنید (X,d) فضای متریك باشد نگاشت مانند $X \to X$: J نگاشت انقباض اکید[۲] [؟] گوییم اگر یك ثابت $۰ \leq L < ۱$ (که آن را ثابت لیپ شوتز می نامیم) موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$

$$d(Jx, Jy) \leq Ld(x,y) \qquad (۱.۱)$$

قضیه ۳.۱. فرض کنید (X,d) یك فضای متریك تعمیم یافته کامل باشد و $J : X \to X$ یك نگاشت انقباض اکید با ثابت لیپ شوتز $L < ۱$ باشد آن گاه برای هر $x \in X$، یا همواره $d(J^n x, J^{n+۱} x) = \infty$ و یا $n_۰ \geq ۰$ ای موجود است به طوری که برای هر $n \geq n_۰$،

$$d(J^n x, J^{n+۱} x) < \infty.$$

در این وضعیت دنباله $(J^n x)$ به یک نقطه ثابت y^* از J همگراست و این نقطه در مجموعه

$$U = \{y \in X : d(J^{n_۰} x, y) < \infty\} \qquad (۲.۱)$$

یکتاست. به علاوه برای هر $y \in U$،

$$d(y, y^*) \leq \frac{d(y, Jy)}{۱ - L} \qquad (y \in U).$$

اثبات. به مرجع [۱۲] مراجعه نمایید. □

تعریف ۴.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، تابع $\|.\| : X \to [۰, \infty)$ یک نرم روی Xنامیده می شود هرگاه برای هر$x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط ذیل صدق کند،

(۱) $\|x\| = ۰ \iff x = ۰$ ،

[۲] Strictly contractive map

(۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ،

(۳) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X به همراه $\|.\|$ را با $(X\|.\|)$ نمایش می دهیم و فضاي نرم دار [۳] مي ناميم. اگر یک نرم $\|.\|$ روی X وجود داشته باشد، فضای نرم دار X با متر $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک است. اگر فضای نرم دار $(X, \|.\|)$ با این نرم کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد آن را فضای باناخ گوییم.

تعریف ۵.۱. فرض کنید که $(X, \|.\|)$ و $(Y, \|.\|)$فضاهای نرم دار باشند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد، $\|T\|$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, x \neq \circ\} \tag{۳.۱}$$

اکنون T را کران دار می نامیم هرگاه $\|T\| < \infty$.

مجموعه تمام نگاشت های خطی و کران دار مانند $T : X \to Y$ را با $B(X,Y)$ نمایش می دهیم حال اگر $Y = X$ آن گاه $B(X,Y)$ رابا $B(X)$ نشان می دهیم، هم چنین اگر $Y = \mathbb{C}$ آن گاه $B(X,\mathbb{C})$ را با X^* نمایش می دهیم و به آن دوگان فضای X گوئیم. فضای $B(X,Y)$ با دو عمل تعریف شده در زیر یک فضای برداری است،

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \qquad , \qquad (rT)(x) = rT(x) \tag{۴.۱}$$

برای هر $r \in \mathbb{C}$ و $x \in X$ و $T, S \in B(X,Y)$. می توان دید Y باناخ است اگر و تنها اگر $B(X,Y)$ فضایی باناخ باشد.

[۳] Normed space

۲.۱ فضاهای اندازه پذیر

تعریف ۶.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد $m \subseteq 2^X$ را یک σ -جبر نامیم اگر

۱) $X \in m$ ،

۲) $A \in m \Rightarrow A^c \in m$ ،

۳) $A_n \in m \Rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n \in m$.

به زوج (X, m) فضای اندازه پذیر می گوئیم.

تعریف ۷.۱. فرض کنید (X, m)فضای اندازه پذیر و (Y, τ) فضای توپولوژیکی باشند در این صورت نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت انداره پذیرگوییم هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y یک مجموعه اندازه پذیر در X باشد، به عبارت دیگر برای هر مجموعه باز $V \subset X$، $f^{-1}(V)$ در X اندازه پذیر باشد.

مثال ۸.۱. فرض کنید که (X, m) و (Y, τ) فضاهای توپولوژیکی باشند. اگر نگاشت $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، آن گاه f نگاشتی اندازه پذیر خواهد بود.

قضیه ۹.۱. حد نقطه ای دنباله ای از توابع اندازه پذیر، نیز اندازه پذیر است.

اثبات. به قضیه ۱۴ − ۱ در مرجع [۲۲] مراجعه شود. □

گزاره ۱۰.۱. اگر تابع جمعی به صورت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه پذیر لبگ باشد، آن گاه f پیوسته است و به فرم $f(x) = cx$ است که c ثابت است.

اثبات. به مرجع [۲۱] مراجعه شود. □

۳.۱ فضای نرم دار چندگانه

در این بخش تعاریف اولیه و اساسی مربوط به فضای نرم دار چندگانه با ارائه چند مثال بیان می کنیم و به دلیل اهمیت خواص نرم چندگانه اثبات بعضی از لم ها را در این بخش ارائه می دهیم.

ملاحظه ۱۱.۱. ۱) فرض کنید E فضای خطی مختلط باشد و $k \in \mathbb{N}$، فضای خطی

$$E \oplus E \oplus \ldots \oplus E$$

را با E^k نشان می دهیم، بنابراین E^k شامل k تایی هایی $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E^k$ است که

$x_1, \ldots, x_k \in E$

گوی بسته واحد را به صورت $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ و هم چنین $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ تعریف می کنیم.

۲) مجموعه $\{1, 2, \ldots, k\}$ را با $\mathbb{N}_k$ نمایش می دهیم و گروه جایگشت های k تایی را با G_k نمایش می دهیم.

۳) فرض کنید E, F فضاهای خطی باشند فضای نگاشت های خطی از E به F را با $\mathcal{L}(E, F)$ و $\mathcal{L}(E, E)$ را با $\mathcal{L}(E)$ نمایش می دهیم. فرض کنید $E_1, \ldots, E_k, F$ فضاهای خطی باشند، فضای نگاشت های k خطی از $E_1 \times \ldots \times E_k$ به F را با $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)$ نمایش می دهیم. اگر E فضای خطی باشد و $S \subset \mathbb{N}_k$ برای هر $x = (x_i) \in E^k$ ، تصویر روی S را با P_S نشان می دهیم و به صورت $P_S(x_1, \ldots, x_k) = (y_i)$ که در آن $y_i = x_i$ هرگاه $i \in S$ و $y_i = 0$ هرگاه $i \notin S$ تعریف می کنیم و تصویر روی متمم S را با Q_S نشان می دهیم و با صورت

$Q_S(x_۱, \dots, x_k) = (y_i)$ که زمانی که $i \notin S$، $y_i = x_i$ و اگر $i \in S$، $y_i = ۰$ تعریف می کنیم.

هم چنین P_S و Q_S در فضای $\mathcal{L}(E^k)$ خود توانند، هم چنین $P_S + Q_S = I_{E^k}$ به عنوان مثال

برای $i \in \mathbb{N}_k$ می توان نوشت

$$P_i(x) = (۰, \dots, ۰, x_i, ۰, \dots, ۰)$$

$$Q_i(x) = (x_۱, \dots, x_{i-۱}, ۰, x_{i+۱}, \dots, x_k)$$

به طوری که $x = (x_۱, \dots, x_n) \in E^k$ و $P_i = P_{\{i\}}$ و $Q_i = Q_{\{i\}}$.

۴) فرض کنید E فضای خطی باشد و $k \in N$ و $\sigma \in \mathbb{G}_k$ ، برای هر $x = (x_۱, \dots, x_k)$

$$A_\sigma(x) = (x_{\sigma(۱)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

تعریف می کنیم در این صورت $A_\sigma \in \mathcal{L}(E^k)$. هم چنین برای $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{C}^k$،

$$M_\alpha(x) = (\alpha_i x_i)$$

تعریف می کنیم در این صورت $M_\alpha \in \mathcal{L}(E^k)$ اکنون برای $n, k \in \mathbb{N}$ و $x = (x_۱, \dots, x_k) \in E^k$

بسط n ام x را با $x^{[n]} = (x_۱, \dots, x_k, x_۱, \dots, x_k, \dots, x_۱, \dots, x_k) \in E^{nk}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱۲. فرض کنید $(E, \|.\|)$ یك فضای نرم دار باشد و $n \in \mathbb{N}$. یك نرم چندگانه [۴] از مرتبه n روی $\{E^k : k \in \mathbb{N}_n\}$، دنباله ای به صورت $\{\|.\|_k : k \in \mathbb{N}_n\} = (\|.\|_k)$ است به طوری که به ازای هر $k \in \mathbb{N}_n$ ، $\|.\|_k$ یك نرم روی E^k است و برای هر $x \in E$، $\|x\|_۱ = \|x\|$ و شرایط $(A_۱)$ تا $(A_۴)$ برای هر $k \in \mathbb{N}_n$ و $k \geq ۲$، $x_۱, \dots, x_k \in E$ و هم چنین برای هر $\sigma \in \mathbb{G}_k$ و $\alpha_۱, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ برقرار است.

[۴] multi normed

$(A_1$ $\|(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})\|_k=\|(x_1,\dots,x_k)\|_k$،

$(A_2$ $\|(\alpha_1x_1,\dots,\alpha_kx_k)\|_k\leq(\max_{i\in\mathbb{N}_k}|\alpha_i|)\|(x_1,\dots,x_k)\|_k \quad (x_1,\dots,x_k)\in E^k$،

$(A_3$ $\|(x_1,\dots,x_{k-1},0)\|_k=\|(x_1,\dots,x_{k-1})\|_{k-1}$،

$(A_4$ $\|(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k-1})\|_k=\|(x_1,\dots,x_{k-1})\|_{k-1}$،

که در این صورت $\{(E^k,\|.\|_k),k\in\mathbb{N}_n\}$ را یك فضای نرم دار چندگانه [5] از مرتبه n نامیم.

شرط (A_1) بیانگر این واقعیت است که A_σ برای $\sigma\in\mathbb{G}_k$ یک نگاشت حافظ نرم روي $(E^k,\|.\|_k)$ است و شرط (A_2) بیانگر این واقعیت است که برای هر $\alpha\in\bar{\mathbb{D}}^k$ ، $\|M_\alpha\|\leq 1$ که M_α را عملگر کران دار روی $(E^k,\|.\|_k)$ فرض می کنیم در واقع

$$\|M_\alpha\|=\max_{i\in\mathbb{N}_k}|\alpha_i|$$

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید $(E,\|.\|)$ یک فضای نرم دار باشد. دوگان نرم چند گانه [6] روی مجموعه $\{E^k:k\in\mathbb{N}\}$، دنباله ای به صورت $(\|.\|_k)=\{\|.\|_k:k\in\mathbb{N}\}$ است به طوری که به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $\|.\|_k$ یك نرم روی E^k است و برای هر $x\in E$، $\|x\|_1=\|x\|$و شرایط (A_1) تا (A_3) در ۱.۱۲ برای $2\leq k\in\mathbb{N}$ و اصل

$(B_4$ $\|(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k-1})\|_k=\|(x_1,\dots,2x_{k-1})\|_{k-1} \quad \forall x_1,\dots,x_{k-1}\in E$

به جای (A_4) برقرار است، در این صورت $\{(E^k,\|.\|_k):k\in\mathbb{N}\}$ را فضای نرم دار چندگانه دوگان نامیم.

طبیعی است که این پرسش مطرح شود که آیا شرایط (A_1) تا (A_4) از یکدیگر مستقلند. مثال

[5] multi normed space
[6] dual multi normed

های زیر به این سئوال پاسخ می دهد.

مثال ۱۴.۱. فرض کنید $(E, \|.\|)$ یك فضای نرم دار ناصفر باشد و برای هر $x \in E$، $\|x\|_۱ = \|x\|$ و برای $۲ \leq n \in \mathbb{N}$،

$$\|(x_۱, \ldots, x_n)\|_n := \max\{\|x_۱\|, \frac{\|x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|x_n\|}{۲}\} \tag{۵.۱}$$

به طوری که $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in E^n$. حال بدیهی است که تعریف فوق برای هر $n \in \mathbb{N}$ یك نرم روی E^n است که در اصول $(A_۲), (A_۳), (A_۴)$ صدق می کند. در اصل $(A_۲)$ صادق است زیرا

$$\begin{aligned} \|(\alpha_۱ x_۱, \ldots, \alpha_n x_n)\| &= \max\{\|\alpha_۱ x_۱\|, \frac{\|\alpha_۲ x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|\alpha_n x_n\|}{۲}\} \\ &\leq (\max_{i \in \mathbb{N}_n} |\alpha_i|) \max\{\|x_۱\|, \frac{\|x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|x_n\|}{۲}\} \\ &= (\max |\alpha_i|) \|(x_۱, .., x_n)\|_n \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \|(x_۱, \ldots, x_{n-۱}, ۰)\|_n &= \max\{\|x_۱\|, \frac{\|x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|x_{n-۱}\|}{۲}, ۰\} \\ &= \|(x_۱, .., x_{n-۱})\|_{n-۱} \end{aligned}$$

لذا در اصل $(A_۲)$ صدق می کند. از طرفی

$$\begin{aligned} \|(x_۱, .., x_{n-۱}, x_{n-۱})\|_n &= \max\{\|x_۱\|, \frac{\|x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|x_{n-۱}\|}{۲}, \frac{\|x_{n-۱}\|}{۲}\} \\ &= \max\{\|x_۱\|, \frac{\|x_۲\|}{۲}, \ldots, \frac{\|x_{n-۱}\|}{۲}\} \\ &= \|(x_۱, .., x_{n-۱})\|_{n-۱} \end{aligned}$$

که این نشان می دهد که در اصل $(A_۴)$ نیز صدق می کند. اما در خاصیت $(A_۱)$ صدق نمی کند

به عنوان مثال با فرض $\|x\| = ۱$،

$$۲ = \|(۲x, ۳x)\|_۲ \neq \|(۳x, ۲x)\|_۲ = ۳$$

و این یعنی $\|(x_۱, \ldots, x_n)\|_n \neq \|(x_{\sigma(۱)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\|$. لذا شرط $(A_۱)$ از سایر شروط مستقل است.

مثال ۱.۱۵. فرض کنید $E = \mathbb{C}$. برای $z \in \mathbb{C}$ فرض کنید $\|z\|_۱ = |z|$ و برای $(z, w) \in \mathbb{C}^۲$ قرار می دهیم،

$$r((z, w)) = \frac{۱}{۲}(|z - w| + |z + w|)$$

که r یک نرم روی $\mathbb{C}^۲$ است و دو شرط اول نرم بودن به سادگی بررسی می شود و برای نامساوی مثلثی برای هر $(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \in \mathbb{C}^۲$ داریم

$$\begin{aligned} r((x_۱, x_۲) + (y_۱, y_۲)) &= r((x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲)) = \frac{۱}{۲}(|x_۱ + y_۱ + x_۲ + y_۲| + |x_۱ + y_۱ - x_۲ - y_۲|) \\ &\leq |x_۱ - x_۲| + |x_۱ + x_۲| + |y_۱ - y_۲| + |y_۱ + y_۲| = r((x_۱, x_۲) + (y_۱, y_۲)) \end{aligned}$$

به علاوه برای $z \in \mathbb{C}$،

$$r((z, z)) = r(z, ۰) = |z|.$$

هم چنین برای $(z, w) \in \mathbb{C}^۲$

$$r((z, w)) = r((w, z)) \geq \max\{|z|, |w|\}$$

اکنون برای n طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ و $(z_۱, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ قرار می دهیم،

$$\|(z_۱, \ldots, z_n)\|_n = \max\{r((z_i, z_j)) : i, j \in \mathbb{N}_n\}$$

بنابراین $r(z,w)=\|(z,w)\|_۲$

$$\|(z_۱,\dots,z_n)\|_n\geq \max_{i\in\mathbb{N}_n}|z_i|$$

در نتیجه $\|.\|_n$ نرمی روی $\mathbb{C}^n$ است که در اصول $(A_۱),(A_۳),(A_۴)$ صدق می کند و در اصل $(A_۲)$ صدق نمی کند زیرا

$$\|(۱,i)\|_۲=\frac{۱}{۲}(|۱+i|+|۱-i|)=\sqrt{۲}>۱=\|(۱,۱)\|_۲$$

لذا شرط $(A_۲)$ از سایر شروط مستقل است.

مثال ۱۶.۱. فرض کنید $E=\mathbb{C}$. برای $z\in\mathbb{C}$ فرض کنید $\|z\|_۱=|z|$ و برای $(z,w)\in\mathbb{C}^۲$ قرار می دهیم،

$$\|(z,w)\|_۲=\frac{۱}{۲}(|z|+|w|)$$

که $\|.\|_۲$ یک نرم روی $\mathbb{C}^۲$ است. هم چنین $\|.\|_۲$ در اصول $(A_۱)$ و $(A_۲)$ و $(A_۴)$ برای $n=۲$ صدق می کند. برای هر $z,w\in\mathbb{C}$ و $\alpha_۱,\alpha_۲\in\mathbb{C}$،

$$\|(z,w)\|_۲ \quad = \quad \|(w,z)\|_۲$$

هم چنین

$$\begin{aligned}\|(\alpha_۱z,\alpha_۲w)\|_۲ &= \frac{۱}{۲}(|\alpha_۱z|+|\alpha_۲w|)\leq\max\{|\alpha_۱|,|\alpha_۲|\}\frac{۱}{۲}(|z|+|w|)\\ &= \max\{|\alpha_۱|,|\alpha_۲|\}\|(z,w)\|_۲\end{aligned}$$

و $\|(z,z)\|_۲=\frac{۱}{۲}(|z|+|z|)=\|z\|_۱=|z|$ ، اما در $(A_۳)$ صدق نمی کند زیرا

$$\|(۱,۰)\|_۲=\frac{۱}{۲}<۱=\|۱\|_۱$$

بدین ترتیب شرط (A_3) نیز از سایر شروط مستقل است.

مثال ۱.۱۷. فرض کنید $(E, \|.\|)$ فضای نرم دار ناصفری باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می دهیم

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E^n.$$

که در آن $p \geq 1$ و $\|.\|_n$ یک نرم روی E^n است. دو شرط اول نرم بودن به سادگی بررسی می شود و برای شرط سوم برای هر $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E$ داریم

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\|_n &= \|(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\|_n = (\sum_{j=1}^{n} \|x_j + y_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

هم چنین $(\|.\|^n)$ دنباله ای است که برای هر $\sigma \in \mathbb{G}_n$ و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ و $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ در اصل A_1 صدق می کند

$$\begin{aligned}
\|(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\|_n &= (\sum_{j=1}^{n} \|x_{\sigma(j)}\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_n
\end{aligned}$$

در اصول (A_2) صدق می کند

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n)\|_n &= (\sum_{j=1}^{n} \|\alpha_j x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_j| (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \max_{j \in \mathbb{N}_n} |\alpha_j| \|(x_1, \ldots, x_n)\|_n
\end{aligned}$$

در اصول (A_3) صدق می کند

$$\begin{aligned}\|(x_1,\dots,x_{n-1},0)\|_n &= (\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{j=1}^{n-1}\|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|(x_1,\dots,x_{n-1})\|_{n-1}\end{aligned}$$

و در اصل (A_4) صدق نمی کند، برای $n=2$ و $x \in E$ داریم

$$\|(x,x)\|_2 = (\|x\|^p + \|x\|^p)^{\frac{1}{p}} \neq \|x\|$$

این نشان از استقلال (A_4) از سایر اصول دارد. دنباله $(\|.\|_n : n \in \mathbb{N})$ در اصل (B_4) صدق می کند اگر و فقط اگر $p=1$ و در این حالت $(\|.\|_n; n \in \mathbb{N})$ دوگان نرم چندگانه است.

مثال ۱.۱۸. فرض کنید دنباله $(\|.\|_n, n \in \mathbb{N})$ روی $\{E^n : n \in \mathbb{N}\}$ تعریف شده باشد در این صورت برای هر $x_1,\dots,x_n \in E$ و $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ و $\sigma \in \mathbb{G}_n$،

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_n := \max_{i\in\mathbb{N}_n}\|x_i\| \tag{۱.۶}$$

يك نرم چندگانه به نام نرم چندگانه می نیمم یا کمینه [۷] را معرفی می کند. در واقع

$$\|x_1\|_1 := \max\|x_1\| = \|x_1\|$$

هم چنین برای هر $x_1,\dots,x_n \in E$ و $\sigma \in \mathbb{G}_n$ و $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$،

$$\begin{aligned}\|(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\|_n &= \max_{\sigma\in G_n, i\mathbb{N}_n}\|x_{\sigma(i)}\| = \max_{i\in\mathbb{N}_n}\|x_i\|\\ &= \|(x_1,\dots,x_n)\|_n\end{aligned}$$

[۷] Multi minimum norm

$$\begin{aligned}\|(\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n)\|_n &= \max_{i\in\mathbb{N}_n,\alpha_i\in\mathbb{C}}\|\alpha_i x_i\| = \max_{i\in\mathbb{N}_n,\alpha_i\in\mathbb{C}}|\alpha_i|\|x_i\| \\ &\le \max_{\alpha_i\in\mathbb{C}}|\alpha_i|\|(x_1,\ldots,x_n)\|_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\| &= \max_{i\in\mathbb{N}_n}\|x_i\| = \max_{i\in\mathbb{N}_{n-1}}\|x_i\| \\ &= \|(x_1,\ldots,x_{n-1})\|_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n-1})\|_n &= \max_{i\in\mathbb{N}_n}\|x_i\| = \max_{i\in N_{n-1}}\|x_i\| \\ &= \|(x_1,\ldots,x_{n-1})\|_{n-1}\end{aligned}$$

نشان می دهند که $\|.\|_n$ در شرایط (A_1) تا (A_4) صدق می کند. توجه شود که تعریف فوق خود یك نرم است.

مثال ۱.۱۹. فرض کنید $\{(\|.\|_n^\alpha : n\in\mathbb{N}) : \alpha\in I\}$ خانواده ناتهی از همه نرم های چندگانه روی $\{E^n : n\in\mathbb{N}\}$ باشد. برای هر $n\in\mathbb{N}$ و برای هر $x_1,\ldots,x_n\in E$ قرار می دهیم

$$|||(x_1,\ldots,x_n)||| := \sup_{\alpha\in I}\|(x_1,\ldots,x_n)\|_n^\alpha$$

بنابراین $(|||.||| : n\in\mathbb{N})$ یك نرم چندگانه روی $\{E^n : n\in\mathbb{N}\}$ به نام نرم چندگانه ماکزیمم [۸] و به دلیل این که هر یك از $\|.\|_n^\alpha$ خود یك نرم چندگانه است برای هر $\sigma\in\mathbb{G}_n, (x_1,\ldots,x_n)\in E^n$ و

[۸] multi maximum norm

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ داریم

$$\begin{aligned} |||(x_1, \ldots, x_n)|||_n &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_n^\alpha \\ &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\|_n^\alpha \\ &= |||(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})|||_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||(\alpha_1 x_1, \ldots \alpha_n x_n)|||_n &= \sup_{\alpha \in I} \|(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n)\|_n^\alpha \\ &\leq \sup_{\alpha \in I} \max_{i \in \mathbb{N}_n} |\alpha_i| \|(x_1, \ldots, x_n)\|_n^\alpha \\ &= \max_{i \in \mathbb{N}_n} |\alpha_i| |||(x_1, \ldots, x_n)|||_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)|||_n &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\|_n^\alpha \\ &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_1, \ldots, x_{n-1})\|_{n-1}^\alpha \\ &= |||(x_1, \ldots, x_{n-1})|||_{n-1} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} |||(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1})|||_n &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1})\|_n^\alpha \\ &= \sup_{\alpha \in I} \|(x_1, \ldots, x_{n-1})\|_{n-1}^\alpha \\ &= |||(x_1, \ldots, x_{n-1})|||_{n-1}. \end{aligned}$$

گزاره ۲۰.۱. فرض کنید $(E, \|.\|)$ یک فضای نرم دار باشد و $(\|.\|_n : n \in \mathbb{N})$ دنباله ای باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\|.\|_n$ یک نرم روی E^n باشد، به طوری که برای هر $x \in E$، $\|x\|_1 = \|x\|$