دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

مباحثی در تعریف ناپذیری صدق تارسکی

توسط

سعیده حاجی بهرامی

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقری

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

قضیه تعریف ناپذیری صدق در سال ۱۹۳۶ توسط آلفرد تارسکی[۱] مطرح و اثبات شد. این قضیه به طور غیر رسمی می گوید، صدق حساب در حساب قابل تعریف نیست. دقیق تر اینکه، مجموعه ی $\{\ulcorner\sigma\urcorner | \mathbb{N} \models \sigma\}$ در $\mathbb{N}$ تعریف ناپذیر است. تارسکی در اثبات خود از لم قطری (یا نقطه ثابت) استفاده کرده است.

در این پایان نامه سعی بر آن است که قضیه ی تعریف نا پذیری صدق را برای مدل های نااستاندارد حساب پئانو تعمیم دهیم و اثباتی نظریه مدلی برای آن بیاوریم. این اثبات را آبراهام رابینسون[۲] در سال ۱۹۶۳ ارائه داده است (رامن کساک[۳] در [9] این اثبات را که به کمک مدل های به طور بازگشتی آکنده انجام شده است ، بررسی می کند). سپس دو اثبات دیگر را بدون استفاده از لم قطری شرح می دهیم، و تعریف ناپذیری صدق را برای مدل های نااستاندارد بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی : مدل های حساب ، تعریف ناپذیری صدق ، به طور بازگشتی آکندگی ، کلاس ارضا.

---

[۱] Alfred Tarski

[۲] Abraham Robinson

[۳] Roman Kossak

فهرست مندرجات

مقدمه

در سال ۱۹۳۱ کورت گودل [۴] قضایای معروف ناتمامیت خود را ارائه کرد . گودل توانست تمام اشیاء منطق را به صورت یک به یک با اعداد طبیعی نمایش دهد ، یا به عبارت دیگر کد کند.
سپس در ۱۹۳۶ آلفرد تارسکی قضیه ی تعریف ناپذیری صدق را بیان و اثبات کرد . با پیشرفت دانش در مورد مدل های نااستاندارد حساب پئانو ، مفهوم صدق در مورد مدل های نااستاندارد ، باعث تعریف کلاس ارضا یا به طور خاص گسترش صدق شد ، که در فصل چهارم بیشتر در مورد آنها توضیح خواهیم داد . به طور کلی یک گسترش صدق درستی فرمول ها را در یک مدل حساب پئانو بررسی می کند .
آبراهام رابینسون در ۱۹۶۳ مدل های به طور بازگشتی آکنده را بررسی کرد ، که ارتباط خاصی بین این مدل ها و گسترش‌های صدق وجود دارد . از این طریق ثابت کرد که گسترش‌های صدق تعریف ناپذیرند .
در این پایان نامه مباحث فوق به تفصیل در پنج فصل بررسی خواهد شد . در فصل صفر برخی مفاهیم اولیه بیان می شود .در فصل اول مبحث کدگذاری گودل و گسترش آن به مدل‌های نااستاندارد را خواهیم گفت . فصل دوم به بررسی مدل های حساب پئانو و تعاریف خاصی در این نظریه می پردازد . در فصل سوم فرسینگ برای حساب پئانو را مطرح می کنیم.

[۴] Kurt Godel

روش فرسینگ در فصل چهارم برای اثبات قضایا به کار می آید . و سرانجام در فصل چهارم قضیه ی تعریف ناپذیری صدق را به روشهای مختلف مطرح و اثبات خواهیم کرد .

فصل صفر

مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیمی را عنوان خواهیم کرد ، که تا پایان این پایان نامه با آنها سروکار داریم.

ما در منطق مرتبه اول هستیم (پس قضایای صحت و تمامیت و ... برقرار است).

زبان مورد نظر، زبان حساب پئانو می باشد که عبارت است از:

$L_A = \{۰, ۱, <, +, .\}$ که در آن ۰ و ۱ ثابت ها ، $<$ یک رابطه‌ی دو تایی ، + و . توابع دو تایی هستند.

تئوری مورد نظر ما ، تئوری حساب پئانو است ، که آن را با PA نمایش می دهند. البته در بعضی موارد نیز با تئوری PA^- یا توسیع هایی از PA کار می کنیم که راجع به آنها توضیح خواهیم داد:

اصول تئوری PA^- عبارتند از:

۱) $\forall x, y, z((x + y) + z = x + (y + z))$ شرکت پذیری +

۲) $\forall x, y(x + y = y + x)$ جابجایی +

۳) $\forall x, y, z((x.y).z = x.(y.z))$ شرکت پذیری .

۴) $\forall x, y(x.y = y.x)$ جابجایی .

۵) $\forall x, y, z(x.(y+z) = x.y + x.z)$ توزیع پذیری . در +

۶) $\forall x(x + 0 = x \ \wedge \ x.0 = 0)$

۷) $\forall x(x.1 = x)$

۸) $\forall x, y, z(((x<y) \ \wedge \ (y<z)) \rightarrow x<z)$

۹) $\forall x(\neg x < x)$

۱۰) $\forall x, y(x<y \ \vee y<x \ \vee \ x=y)$

۱۱) $\forall x, y, z(x<y \rightarrow x+z < y+z)$

۱۲) $\forall x, y, z((0<z \ \wedge \ x<y) \rightarrow x.z < y.z)$

۱۳) $\forall x, y(x<y \rightarrow \exists z \ \ x+z = y)$

۱۴) $0 < 1 \ \wedge \ \forall x(0 < x \rightarrow 1 \leq x)$

۱۵) $\forall x(0 \leq x)$

PA^- را تئوری قسمت مثبت حلقه های مرتب گسسته نیز می گویند.
تئوری PA عبارت است از تئوری PA^- بعلاوه اصل استقرا:
اصل استقرا در واقع یک مجموعه از اصول است ، که برای هر فرمول $\varphi(x,\bar{y})$ در زبان L_A بیان می کند که :

$$\forall \bar{y} \ ((\varphi(0,\bar{y}) \ \wedge \ \forall x \ (\varphi(x,\bar{y}) \rightarrow \varphi(x+1,\bar{y}))) \longrightarrow \forall x \ \varphi(x,\bar{y}))$$

جمله فوق را با $I\varphi$ نمایش می دهیم.
اصل استقرا دارای معادل هایی مثل اصل کوچکترین عدد است.

اصل کوچکترین عدد برای هر فرمول $\varphi(x,\overline{y})$ بیان می کند که:

$$\forall\overline{y}\ ((\exists x\ \ \varphi(x,\overline{y}))\longrightarrow\exists z\ ((\varphi(z,\overline{y})\wedge\ \forall w\ (w<z\rightarrow\neg\varphi(w,\overline{y}))))$$

برای اثبات معادل بودن این دو اصل به [4] مراجعه شود.
L_A- ساختار $I\!N=(\omega,۰,۱,<,+,.)$ را در نظر می گیریم که در آن ω مجموعه‌ی اعداد طبیعی ، ۰ و ۱ اعداد طبیعی و+ ، . ، > معمولی در ω مد نظر است. بنابر این به دلیل خواص اعداد طبیعی می توان دید که $I\!N\models PA$.
$I\!N$ را مدل استاندارد حساب پئانو می نامیم.
در اینجا چون L_A دارای کاردینال متناهی است بنابر قضیه افزایشی لون‌هایم—اسکولم[5] برای هر کاردینال $\kappa\leq\aleph_۰$ ، PA دارای مدلی از کاردینال k است . [1]
بنابراین PA به جز $I\!N$ دارای مدل های دیگری با کاردینال های بیشتر از $\aleph_۰$ نیز هست.
به هر مدل PA که با $I\!N$ یکریخت نباشد ، مدل نا استاندارد PA گوییم.

قرارداد: برای هر $n\in\omega$ قرار می دهیم:

$$\underline{n}=\underbrace{۱+۱+\ldots+۱}_{n\ \text{بار}}\ ,\quad \underline{۰}=۰$$

قرارداد: اگر $\mathcal{M}=(M,۰,۱,+,.,<)$ مدل PA باشد آن را با همان M نمایش می‌دهیم.
حال فرض می کنیم $M\models PA$ دلخواه باشد ، ثابت می کنیم یک نشاندن مثل f از $I\!N$ به M

[5] قضیه لون‌هایم—اسکولم: فرض کنید Γ مجموعه ای سازگار از جمله ها در زبان L باشد و $|L|=\kappa$. اگر Γ مدلی نامتناهی داشته باشد آن گاه برای هر کاردینال $\lambda\geq\kappa$ ، Γ مدلی با کاردینال λ دارد.

موجود است :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

$$\forall n \in \omega \ : \ f(n) = \underline{n}$$

f یک نشاندن است زیرا می توان ثابت کرد:

$$\forall n, m \in \omega :$$

$$n = m \Longleftrightarrow PA \vdash \underline{n} = \underline{m}$$

$$PA \vdash \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$$

$$PA \vdash \underline{n}.\underline{m} = \underline{n.m}$$

$$n < m \Longrightarrow PA \vdash \underline{n} < \underline{m}$$

$$PA \vdash \forall x \ \ (x \leq \underline{n} \longrightarrow x = \underline{0} \ \vee \ x = \underline{1} \ \vee \ldots \vee \ x = \underline{n})$$

اثبات مطالب فوق در [4] موجود است.

قرارداد: پس می توان $\mathbb{N}$ را به عنوان زیر ساخت هر مدل PA مثل M در نظر گرفت به این صورت که برای هر $n \in \omega$، $\underline{n} \in M$ و n را با هم یکی گرفت.

اگر $M \models PA$ نااستاندارد باشد، یعنی با $\mathbb{N}$ غیر یکریخت است، پس f فوق نمی تواند پوشا باشد. به هر عضو $M - f(\mathbb{N})$ عضو نااستاندارد M گوییم.

در طول این پایان نامه ممکن است درباره زبان هایی مثل L که $L_A \subseteq L$ و از اضافه کردن تعدادی نماد محمولی (به خصوص محمول یکجایی) به L_A تشکیل شده باشد، صحبت شود. منظور ما از $PA^*(L)$ ، $L-$ تئوری ای که از PA^- به اضافه‌ی مجموعه‌ی اصول استقرا برای فرمول های زبان توسیع یافته‌ی L به وجود آمده است ، می باشد .

مثلاً اگر $L = L_A \cup \{X\}$ باشد، برای نشان دادن یک $L-$ ساختار آن را با (M, X) نشان می‌دهیم ، که در آن M یک L_A- ساختار است و $X \subseteq M$ تعبیرمحمول X در زبان L است.
در پایان به تعریف چند مفهوم اساسی می پردازیم:

تعریف ۱. اگر L یک زبان دلخواه و M یک $L-$ ساخت باشد. مجموعه $X \subseteq M^n$، $(n \in \omega)$ را تعریف‌پذیر نامیم در صورتی که $L-$ فرمول $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ و $\overline{a} \in M$ موجود باشد به طوری که:

$$X = \{\overline{x} \in M \mid M \models \varphi(\overline{x}, \overline{a})\}$$

$\overline{a}$ را پارامتر گوییم.
در غیر این صورت X را تعریف نا پذیر نامیم .

تعریف ۲. اگر M یک $L-$ ساخت و $A \subseteq M$ باشد ، عنصر $a \in M$ را روی A تعریف‌پذیر گوییم، هر گاه $L-$ فرمول $\varphi(x, \overline{y})$ و $\overline{b} \in A$ (به عنوان پارامتر) موجود باشد به طوری که:

۱) $M \models \varphi(a, \overline{b})$

۲) $M \models \forall x \ (\varphi(x, \overline{b}) \rightarrow x = a)$

تعریف ۳. فرض کنیم M و N دو $L-$ ساخت دلخواه باشند . می گوییم N توسیع مقدماتی از M است ، یا M زیر ساخت مقدماتی از N است و می نویسیم

$M \preceq N$ ، هرگاه اولاً $M \subseteq N$ ، ثانیاً برای هر $L-$ فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in M$ داشته باشیم:
$$M \models \varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$$

تعریف ۴. فرض کنیم M و N دو $L-$ ساخت دلخواه باشند . می گوییم N توسیع انتهایی از M است ، و می نویسیم $M \subseteq_e N$ ، هرگاه اولاً $M \subseteq N$ به عنوان یک زیرساخت ، ثانیاً برای هر $a, b \in N$ اگر $b \in M$ و $N \models a \leq b$ ، آن گاه $a \in M$ باشد .

با مفروضات دو تعریف فوق ، اگر $M \preceq N$ و $M \subseteq_e N$ برقرار باشند ، N را توسیع مقدماتی انتهایی M نامیم و می نویسیم $M \preceq_e N$.

تعریف ۵. فرض کنیم M و N دو $L-$ ساخت دلخواه باشند . می گوییم N گسترش هم‌پایان M است و می نویسیم $M \subseteq_{cf} N$ ، هرگاه اولاً $M \subseteq N$ به عنوان یک زیرساخت ، ثانیاً برای هر $a \in N$ ، $b \in M$ ای موجود باشد به طوری که $N \models a \leq b$.

در تئوری PA چون اصل کوچکترین عدد برقرار است ، اگر $M \models PA$ و $D \subseteq M$ تعریف پذیر باشد، می توان اعضای D را به صورت استقرایی مرتب کرد. یعنی قرار می دهیم $d_{\circ} =$ کوچکترین عضو D و فرض می کنیم d دلخواه باشد، منظور از d^+ کوچکترین عضو D است که $M \models d < d^+$ (البته ممکن است d^+ در D موجود نباشد).
درنتیجه می توان توابع تعریف پذیری با دامنه ی D به صورت اسقرایی تعریف کرد. یعنی مثلاً برای تابع f با دامنه ی D ابتدا $f(d_{\circ})$ را تعریف می کنیم، سپس فرض می کنیم برای $d \in D$دلخواه، $f(d)$ تعریف شده و از روی آن $f(d^+)$ را تعریف می کنیم. بنابراین تمام اعمال

فوق تعریف پذیرند.

فصل ۱

کد گذاری

در این فصل هدف ما این است که کد گذاری گودل برای ترم ها، جملات، فرمول ها و ... را بیان کنیم. همچنین مفهوم جدیدی در حساب پئانو برای توابع و روابط به نام به‌طوراثبات‌پذیربازگشتی عنوان کنیم، که از طریق آن می توان کد گذاری را در مدل های نااستاندارد حساب پئانو توسیع داد . مراجع اصلی در این فصل [4] و [5] است.

۱.۱ توابع و روابط بازگشتی

وقتی که ما از یک رابطه بازگشتی $A \subseteq \omega^k$ (که در آن ω مجموعه اعداد طبیعی و $k \geq ۱$ یک عدد طبیعی دلخواه است) صحبت می کنیم، منظور ما این است که یک محاسبه گر یا الگوریتم موجود است ، که در مورد k تایی $\bar{a} \in \omega^k$ به ما می گوید که آیا $\overline{a} \in A$ یا $\overline{a} \notin A$. در زیر تعریف دقیق آن خواهد آمد:

تعریف ۱.۱.۱ برای رابطه‌ی $R \subseteq \omega^n$، ($n \geq 1$) تابع مشخصه‌ی $\mathcal{X}_R : \omega^n \to \omega$ عبارت است از:

$$\mathcal{X}_R(\bar{a}) = \begin{cases} 0 & \bar{a} \in R \\ 1 & \bar{a} \notin R \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱ خانواده‌ی توابع بازگشتی (یا محاسبه پذیر)، کوچکترین خانواده توابع از ω^n به ω (برای $n \geq 1$ دلخواه) است ، به طوری که:

i) توابع $+$ ، $\cdot$ ، $\mathcal{X}_<$ و افکنش I_i^n برای هر $n \geq 1$ و $1 \leq i \leq n$ باضابطه ی :

$$I_i^n : \omega^n \longrightarrow \omega$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

بازگشتی اند.

ii) (ترکیب) اگر توابع $G : \omega^k \longrightarrow \omega$ و $H_1, \ldots, H_k : \omega^n \longrightarrow \omega$ بازگشتی باشند، آن گاه تابع $F : \omega^n \longrightarrow \omega$ با ضابطه‌ی $F(\bar{a}) = G(H_1(\bar{a}), \ldots, H_k(\bar{a}))$ بازگشتی است.

iii) (کمینه سازی) اگر $G : \omega^{n+1} \longrightarrow \omega$ بازگشتی باشد ، به طوری که برای هر $\bar{a} \in \omega^n$ ، $x \in \omega$ ای موجود باشد که $G(\bar{a}, x) = 0$ ، آن گاه تابع $F : \omega^n \longrightarrow \omega$ با ضابطه‌ی

$$F(\bar{a}) = \mu_x(G(\bar{a}, x) = 0) \ (= \quad \text{کوچکترین } x \in \omega \text{ که } G(\bar{a}, x) = 0\ )$$

بازگشتی است.

تعریف ۳.۱.۱ رابطه‌ی $R \subseteq \omega^k$ ($k \geq 1$) را بازگشتی گوییم ، هرگاه تابع مشخصه‌ی آن بازگشتی باشد.

توجه ۱.۱.۱ اگر $P,Q \subseteq \omega^n$ روابط بازگشتی باشند آن گاه $P \vee Q, \neg P$ و $P \wedge Q$ بازگشتی اند.[5]

۲.۱ تعریف پذیری مجموعه‌های بازگشتی در $I\!N$

تعریف ۱.۲.۱ فرمول $\theta(\bar{x})$ در زبان $L_A \subseteq L$ را Δ_0 گوییم ، در صورتی که هر سور موجود در آن (در صورت وجود) کراندار باشد ، یعنی اگر Q یکی از دو سور $\forall$ یا $\exists$ باشد که در $\theta(\bar{x})$ ظاهر شده ، آن صور به صورت $Qx < t(\ldots)$ باشد که در آن t یک $L-$ ترم است و منظور از $Qx < t(\ldots)$ برای سور جهانی به صورت $\forall x\ (x < t \rightarrow \ldots)$ و برای سور وجودی به صورت $\exists x\ (x < t \wedge \ldots)$ است.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $L_A \subseteq L$. برای $n = 0$ قرار می دهیم $\Sigma_0 = \Delta_0 = \Pi_0$ حال به صورت استقرایی و همراه با هم Σ_{n+1} و Π_{n+1} را تعریف می کنیم :
برای $n \geq 1$، $L-$ فرمول $\psi(\bar{x})$ را Σ_{n+1} گوییم ، هرگاه به صورت $\exists \overline{y}\ \theta(\bar{x},\overline{y})$ باشد که در آن $\theta(\bar{x},\overline{y}) \in \Pi_n$.
مشابهاً $\psi(\bar{x})$ را Π_{n+1} گوییم ، هرگاه به صورت $\forall \overline{y}\ \theta(\bar{x},\overline{y})$ باشد که در آن $\theta(\bar{x},\overline{y}) \in \Sigma_n$.

توجه ۱.۲.۱ اگر ما در یک $L-$ تئوری مثل T بودیم و فرمولی مثل $\psi(\bar{x})$ با یک فرمول Σ_n مثل $\theta(\bar{x})$ در T معادل بود ، یعنی داشتیم: $T \vdash \forall \bar{x}\ (\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$
آن گاه می گوییم $\psi(\bar{x}) \in \Sigma_n(T)$. مشابهاً برای Π_n.
اگر $\psi(\bar{x}) \in \Sigma_n(T) \cap \Pi_n(T)$ بود، آن گاه می گوییم $\psi(\bar{x}) \in \Delta_n(T)$.
اگر در یک $L-$ ساخت مثل M بودیم و $M \models \forall \bar{x}\ (\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$
آن گاه می گوییم $\psi(\bar{x}) \in \Sigma_n(M)$. مشابهاً برای Π_n و Δ_n.

می توان ثابت کرد که $\cup_{n=0}^{\infty}\Sigma_n = \cup_{n=0}^{\infty}\Pi_n$ و برابر با تمام فرمول های زبان L است و

$$\Sigma_0 \subsetneqq \Sigma_1 \subsetneqq \Sigma_2 \subsetneqq \dots$$

$$\Pi_0 \subsetneqq \Pi_1 \subsetneqq \Pi_2 \subsetneqq \dots$$

در ادامه قضایایی را بدون اثبات خواهم آورد که اثبات آنها در [4] موجود است.

قضیه ۳.۲.۱ اگر $\theta(\bar{x})$ یک Δ_0-فرمول در L_A باشد آن گاه تابع $\mathcal{X}_\theta : \omega^n \to \omega$ (که در آن n تعداد مولفه های $\overline{x}$ در فرمول $\theta(\bar{x})$ است) با ضابطه‌ی

$$\mathcal{X}_\theta(\bar{a}) = \begin{cases} 1 & I\!N \models \theta(\bar{a}) \\ 0 & I\!N \models \neg\theta(\bar{a}) \end{cases}$$

بازگشتی است.

نتیجه ۴.۲.۱ زیر مجموعه‌های Δ_0-تعریف پذیر مدل استاندارد PA، بازگشتی اند.

اثبات : مدل استاندارد حساب PA را در نظر می گیریم: $I\!N = (\omega, ., +, <, ۰, ۱)$
فرض کنیم $A \subseteq \omega$ در $I\!N$ با $\Delta_۰-$ فرمول $\theta(x, \bar{a})$ که $\bar{a} \in \omega^n$ (به عنوان پارامتر) ، تعریف پذیر باشد. بنابر نکته ۱.۱.۱ کافیست ثابت کنم $\neg A$ بازگشتی است.

$$\mathcal{X}_{\neg A}(m) = \begin{cases} ۱ & m \notin \neg A \Leftrightarrow m \in A \Leftrightarrow I\!N \models \theta(m, \bar{a}) \\ ۰ & m \in \neg A \Leftrightarrow m \notin A \Leftrightarrow I\!N \models \neg\theta(m, \bar{a}) \end{cases}$$
$$= \mathcal{X}_\theta(m, \bar{a})$$

در نتیجه بنابر قضیه ۳.۲.۱، تعریف تابع بازگشتی و بازگشتی بودن تابع ثابت [5]، A بازگشتی است. ■

برعکس نتیجه فوق لزوماً برقرار نیست ، یعنی نمی توان گفت هر زیرمجموعه‌ی بازگشتی از ω ، $\Delta_۰-$ تعریف پذیر است. [4]

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنیم $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ یک تابع دلخواه و $k \geq ۱$. آن گاه f بازگشتی است اگر و فقط اگر گراف تابع f، که آن را با Γ_f نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود، توسط یک فرمول $\Sigma_۱$ در $I\!N$ تعریف پذیر باشد.

$$\Gamma_f = \{(\bar{x}, y) \mid \bar{x} \in \omega^k \ , \ y \in \omega \ , \ f(\bar{x}) = y\}$$

قضیه ۶.۲.۱ رابطه‌ی $A \subseteq \omega^k$ (برای $k \geq ۱$) بازگشتی است اگر و فقط اگر توسط یک فرمول $\Delta_۱$ در $I\!N$ تعریف پذیر باشد.

این بخش را با قضیه معروف گودل به نام قضیه β که آن را بدون اثبات خواهم گذاشت به پایان می بریم. اثبات این قضیه در [4] موجود است. ابتدا به معرفی تابع زوج سازی کانتور

می‌پردازیم:

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم $M \models PA$ تعریف می کنیم:

$$\langle , \rangle : M^{2} \longrightarrow M$$

$$\forall x, y \in M: \ \langle x, y\rangle = \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + 2$$

در تئوری PA می توان ثابت کرد که این تابع خوش تعریف، پوشا و یک به یک است. همچنین این تابع به ما کمک می کند که هر n تایی از M^n را به صورت یک به یک با یک عضو از M متناظر کنیم ، یعنی اگر $a_0, a_1, \ldots, a_n \in M$ دلخواه باشند ، عضو متناظر با $(a_0, \ldots, a_n)$ در M عبارت است از $\langle a_0, \langle a_1, \langle \ldots, \langle a_{n-1}, a_n\rangle\rangle \ldots\rangle\rangle$.

قضیه ۸.۲.۱ L_A- فرمول Δ_0، $\theta(x,y,z)$ موجود است که آن را به صورت نمادین به صورت $(x)_y = z$ نشان می دهیم، به طوری که برای هر مدل PA مثل M و $n \in \omega$ داریم:

$$\forall x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in M \quad \exists u \in M \ \ s.t$$

$$\forall i < n \ : \ M \models (u)_i = x_i$$

۳.۱ نمایش پذیری در PA

برای آنکه مفهوم بازگشتی بودن یک تابع (یا رابطه) را به تئوری PA ارتباط دهیم، در اینجا مفهومی به نام نمایش پذیری را تعریف می کنیم: