وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

تحلیل حساسیت مسایل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی

استاد راهنما
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر
رعنا احمدی

بهار ۱۳۹۰
تبریز - ایران


بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلّم آذربایجان
ادارهٔ کلّ تحصیلات تکمیلی

« به نام خدا »

صورتجلسه نتیجهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

طبق درخواست شمارهٔ ۶۰۰/۴۰۰ مورّخ ۱۳۹۰/۳/۲۳ تحصیلات تکمیلی دانشکدهٔ علوم پایه و مجوّز شمارهٔ ۴۱۷/۵۶ مورّخ ۱۳۹۰/۳/۲۳ تحصیلات تکمیلی دانشگاه جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد خانم **رعنا احمدی** به شمارهٔ دانشجویی ۸۷۱۹۲۱۳۰۱ دررشتهٔ **ریاضی کاربردی** تحت عنوان: **تحلیل حساسیت مسایل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی**، به ارزش ۶ واحد، در ساعت ۱۰:۳۰ مورّخ ۱۳۹۰/۴/۱۴ در حضور هیئت داوران مرکّب از:

۱- استاد یا اساتید راهنما دکتر علیرضا غفاری امضاء غفاری

۲- استاد یا اساتید مشاور

۳- عضو هیئت داوران دکتر شهرام رضاپور امضاء

۴- نمایندهٔ ادارهٔ کلّ تحصیلات تکمیلی در گروه دکتر محمد حسین ستاری امضاء

برگزار شد و با درجه ...عالی... نمرهٔ ...نوزده و بیست و پنج... ارزشیابی گردید.

۱۹٫۲۵

مدیر گروه آموزشی
امضاء

رئیس دانشکده
امضاء

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلّم آذربایجان
ادارهٔ کلّ تحصیلات تکمیلی

« به نام خدا »

تأییدیهٔ اعضای هیئت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامهٔ خانم **رعنا احمدی** تحت عنوان : **تحلیل حساسیت مسایل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی** را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده، پذیرش آن را جهت نیل به درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضاء هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر علیرضا غفاری	دانشیار	غفاری
۲. استاد مشاور			
۳. استاد ناظر	دکتر شهرام رضاپور	استاد	
٤. نمایندهٔ ادارهٔ تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد حسین ستاری	استادیار	

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

تحلیل حساسیت مسایل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی

استاد راهنما

دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر

رعنا احمدی

بهار ۱۳۹۰

تبریز - ایران

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید. و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است.

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

حمد و سپاس مخصوص خداوندی است که ستایشگران از مدحش عاجزند و حسابگران زبردست نعمت هایش را حساب نتوانند کرد و افکار ژرف اندیش کنه ذاتش را درك نکنند.
اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از زحمات استاد راهنمایم جناب آقای دکتر علیرضا غفاری حدیقه تقدیر و تشکر نمایم .

هم چنین از دیگر اساتید گران مایه گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم آذربایجان و نیز کلیه مسئولین دانشکده علوم پایه قدردانی می نمایم.

رعنا احمدی ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه تحلیل حساسیت مسایل بهینه سازی نیمه نامتناهی بررسی شده است. این مسایل به صورت خطی در نظر گرفته شده و پریشیدگی در سمت راست قیدها، بردار هزینه و یا پریشیدگی همزمان آن‌ها فرض می‌شود. دو نوع افراز ارائه شده‌اند که با استفاده از آن‌ها، به بررسی رفتار تابع مقدار بهینه مساله بهینه سازی نیمه نامتناهی پرداخته و شرایط کافی برای خطی بودن تابع مقدار بهینه نسبت به پریشیدگی‌های مفروض، مطالعه می‌شود.

کلمات کلیدی : بهینه سازی نیمه نامتناهی خطی، بهینه سازی نیمه نامتناهی پارامتری، تحلیل حساسیت، تابع مقدار بهینه.

پیشگفتار

اگر چه مبدا مسایل نیمه نامتناهی به تقریب چبیشف که با مطالعات انجام یافته توسط هار [1] و جان فریتز[2] به ترتیب در زمینه دستگاه‌های نیمه نامتناهی خطی و شرط‌های بهینگی مربوط می‌شود، ولی مفهوم آن‌ها در سال۱۹۶۲ توسط چارنز [3] ، کوپر [4] و کورتانك [5] در چندین مقاله که به مسایل نیمه نامتناهی خطی اختصاص یافته بود، مورد توجه فزاینده ای قرار گرفت و اخیرا محققان برای پیشرفت کاربردهای اولیه مسایل بهینه سازی نیمه نامتناهی در زمینه اقتصاد، نظریه بازی، استنباط آماری و غیره، مقالات زیادی منتشر نموده‌اند. در طول ۵ دهه اخیر در حوزه بهینه سازی نیمه نامتناهی پیشرفت فراوانی وجود داشته است به طوری که بیش از ۱۰۰ مقاله و ۱۰ کتاب در زمینه‌ها ی نظری، روش‌های عددی و کاربردهای بهینه سازی نیمه نامتناهی منتشر شده است.

یکی از بحث‌هایی که در تحلیل حساسیت این مسایل مطالعه شده است، خطی بودن تابع مقدار بهینه نسبت به پریشیدگی ایجاد شده در ضرایب تابع هدف، سمت راست قیدها و یا پریشیدگی همزمان آن‌ها می‌باشد.

در این پایان نامه، تحلیل حساسیت مسایل بهینه سازی نیمه نامتناهی خطی مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل اول مفاهیم مقدماتی و نمادهایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، آورده شده است. فصل دوم شامل معرفی مسایل بهینه سازی نیمه نامتناهی، به ویژه نیمه نامتناهی خطی است. در فصل سوم نیز تحلیل حساسیت مسایل بهینه سازی نیمه نامتناهی خطی مورد مطالعه قرار گرفته است و این تحلیل امکان می‌دهد تا خطی بودن تابع مقدار بهینه، نسبت به پریشیدگی ایجاد شده، بررسی شود.

---

[1] Haar
[2] Fritz-John
[3] Charnes
[4] Cooper
[5] Kortanek

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

مساله برنامه‌ریزی نیمه نامتناهی خطی، حالت خاصی از مساله بهینه‌سازی مقید است که در آن تابع هدف و تابع قیدها نسبت به متغیرهای تصمیم خطی هستند. بر این اساس، ابتدا شکل عمومی مساله بهینه‌سازی مقید را تعریف کرده، سپس مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی و همچنین مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی خطی را به عنوان یك حالت خاص معرفی می‌کنیم. در ادامه نیز برخی از نمادها، تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز بیان می‌شوند.
شکل عمومی مساله بهینه سازی مقید به صورت

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} f(x) \\ &\textbf{s.t.} \quad S=\{x\in\mathbb{R}^n | g(x,t)\geq 0, t\in T\}, \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

تعریف می‌شود که در آن T مجموعه اندیس، S مجموعه شدنی، x متغیر تصمیم n -بعدی (بعد فضای جواب) و $f(x)$ تابع هدف است. بر حسب این که تعداد قیدها و یا بعد فضای جواب، متناهی و یا نامتناهی باشند، مساله بهینه‌سازی به دو دسته متناهی و نیمه نامتناهی به صورت زیر تقسیم می‌شوند.
هرگاه بعد فضای جواب و تعداد قیدهای مساله، هر دو متناهی باشند مساله بهینه‌سازی را متناهی و در صورتی که تعداد قیدها و یا بعد فضای جواب مساله (و نه هردو با هم) نامتناهی باشد، آن را مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهیSIP[۱] نامند. این مساله هرگاه تابع هدف و توابع قیدها در

[۱] Semi-Infinite Programming

ناحیه شدنی خطی باشند، مساله بهینه سازی نیمه نامتناهی خطی نامیده می‌شود و آن را به اختصار با LSIP[۲] نشان می‌دهیم.

نرم اقلیدسی بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را با $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم و $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ و 0_n ، به ترتیب نشان دهنده پایه متعارف و بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ هستند. نماد $B(x^*, \delta)$ نشان دهنده گوی باز به مرکز x^* و شعاع $\delta > 0$ است.

$$B(x^*, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x^* - x\| < \delta\}.$$

نقطه $x \in X$ ، نقطه درونی مجموعه X نامیده می‌شود هرگاه $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $B(x, \delta) \subset X$ مجموعه نقاط درونی X با نماد $\text{int } X$ نشان داده و به صورت

$$\text{int } X = \{x | x \in X, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq X\},$$

تعریف می‌کنیم.

در صورتی که $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ ، حاصل جمع $\sum_{i=1}^{m} \beta_i x^i$ ترکیب خطی $x^1, \ldots, x^m$ و مجموعه تمام ترکیبات خطی اعضای X، پوسته خطی مجموعه X نامیده می‌شود و با نماد $\text{span } X$ نشان داده می‌شود. اگر در ترکیب خطی $x^1, \ldots, x^m$ ، برای همه i ها، $\beta_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$ باشد، ترکیب خطی مذکور ترکیب محدب $x^1, \ldots, x^m \in X$ نامیده می‌شود. پوسته محدب مجموعه $X \subset \mathbb{R}^n$ که با $\text{conv } X$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام ترکیبات محدب بردارهای X بوده و به صورت

$$\text{conv } X = \left\{\sum_{i=1}^{m} \beta_i x^i | \sum \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, \forall i\right\},$$

تعریف می‌شود.

مجموعه $X \subset \mathbb{R}^n$ را یك مخروط محدب نامند هرگاه برای هر $x, y \in X$، $\beta_1 x + \beta_2 y \in X$ ، که در آن $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$.

مجموعه تمام ترکیبات مخروط محدب، پوسته مخروط محدب نامیده شده، با نماد $\text{cone } X$ نمایش داده شده و به صورت

[۲] Linear Semi-Infinite Programing

$$\text{cone } X = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \beta_i x^i | \beta_i \geq 0, \forall i \right\} \ ,$$

تعریف می‌شود.

حاصل جمع $\sum_{i=1}^{m} \beta_i x^i$ ترکیب آفینی $x^1, \ldots, x^m$ نامیده می‌شود هرگاه $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$ و β_i ها، اعداد حقیقی باشند. مجموعه تمام ترکیبات آفینی مجموعه X را پوسته آفینی نامیم،با aff X نمایش داده و به صورت

$$\text{aff } \ X = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \beta_i x^i | \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \right\} \ ,$$

تعریف می‌کنیم.

در صورتی که X یك مجموعه محدب باشد، نقطه x را درون نسبی X گوییم هرگاه برای هر $\bar{x} \in X$ ، $\tilde{x} \in X$ و $0 < \lambda < 1$ وجود داشته باشند به طوری که $x = \lambda \tilde{x} + (1 - \lambda) \bar{x}$. مجموعه تمام نقاط درون نسبی X را با نماد $\text{rint } X$ نمایش می‌دهیم.

نماد X° برای نشان دادن قطب مثبت X به کار می‌رود و به صورت

$$X^\circ = \left\{ d \in \mathbb{R}^n | d^T x \geq 0 \ , \forall x \in X \right\} \ ,$$

تعریف می‌شود.

بعد مجموعه محدب $X \subset \mathbb{R}^n$ را با $\dim X$ نمایش می‌دهیم و مجموعه محدب $X \subset \mathbb{R}^n$ نسبتا باز نامیده می‌شود هرگاه $\text{rint } X = X$. بردار $y \in \mathbb{R}^n$ را یك جهت شدنی در نقطه $x \in X$ گوییم در صورتی که $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $x + \varepsilon y \in X$.

مخروط جهت‌های شدنی X در نقطه x را با نماد $D(X, x)$ نشان داده و به صورت

$$D(X, x) = \text{cone} \left\{ d \in \mathbb{R}^n | \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon d \in X \right\},$$

تعریف می‌کنند.

دامنه تابع $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ را با نماد $\text{dom } f$ نشان داده و به صورت

$$\text{dom } f = \left\{ x \in f | f(x) \in \bar{\mathbb{R}} \right\} \ ,$$

بیان می‌شود.
تابع $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ را همگن (مثبت) در $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{cone} X$ گوییم هر گاه برای هر $\lambda > 0$ و $x \in X$ ، $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. به ویژه اگر X مخروط محدب و f در x همگن باشد، آن‌گاه f را در x خطی گوییم اگر $d \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$. $f(x) = d^T x$

فصل ۲

مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی

۱.۲ مقدمه

در این فصل چند نتیجه نظری در مورد بهینه‌سازی نیمه نامتناهی مرور می‌شود و تمرکز اصلی روی بهینه‌سازی نیمه نامتناهی خطی می‌باشد.
هم چنان که در فصل قبلی گفته شد، مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی، مساله‌ای است که در آن تعداد قیدها و یا بعد فضای تصمیم‌گیری (و نه هر دو با هم) نامتناهی باشد. در این پایان نامه، تمرکز روی حالتی است که فقط تعداد قیدها نامتناهی هستند.
شکل عمومی مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی به صورت

$$\begin{array}{lll} \inf & f(x) & \\ \text{s.t.} & g(x,t) \geq 0 & t \in U \\ & g(x,t) = 0 & t \in V, \end{array} \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌شود. در این مساله، $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر تصمیم n بعدی و U و V مجموعه اندیس‌ها هستند به طوری که $T = U \cup V$, $U \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$. مجموعه شدنی، مقدار بهینه و مجموعه بهینه مساله (۱.۲) را به ترتیب با F, v^P, F^* نشان داده و به صورت

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x,t) \geq 0 \ \ t \in U, g(x,t) = 0 \ \ t \in V\},$$

$$v^P = \inf \{f(x) | x \in F\},$$

$$F^* = \left\{\bar{x} \in F | f(\bar{x}) = v^P\right\},$$

تعریف می‌شوند.

۲.۲ کاربردها

بهینه‌سازی نیمه نامتناهی کاربردهای فزاینده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله، مساله کمینه نرم در فضای چند جمله‌ای‌ها، فیزیک ریاضی، رباتیک، اقتصاد و غیره دارند. در ادامه به یکی از کاربردهای مساله بهینه‌سازی نیمه نامتناهی در هندسه اشاره می‌کنیم.
تقریب بیرونی مجموعه $Y \subset \mathbb{R}^m$ توسط مجموعه $S(x)$ ، وابسته به پارامتر x ، منجر به حل مساله نیمه نامتناهی می‌شود.[۱]
فرض کنید $S(x)$ به صورت $S(x) = \{y \in \mathbb{R}^m | g(x,y) \geq 0\}$ تعریف شود و $v(x)$ حجم $S(x)$ را مشخص نماید. برای پیدا کردن مجموعه $S(x)$ با کوچکترین حجم که مجموعه Y را پوشش دهد، مساله نیمه نامتناهی به صورت

$$\begin{aligned} &\min_x \quad v(x) \\ &\text{s.t.} \quad g(x,y) \geq 0 \quad \forall y \in Y, \end{aligned}$$

را حل می‌کنیم.

۳.۲ شرط‌های بهینگی

قبل از بیان شرط‌های لازم و کافی بهینگی مسایل بهینه‌سازی نیمه نامتناهی، تعریف‌های بعدی را می‌آوریم.

تعریف ۱.۳.۲. نقطه شدنی $\bar{x} \in F$ را کمینه محلی مساله (۱.۲) نامند هرگاه $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ داشته باشیم

$$f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\geq ۰.$$

تعریف ۲.۳.۲. کمینه $\bar{x}$ را سراسری گوییم هرگاه به ازای هر $x\in F$ رابطه

$$f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\geq ۰,$$

برقرار باشد.

تعریف ۳.۳.۲. نقطه شدنی $\bar{x}\in F$ را کمینه محلی اکید از مرتبه $p>۰$ نامند هرگاه

$$q>۰\ ,\varepsilon>۰$$

چنان وجود داشته باشند که برای هر $x\in B\left(\bar{x},\varepsilon\right)$ داشته باشیم

$$f\left(x\right)-f\left(\bar{x}\right)\geq q\|x-\bar{x}\|^{p}.$$

برای $\bar{x}\in F$ مجموعه اندیس فعال را با نماد $T_a\left(\bar{x}\right)=\{t\in T|g\left(\bar{x},t\right)=۰\}$ تعریف می‌کنیم.

در ادامه شرط‌های کیفیت قید استقلال خطی (LICQ)[۱] و کیفیت قید مانگاساریان-فرومویچ (MFCQ)[۲] را بیان می‌کنیم.

گوییم شرط قید LICQ در نقطه $\bar{x}\in F$ برقرار است هرگاه گرادیان قیدهای فعال در نقطه $\bar{x}$

$$\{\nabla_x g\left(\bar{x},t\right),\ t\in T_a\left(\bar{x}\right)\},$$

مستقل خطی باشند. هم چنین گوییم شرط MFCQ در نقطه $\bar{x}$ برقرار است هر گاه بردار $d\in\mathbb{R}^n$ موجود باشد به طوری که

$$\nabla_x g\left(\bar{x},t\right)\ d>۰,\quad \forall t\in T_a\left(\bar{x}\right).$$

بردار d که در شرط MFCQ صدق کند جهت شدنی اکید نامیده می‌شود.

[۱] Linear Independence Constraint Qualification
[۲] Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification