بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی‌ارشد ریاضی(محض)

رده بندی خمینه های از نقص همگنی یک،با خمیدگی مثبت و مجموعه نقطه های ثابت ناتهی

نگارش

وحید عظیمی موصلو

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

استاد مشاور

دکتر حسین عابدی

مهرماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **وحید عظیمی‌موصلو** رشته **ریاضی (محض)** تحت عنوان: «**رده‌بندی خمینه‌های از نقص همگنی یک، با خمیدگی مثبت و مجموعه نقطه‌های ثابت ناتهی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر حسین عابدی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر رضا میرزایی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	

۱۰۲۳۰۳

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند.

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی (ریاضی) است که در سال ۱۳۸۶ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید مهدی باقری (...) ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر حسین صابری و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ــــ از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب وحید عظیمی موسلو دانشجوی رشته ریاضی (ریاضی) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضا:
۱۳۸۶/۸/۱۳

تقدیم به بهترین واژگان حیات

پدر و مادر مهربانم،

و آنهایی که ازصمیم قلب دوستشان دارم.

Śvetāśvatara Upanisad:

Where the fire is churned, where the wind wafts, where the Soma juice flows over – there the mind is born.

قدردانی

خدایا به مستان جام الست

که از باده‌ی وحدتم، ساز مست

چنان مست سازم، ز جام طهور

که در عالم اندازم از عشق شور

ز عشق وجنونم، سر افراز کن

به رویم در معرفت، باز کن .

ملهم کاشانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

وحید عظیمی موصلو

مهرماه ۱۳۸٦

چکیده

فرض کنید G یک زیرگروه بسته (همبند) از گروه طولپایی های خمینه ریمانی (بسته) M باشد. بعد فضای مداری M/G، نقص همگنی M تحت عمل G نامیده می شود، اگر M^G بیانگر مجموعه نقاط ثابت این عمل باشد آنگاه نقص همگنی نقطه ثابت عمل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} cohomfix(M,G) := \dim(\frac{M}{G}) - \dim(M^G) - 1 & M^G \neq \emptyset \\ cohomfix(M,G) := cohom(M,G) = \dim(\frac{M}{G}) & M^G = \emptyset \end{cases}$$

در این پایان نامه ما به مطالعه خمینه های از نقص همگنی نقطه ثابت یک می پردازیم. نشان می‌دهیم که هر خمینه ریمانی همبند ساده با نقص همگنی نقطه ثابت یک و خمیدگی مقطعی مثبت با یکی از فضاهای متقارن و فشرده از رتبه یک، وابرسان است.

واژه‌های کلیدی: خمیدگی مثبت، گروه های تبدیل، نقص همگنی نقطه ثابت.

فهرست مندرجات

مقدمه

اگر G یک زیرگروه لی فشردهٔ (همبند) از گروه طولپایی‌های خمینهٔ ریمانی (بسته) M باشد، بعد فضای مداری $\frac{M}{G}$ را که برابر نقص بعد مدار اصلی $\frac{G}{H}$ در M است، نقص همگنی عمل گروه G بر M می‌نامند و با $cohom(M,G)$ نمایش می‌دهند. $cohom(M,G) = ۰$ به این معناست که G بر M ترایا عمل می‌کند و $M = \frac{G}{H}$ یک خمینهٔ همگن است، مطالعهٔ فضاهای با نقص همگنی‌های $۱, ۲, \ldots$ از دههٔ ۱۹۴۰ با عمل گروه های فشرده بر فضای اقلیدسی و کره‌ها آغاز شد و در سال ۱۹۵٦ P.SMostert نشان داد که اگر خمینهٔ همبند M از نقص همگنی یک تحت عمل گروه لی همبند فشرده G باشد آنگاه فضای مداری $\frac{M}{G}$ با یکی از چهار فضای S^1، R، $[۰,\infty)$ یا $[۰,۱]$ همانسان است؛ همچنین رده‌بندی گروه های فشرده و عمل آنها بر فضای اقلیدسی با نقص همگنی ۱، ۲ و ۳ توسط E.Straume ([S]) در سال ۱۹۹٦ تکمیل شده است.

اگر M^G بیانگر مجموعهٔ نقاط ثابت عمل G بر M باشد آنگاه نقص همگنی نقاط ثابت عمل G بر M که با $cohomfix(M,G)$ نمایش می‌دهند چنین تعریف می شود

$$\begin{cases} cohomfix(M,G) := \dim(\frac{M}{G}) - \dim(M^G) - ۱ & M^G \neq \emptyset \\ cohomfix(M,G) := cohom(M,G) = \dim(\frac{M}{G}) & M^G = \emptyset \end{cases}$$

اگر $cohomfix(M,G) = ۰$ آنگاه M را G–خمینه نقطهٔ ثابت همگن می گویند. خمینه‌های نقطهٔ ثابت همگن با خمیدگی مثبت توسط Berger ([Ber])، Wilking ([W]) وBerard-Bergery ([BB]) شناسایی شده‌اند و Grove-Searle ([GS]) آنها را بطور کامل با استفاده از عمل ترایایی G بر کرهٔ یکه عمود بر مولفهٔ همبندی مجموعه نقاط ثابت با بیشترین بعد رده‌بندی کرده‌اند.

این پایان نامه شامل ۳ فصل است که در فصل اول به مفاهیم اساسی گروه‌های لی و ساختار فضای مداری می‌پردازیم. در فصل دوم فضاهای الکساندرف را به دلیل اهمیت آنها در مطالعهٔ خمینه‌های با خمیدگی مثبت مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در فصل پایانی به بررسی اثبات قضیهٔ زیر از مرجع [K]

می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که اثبات قضیه زیر در این مرجع کاملاً اشتباه است و خلاصه اثبات از مرجع ($[GK]$) ارائه می شود.

قضیه. $[K]$ و $[GK]$ هر خمینه ریمانی همبند ساده با نقص همگنی نقطه ثابت یک و خمیدگی موضعی مثبت با یکی از فضاهای متقارن و فشرده از رتبه یک، $\mathbb{S}^n, \mathbb{HP}^n, \mathbb{CP}^n$ یا $Ca\mathbb{P}^2$، وابرسان است.

قابل ذکر است که این قضیه توسط $Crove$ و Kim در سال ۲۰۰۴ در مرجع $[GK]$ اثبات شده است. مقاله $[K]$ در سال ۲۰۰۶ به عنوان یک اثبات ساده‌تر از قضیهٔ فوق به چاپ رسیده است.

فصل ۱

گروههای تبدیل در هندسه دیفرانسیل

«در بسیاری از شاخه‌های علم، هر نسل آنچه
را نسل قبلی ساخته است ویران می سازد، و
چیزی را که کسی بنا کرده دیگری از میان بر
می دارد. فقط در ریاضیات است که هر نسل
طبقه جدیدی به ساختمان قدیم می‌افزاید.»

هرمان هانکل

۱.۱ گروههای لی

تعریف ۱.۱.۱ یک مجموعه G را یک گروه توپولوژیک[1] گویند اگر

- G یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد

[1] Topological group

- G یک گروه باشد
- نگاشت $\alpha_G : (g,h) \to gh^{-1}$ از فضای $G \times G$ به فضای G پیوسته باشد.

توجه ۱.۱.۱ با توجه به تعریف بالا به سادگی دیده می شود که نگاشت $\begin{array}{c} m : G \times G \to G \\ (g,h) \to gh \end{array}$ پیوسته و نگاشتهای $\begin{array}{c} i : G \to G \\ g \to g^{-1} \end{array}$ و $\begin{array}{c} L_h : G \to G \\ g \to hg \end{array}$ و $\begin{array}{c} R_h : G \to G \\ g \to gh \end{array}$ برای هر h در G همسانیهایی [۲] از گروه توپولوژیک G می باشند.

تعریف ۲.۱.۱ زیر فضای H از گروه توپولوژیک G را یک زیر گروه توپولوژیک گویند هرگاه H خود یک گروه توپولوژیک باشد.

گزاره ۱. ($[Br]$) اگر H زیر گروه بسته گروه توپولوژیک G باشد آنگاه $\frac{G}{H}$، فضای همدسته‌های چپ [۳] H در G با توپولوژی خارج قسمتی [۴]، یک فضای هاسدورف است و $\phi : G \to \frac{G}{H}$ نگاشتی باز و پیوسته است چنانچه H زیر گروه نرمال [۵] G باشد $\frac{G}{H}$ گروه توپولوژیک است.

لم ۱.۱.۱ ($[Mi]$) هر زیر گروه توپولوژیک موضعاً بسته [۶] از یک گروه توپولوژیک، بسته است.

---

[۲] Homeomorphisms

[۳] Left cosets space

[۴] Quotient topology

[۵] Normal subgroup

[۶] Locally close

لم ۲.۱.۱ ([Br]) $N(H)=\{g\in G: gHg^{-1}=H\}$، نرمال ساز[۷] زیر گروه توپولوژیک H یک گروه توپولوژیک G، یک زیر گروه توپولوژیک G است و اگر H در G بسته باشد آنگاه $N(H)$ نیز بسته است.

گزاره ۲. ([Br]) فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیر گروه بسته G باشد. هرگاه H و $\frac{G}{H}$ همبند[۸] (فشرده[۹]) باشند آنگاه G نیز همبند (فشرده) است.

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه G را یک گروه لی[۱۰] گویند اگر

- G یک خمینه هموار[۱۱] باشد
- G یک گروه باشد
- نگاشت $\alpha_G:(g,h)\to gh^{-1}$ از خمینه $G\times G$ به خمینه G هموار[۱۲] باشد.

توجه ۲.۱.۱ با توجه به تعریف بالا به سادگی دیده می شود که نگاشت $\begin{matrix} m:G\times G\to G \\ (g,h)\to gh \end{matrix}$ هموار و نگاشتهای $\begin{matrix} i:G\to G \\ g\to g^{-1} \end{matrix}$ و $\begin{matrix} L_h:G\to G \\ g\to hg \end{matrix}$ و $\begin{matrix} R_h:G\to G \\ g\to gh \end{matrix}$ برای هر h در G وابرسانیهای[۱۳] گروه لی G می باشند.

---

[۷] Normalizer

[۸] Connected

[۹] Compact

[۱۰] lie group

[۱۱] Smooth manifold

[۱۲] Smooth

[۱۳] Diffeomorphisms

تعریف ۴.۱.۱ زیر مجموعه H از گروه لی G را یک زیر گروه لی گویند اگر

- H زیر گروه G باشد
- H دارای ساختاری هموار باشد که نسبت به آن یک گروه لی شود
- H زیر خمینه فروبرده شده G باشد(نگاشت $i : H \to G$ یک فرو بری[۱۴] یک به یک باشد).

قضیه ۱.۱.۱ $(Cartan)([L])$ اگر G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته G (به معنای توپولوژیکی) باشند آنگاه H یک زیر گروه لی G است.

با توجه به قضیه Cartan و لم ۱.۱.۱ نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۱.۱.۱ زیر گروه H از یک گروه لی G، یک زیر گروه لی است اگر و تنها اگر بسته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ هرگاه G و H دو گروه لی باشند نگاشت $f : G \to H$ را یک همریختی[۱۵] گروههای لی گویند اگر f هموار و یک همریختی گروهی باشد.همریختی f را یکریختی [۱۶] می نامیم هرگاه f یکریختی گروهی و یک وابرسانی باشد.

---

[۱۴] Immersion

[۱۵] Homomorphism

[۱۶] Isomorphism

قضیه ۲.۱.۱ ($[Ko]$) یک گروه توپولوژیک فشرده یک گروه لی است اگر وتنها اگر با یک زیر گروه بسته $O(n)$، گروه لی قائم [۱۷]، (برای یک n) یکریخت باشد.

گزاره ۳. ($[Br]$) هر گروه لی آبلی و همبند با $T^k \times R^s$ (برای k, s ی صحیح و نامنفی) یکریخت است.

نتیجه ۲.۱.۱ هر گروه لی آبلی، همبند و فشرده با چنبره [۱۸] T^k (برای kی صحیح و نامنفی) یکریخت است .

تعریف ۶.۱.۱ یک گروه لی آبلی، فشرده و همبند را یک گروه چنبره ای [۱۹] گویند.

تعریف ۷.۱.۱ منظور از چنبره ماکسیمال T در گروه لی فشرده G، یک زیر گروه چنبره ای از G است که بطور سره در زیر گروه چنبره ای بزرگتری قرار نگرفته است.

گزاره ۴. ($[Br]$) دو چنبره ماکسیمال از یک گروه لی فشرده G ، مزدوج اند. بنابراین دارای بعدهای یکسان‌اند.

گزاره ۵. ($[BD]$) فرض کنید T چنبره ماکسیمال گروه لی فشرده G باشد در این صورت

۱) اگر $Z(G) = T$ آنگاه T زیرگروه آبلی ماکسیمال G است

۲) $Z(G)$ اشتراک همه چنبره های ماکسیمال G است.

---

[۱۷] Orthogonal Lie group

[۱۸] Torus

[۱۹] Toral group

تعریف ۸.۱.۱ بعد چنبره ماکسیمال در گروه لی فشرده G را رتبه[۲۰] G می نامند و با نماد $rank(G)$ نمایش می دهند.

قضیه ۳.۱.۱ ([Ko]) گروه طولپایی های[۲۱] یک n−خمینه ریمانی (M, g)، $Iso(M, g)$، نسبت به توپولوژی فشرده−باز[۲۲] یک گروه لی است که اگر M فشرده باشد $Iso(M, g)$ نیز فشرده است.

قضیه ۴.۱.۱ ([Ko]) فرض کنید (M, g) یک n−خمینه ریمانی باشد. $Iso(M, g)$، حداکثر از بعد $\frac{1}{2}n(n+1)$ است.اگر بعد $Iso(M, g)$ برابر $\frac{1}{2}n(n+1)$ باشد آنگاه M با یکی از خمینه های با خمیدگی ثابت زیرطولپاست.

۱) فضای اقلیدسی n−بعدی R^n

۲) کره n−بعدی S^n

۳) فضای تصویری n−بعدی RP^n

۴) فضای هذلولوی از بعد n

---

[۲۰] Rank

[۲۱] Group of isometries

[۲۲] Compact-open topology

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید (M,g) یک n−خمینه ریمانی و فشرده باشد. رتبه گروه طولپایی های (M,g) را رتبه تقارنی [۲۳] (M,g) گویند که آن را با نماد $symrank(M,g)$ نمایش می دهند.

قضیه ۵.۱.۱ ([GS۱]) فرض کنید (M,g) یک n−خمینه ریمانی، همبند و فشرده با خمیدگی[۲۴] مثبت باشد آنگاه $symrank(M,g) \leq \frac{1}{2}(\dim M + 1)$ و تساوی فقط زمانی حاصل می شود که M وابرسان با یک کره، یک فضای تصویری مختلط یا حقیقی یا یک فضای عدسی باشد.

۲.۱ عمل گروه لی بر یک خمینه هموار

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید G یک گروه لی و M یک خمینه هموار باشند، عمل هموار چپ[۲۵] G بر M یک نگاشت هموار

$$\theta : G \times M \to M$$
$$(g,m) \to g.m$$

با خواص زیر است

- $g_1.(g_2.m) = (g_1 g_2).m \quad \forall g_1, g_2 \in G, m \in M$
- $e.m = m \quad \forall m \in M$.

(بطور مشابه عمل هموار راست تعریف می شود)

[۲۳] Symmetry rank

[۲۴] Curvature

[۲۵] Left smooth action

توجه ۱.۲.۱ فرض کنید $\theta : G \times M \to M$ یک عمل هموار چپ (عمل هموار راست) G بر خمینه هموار M باشد در اینصورت نگاشتهای $\begin{matrix} \theta_g : M \to M \\ m \to g.m \end{matrix}$ ($\begin{matrix} \theta_g : M \to M \\ m \to m.g \end{matrix}$) برای هر g در G یک وابرسانی از M می باشند. همچنین داریم

$$\theta_{g_۱} o \theta_{g_۲} = \theta_{g_۱ g_۲}$$
$$\theta_e = Id_M$$

بنابراین عمل گروه لی G بر خمینه M را می توان یک همریختی ρ از G به $Diff(M)$، گروه وابرسانیهای M، که نگاشت $(g,m) \to \rho(g)(m)$ از $G \times M$ به M هموار باشد، در نظر گرفت .

در این بخش از این به بعد فرض می‌کنیم G یک گروه لی، M یک خمینه هموار و $Hom(G, Diff(M))$ همریختی‌های از G به $Diff(M)$ هستند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید G بطور هموار بر M عمل کند. در این صورت M را یک G–خمینه [۲۶] و G را گروه تبدیل لی [۲۷] نامند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید M یک G–خمینه باشد. مجموعه $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$ را زیر گروه ثابت ساز [۲۸] x و مجموعه $G(x) = \{g.x : g \in G\}$ مدار x [۲۹] می‌نامند.

به سادگی دیده می شود که $G_{g.x} = gGg^{-۱}$ و $G(x)$ همانسان با $\frac{G}{G_x}$ می‌باشند.

---

[۲۶] G-Manifold

[۲۷] Lie transformation group

[۲۸] Isotropy subgroup

[۲۹] Orbit of x